ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΣΗ

Η ηλεκτρασθενής θεωρία, με εκπληκτική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, εννοποιεί πράγματι τις δύο αλληλεπιδράσεις; Η ομάδα της βαθμίδας, $SU(2) \times U(1)$, είναι απλά γινόμενο δύο ξεχωριστών μετασχηματισμών βαθμίδας με σταθερές g για την $SU(2)$ και g' για την $U(1)$. Αυτές οι δύο σταθερές δεν συσχετίζονται στο μοντέλο. Ο λόγος τους

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$$

πρέπει να μετρηθεί πειραματικά.

Αν όμως οι μετασχηματισμοί βαθμίδας των $SU(2)$ και $U(1)$ μπορούσαν να ενσωματωθούν σε ένα μεγαλύτερο σύνολο μετασχηματισμών G, Δηλαδή, αν

$$G \supset SU(2) \times U(1)$$

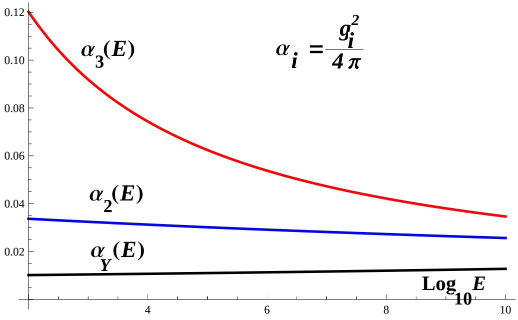
οι σταθερές g και g' θα μπορούσαν να συσχετισθούν. Οι νέοι μετασχηματισμοί που θα περιέχει το G, θα συσχετίζουν τα αρχικά ανεξάρτητα υποσύνολα των μετασημματισμών του $SU(2)$και $U(1)$.

Οπότε, περιμένουμε οι g και g' να συσχετίζονται μέσω κάποιου αριθμού (κάποιου συντελεστή Clebsch-Gordan της ομάδας G). Έχοντας στο μυαλό μας για μια ‘‘τελική’’ θεωρία είναι λογικό να θέλουμε να συμπεριλάβουμε και τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Δηλαδή, ψάχνουμε για μια ομάδα G

$$G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

που φυσικά θα συσχετίζει τα g και g' με την σταθερά της ισχυρής αλληλεπίδρασης g_s. Όλες οι αλληλεπιδράσεις, επομένως, θα περιγράφονται από μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία (Grand Unified Theory, GUT) με μια μοναδική σταθερά g_G με την οποία όλες οι σταθερές θα συσχετίζονται μιας και ορισθεί η ομάδα G.
Αλλά πώς οι τρείς σταθερές (πηγαίνοντας σε μια καλύτερη ονοματολογία) g_Y, g_2 και g_3 των $U(1)$, $SU(2)$ και $SU(3)$, με διαφορετικές τιμές μπορούν να συσχετισθούν με μια σταθερά την g_G;
Εδώ, στο ‘‘παιχνίδι’’ μπαίνει το γεγονός ότι αυτές οι σταθερές *δεν* είναι σταθερές αλλά η τιμή τους εξαρτάται από την ενέργεια της αλληλεπίδρασης.

Η μη αβελιανότητα των $SU(3)$ και $SU(2)$, και το συγκεκριμένο σωματιδιακό περιεχόμενο, οδηγεί τις αντίστοιχες σταθερές σε μείωση της τιμής τους όσο αυξάνεται η ενέργεια. Αντίθετα, η τιμή της σταθεράς του $U(1)$ αυξάνεται με την ενέργεια. Επομένως, πιθανόν είναι ότι σε κάποια υψηλή τιμή της ενέργειας, οι τρεις σταθερές να έχουν μια κοινή τιμή: την τιμή της σταθεράς g_G της μεγαλοενοποιημένης θεωρίας.



Η εξέλιξη της σταθεράς σύζευξης με την ενέργεια καθορίζεται από την λεγόμενη *συνάρτηση βήτα* της αντίστοιχης αλληλεπίδρασης

$$\frac{d}{d(\ln E)}\,\alpha_i(E) = \beta_i, \quad \alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}, \quad i = 3, 2, Y$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση β στη θεωρία διαταραχών. Για την περίπτωση του Καθιερωμένου Προτύπου με 3 γενιές σωματιδίων και μία διπλέτα Higgs, σε πρώτη προσέγγιση (προσέγγιση ενός βρόχου) οι συναρτήσεις β είναι

$$\beta_3 = -7\frac{\alpha_3^2}{2\pi}, \quad \beta_2 = -\frac{19}{6}\frac{\alpha_2^2}{2\pi}, \quad \beta_Y = \frac{41}{6}\frac{\alpha_Y^2}{2\pi}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\frac{1}{\alpha_i(E)} = \frac{1}{\alpha_i(E_0)} - \frac{b_i}{2\pi}\ln\frac{E}{E_0}, \qquad i = 3, 2, Y$$

όπου $b_3 = -7$, $b_2 = -19/6$ και $b_Y = 41/6$.

Η *μικρότερη* ομάδα που μπορεί να περιέχει τις ομάδες του Καθιερωμένου Προτύπου ως υποομάδες είναι η $SU(5)$.
Πώς κατατάσσουμε τα σωματίδια ως προς αυτήν την ομάδα;
Για μία οικογένεια έχουμε

$$\left.\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R\right\} \qquad \text{το καθένα σε 3 χρώματα}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, e_R^-$$

με τα αντισωματίδιά τους. Σύνολο 15 σωματίδια. Μπορούμε να κάνουμε την ‘‘αντικατάσταση’’

$$u_R \to \bar{u}_L, \quad d_R \to \bar{d}_L, \quad e_R^- \to e_L^+$$

Στην $SU(5)$ μπορούμε να ‘‘τοποθετήσουμε’’ τα σωματίδια αυτά σε μια (αντι-)θεμελιώδη αναπαράσταση $\bar{5}$ και στην αναπαράσταση 10. Αυτή η τελευταία αναπαράσταση είναι το αντισυμμετρικό τμήμα από το γινόμενο δύο θεμελιωδών αναπαράστασεων 5 $(5 \times 5 = 10_A + 15_S)$.
Τα 3 $\bar{d}_L$ και το ζευγάρι $(\nu_e, e^-)_L$ ανήκουν στην $\bar{5}$

$$\bar{5} = (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar{d}_L (3 \text{ χρώματα})$$

και τα υπόλοιπα 10

$$10 = (1,1) + (\bar{3},1) + (3,2) = e_L^+ + \bar{u}_L (3 \text{ χρώματα}) + (u,d)_L (3 \text{ χρώματα})$$

όπου στις παρενθέσεις φαίνονται οι αναπαραστάσεις κάτω από τις $SU(3)$ και $SU(2)$.

$$
\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{d} \\ \bar{d} \\ e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u} & -\bar{u} & -u & -d \\ -\bar{u} & 0 & \bar{u} & -u & -d \\ \bar{u} & -\bar{u} & 0 & -u & -d \\ u & u & u & 0 & -\bar{e}^+ \\ d & d & d & \bar{e}^+ & 0 \end{pmatrix}_L
$$

Και τα σωματίδια βαθμίδας τις $SU(5)$; Είναι βέβαια 24 και ανήκουν στην συζηγή (adjoint) αναπαράσταση της ομάδας

$$
24 = \underbrace{(8,1)}_{\text{γκλουόνια}} + \underbrace{(1,3) + (1,1)}_{W_1, W_2, W_3, B} + \underbrace{(3,2) + (\bar{3},2)}_{X, Y}
$$

Δηλαδή, έχουμε επιπλέον σωματίδια βαθμίδας που σχηματίζουν διπλέτες κάτω από την $SU(2)$ και τριπλέτες κάτω από την $SU(3)$, έχουν χρώμα. Τα σωματίδια αυτά επιτρέπουν την αλληλεπίδραση λεπτονίων με κουαρκ. Για παράδειγμα

$$
(u,d)_L \to e_L^+ + (\bar{Y}, \bar{X})
$$

που σημαίνει ότι τα φορτία των X και Y είναι $Q_X = 4/3$ και $Q_Y = 1/3$.

Είναι πράγματι αυτή η διαδικασία μη αναμενόμενη; Θυμηθείτε ότι για ενέργειες πάνω από την μάζα του M_W η διαφορά μεταξύ ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων εξαφανίζεται. Αντίστοιχα, πάνω από την ενέργεια ενοποίησης των 3 αλληλεπιδράσεων η ισχυρή αλληλεπίδραση ενσωματώνεται στην ηλεκτρασθενή και η διάκριση μεταξύ των έγχρωμων κουαρκ και άχρωμων λεπτονίων εξαφανίζεται.

Λίγα λόγια για την $SU(5)$.

Από τους 24 γενήτορες της ομάδας, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους 8 της $SU(3)$ στους T_i, $i = 1, ..., 8$ που έχουν στοιχεία διάφορα του μηδενός μόνο στις 3 πρώτες στήλες και γραμμές. Τους γενήτορες της $SU(2)$ τους αναγνωρίζουμε με αυτούς που έχουν διάφορα του μηδενός τα στοιχεία μόνο στην 4η και 5η γραμμή και στήλη: T_{22}, T_{23} και $(\sqrt{10}\,T_{24} - \sqrt{6}\,T_{15})/4$. Ο διαγώνιος γενήτορας της $SU(2)$ είναι ο τρίτος

$$\frac{1}{4}(\sqrt{10}\,T_{24} - \sqrt{6}\,T_{15}) = diag(0, 0, 0, 1/2, -1/2)$$

Πρέπει τώρα να αναγνωρίσουμε την τιμή του υπερφορτίου Y για τη σχέση που δίνει το ηλεκτρικό φορτίο

$$Q = T_3^{SU(2)} + \frac{Y}{2}$$

Το φορτίο Q θα πρέπει να είναι ένας από τους γενήτορες της $SU(5)$ (ή γραμμικός συνδυασμός τους) και θα πρέπει να είναι διαγώνιος. Η κατάλληλη επιλογή για να παίρνουμε το σωστό φορτίο των σωματιδίων είναι

$$Y = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}\,T_{24} + \frac{5}{3}\sqrt{6}\,T_{15}\right) = diag(-2/3, -2/3, -2/3, 1, 1)$$

Ας δούμε αν παίρνουμε το σωστό ηλεκτρικό φορτίο για την $\bar{5}$. Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η αναπαράσταση $\bar{5}$ μετασχηματίζεται με τους πίνακες $-T_i^*$. Επομένως, θα έχουμε

$$Q_{\bar{5}} = -diag(0,0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}diag(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},1,1) =$$
$$= diag(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1,0)$$

που είναι ακριβώς τα φορτία της πεντάδας $(\bar{d}, \bar{d}, \bar{d}, e, \nu_e)$.
Έχοντας προσδιορίσει το υπερφορτίο του Καθιερωμένου Προτύπου ως προς του γενήτορες της $SU(5)$, μπορούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ της σταθεράς g' και της ενοποιημένης σταθεράς g_G

$$g' = \sqrt{\frac{3}{5}}\, g_G$$

ενώ για της σταθερές σύζευξης των $SU(3)$ και $SU(2)$ ο συντελεστής αναλογίας είναι μονάδα. Οπότε, τώρα μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της ενέργειας όπου οι τρεις σταθερές του ΚΠ πλησιάζουν μια κοινή τιμή. Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων $\alpha_3(Q) = \alpha_2(Q) = \frac{5}{3}\alpha_Y(Q)$

$$\frac{1}{\alpha_3(E_0)} - \frac{b_3}{2\pi}\ln\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\alpha_2(E_0)} - \frac{b_2}{2\pi}\ln\frac{E}{E_0} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{\alpha_Y(E_0)} - \frac{b_Y}{2\pi}\ln\frac{E}{E_0}\right)$$

Με αρχικές τιμές, από τα πειράματα,

$$E_0 = M_Z = 91,2\ \mathrm{GeV}, \quad \alpha_3 \sim 0,118, \quad \alpha_2 \sim 0,034, \quad \alpha_Y \sim 0,010$$

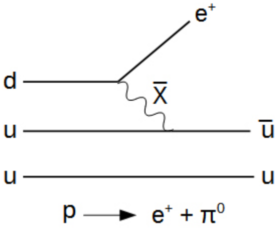
η ενέργεια όπου $\alpha_2 = \alpha_3$ είναι $\sim 10^{15}$GeV και η κοινή τιμή $0,021$.
Η $\alpha_1 \equiv (5/3)\alpha_Y$ *δεν* περνά από το κοινό σημείο των α_2 και α_3.

Βέβαια, υπάρχουν και τα σφάλματα στον προσδιορισμό των αρχικών τιμών (κυρίως στο α_3) αλλά και πάλι οι τρεις σταθερές σύζευξης δεν φαίνεται να συγκλίνουν. Χρειάζεται να έρθει η έννοια της υπερσυμμετρίας και η πρόβλεψη για νέα (τα υπερσυμμετρικά) σωματίδια που αλλάζουν την εξέλιξη των σταθερών που δείχνουν πλέον μια πολύ καλύτερη σύγκλιση σε ενέργειες της τάξης των 10^{16} GeV.

Άλλες ''επιπτώσεις'' της μεγαλοενοποίησης

α. Η διάσπαση του πρωτονίου

Με δεδομένο ότι τα X και Y μετατρέπουν λεπτόνια σε βαρυόνια, περιμένουμε διάσπαση του πρωτονίου



Περιμένουμε ότι η μάζα του X και του Y να είναι ίδιας τάξης με την ενέργεια ενοποίησης, δηλαδή $\sim 10^{15}$GeV. Οπότε, κατ' αναλογία με την ασθενή αλληλεπίδραση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αλληλεπίδραση ανταλλαγής του X με μια αλληλεπίδραση της μορφής $ud \to e^+ \bar{u}$. Και η ενεργός σταθερά σύζευξης θα είναι της τάξης

$$\frac{\alpha_U}{M_X^2}$$

όπου α_U είναι η τιμή της σταθεράς σύζευξης της ενοποιημένης θεωρίας που είναι της τάξης του 0.022 Το τετράγωνου του πλάτους, Γ, αυτής της διαδικασίας θα είναι της τάξης

$$\Gamma \sim \left(\frac{\alpha_U}{M_X^2}\right)^2 E^5$$

όπου E είναι μια χαρακτηριστική ενέργεια της διαδικασίας διάσπασης, οπότε η τιμή $E = m_p$ είναι μια λογική επιλογή.

Ο χρόνος ζωής τ είναι το αντίστροφο του Γ

$$\tau = \Gamma^{-1} \sim \frac{M_X^4}{\alpha_U^2 m_p^5} \sim 10^{29} - 10^{30} \text{ χρόνια}$$

(Για σύγκριση αναφέρουμε ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι 10^{10} χρόνια!)

Τα πειράματα, μη παρατηρώντας διάσπαση του πρωτονίου, βάζουν ένα κάτω όριο στο χρόνο ζωής μεγαλύτερο του 5×10^{32} χρόνια. Οπότε, ουσιαστικά, το συγκεκριμένο πρότυπο $SU(5)$ είναι ασύμβατο.

β. Τα φορτία των λεπτονίων και των κουαρκ

Το πρότυπο $SU(5)$ απαντά σε ένα διαχρονικό αίνιγμα: την ισότητα της (απόλυτης) τιμής του φορτίου του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο, οι τιμές $-2e/3$ και $e/3$ για τα φορτία των u και d κουαρκ είναι εμπειρικές. Στο πρότυπο $SU(5)$, μπορεί να δειχθεί ότι το συνολικό φορτίο των σωματιδίων που περιέχονται σε μια αναπαράσταση θα πρέπει να μηδενίζεται. Οπότε, βλέποντας την αναπαράσταση

$$\bar{5} = (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar{d}_L (3 \text{ χρώματα})$$

θα πρέπει

$$3Q_{\bar{d}} + Q_{e^-} = 0 \Rightarrow Q_{\bar{d}} = -\frac{Q_{e^-}}{3} = \frac{1}{3}$$

Δηλαδή, η παρουσία του συντελεστή $1/3$ στο φορτίο του d κουαρκ είναι αποτέλεσμα του χρώματος των κουαρκ. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε ότι το φορτίο του u κουαρκ είνα $2/3$, και από το περιεχόμενο του πρωτονίου (uud), παίρνουμε ότι το φορτίο του πρωτονίου είναι $-Q_{e^-}$.

Η ομάδα $SU(5)$ $T_i = \lambda_i/2,\ Tr[T_i T_j] = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ (Π)

$$\lambda^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0&0\\i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^4=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^5=\begin{pmatrix}0&0&-i&0&0\\0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^6=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^7=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-i&0&0\\0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^9=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{13}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&i&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{16}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{17}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\i&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{18}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{19}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{20}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{21}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0\\0&0&i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{22}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda^{24}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-4\end{pmatrix}$$