ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

9ο ΕΞΑΜΗΝΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Νίκος Τράκας

Περιεχόμενα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Quarks and Leptons: An introductory course in Modern Particle Physics,
F. Halzen and A.D. Martin

Gauge Theories in Particle Physics,
I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hay

Relativistic Quantum Mechanics,
J.D. Bjorken and S.D. Drell

Introduction to Elementary Particles,
D. Griffiths

Field Theory, A Modern Primer,
P. Ramond

Σχετικιστική Κβαντομηχανική,
Σ. Τραχανάς

Σωματιδιακή Φυσική. Μια Εισαγωγή στην Βασική Δομή της Ύλης,
Κ.Ε. Βαγιωνάκης

Οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις, π.χ.

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-, \quad eq \to eq, \quad \gamma q \to e^+e^- q$$

αποτελούν συστήματα πολλών σωματιδίων και από τα πειράματα που έχουμε στη διάθεσή μας βρισκόμαστε στην περιοχή της σχετικιστικής κινηματικής. Επί πλέον εμφανίζονται και αντισωματίδια που δεν απαιτούνται στην μη σχετικιστική θεωρία.
Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών θα χρησιμοποιούμε τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν ελεύθερο σωματίδιο (IN και OUT καταστάσεις) και την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων θα τη θεωρούμε ως διαταραχή σε περιορισμένο χώρο και χρόνο.

Χρησιμοποιούμε σχετικιστικό φορμαλισμό της θεωρίας διαταραχών. Σημαντικό ρόλο παίζουν τα ‘‘διαγράμματα Feynman’’. Με τη χρήση των ‘‘κανόνων Feynman’’ μπορούμε να υπολογίσουμε φυσικές ποσότητες (ενεργές διατομές, ρυθμούς μετάβασης κ.λπ.) χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στη θεωρία πεδίου. Βέβαια, οι κανόνες αυτοί καθορίζονται από τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τη θεωρία πεδίου.
Αρχικά θα αγνοήσουμε το spin των σωματιδίων, που κάπως περιπλέκει την εικόνα, και θα ασχοληθούμε με ‘‘ηλεκτρόνια’’ χωρίς spin.

Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Με τις αντικαταστάσεις

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

η κλασική σχέση $E = \frac{p^2}{2m}$ γίνεται ($\hbar = 1$)

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi = 0$$

όπου $\rho = |\Psi|^2$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας ($|\Psi|^2 d^3x$ δίνει την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο d^3x). Αυτή είναι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m.

Ανάλογα με την διατήρηση φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό, η διατήρηση της πιθανότητας μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad \text{διαφορική μορφή}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dv + \oint_{S(V)} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{da} = 0 \quad \text{ολοκληρωτική μορφή}$$

όπου $\boldsymbol{j}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Ας βρούμε τη μορφή του. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Schrödinger με $-i\Psi^*$ και την συζυγή της με $i\Psi$ και αθροίζουμε

$$-i\Psi^*\left(i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi\right) + i\Psi\left(-i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi^*\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{i}{2m}\Psi^*\boldsymbol{\nabla}^2\Psi + \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{i}{2m}\Psi\boldsymbol{\nabla}^2\Psi^* = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i}{2m}\left(\Psi^*\boldsymbol{\nabla}^2\Psi - \Psi\boldsymbol{\nabla}^2\Psi^*\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\underbrace{\left[-\frac{i}{2m}\left(\Psi^*\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Psi\boldsymbol{\nabla}\Psi^*\right)\right]}_{\boldsymbol{j}} = 0$$

Η λύση της εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο $\Psi = N\exp\left[i\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et\right)\right]$ δίνει $\rho = |N|^2$ και

$$\boldsymbol{j} = \frac{-i|N|^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla}(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\right) = \frac{|N|^2}{2m}2\boldsymbol{p} = \frac{|N|^2}{m}\boldsymbol{p}$$

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο (ict, x)

Ό,τι μετασχηματίζεται όπως το $(ct, \mathbf{x})$ καλείται τετραδιάνυσμα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(ct, \boldsymbol{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

Επίσης, το E/c και $\boldsymbol{p}$ συγκροτούν τετραδιάνυσμα

$$(E/c, \boldsymbol{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ και $B^\mu = (B^0, \boldsymbol{B})$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζοντας το $A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A})$ μπορούμε να γράψουμε το βαθμωτό γινόμενο ως (επαναλαμβανόμενος δείκτης άνω και κάτω αθροίζεται)

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 =$$
$$A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζουμε τον (μετρικό) τανυστή $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ \text{οι άλλοι όροι μηδενικοί}$$

Ο αντίστροφός του $g^{\mu\nu}$ (δηλαδή $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \delta^\mu_{\mu'}$) εύκολα φαίνεται ότι έχει τους ίδιους όρους. Το γινόμενο των δύο τετραδιανυσμάτων μπορεί να γραφεί

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Με το $g_{\mu\nu}$ και το $g^{\mu\nu}$ μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες ενός τετραδιανύσματος

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Το διάνυσμα με άνω δείκτη ονομάζεται ανταλλοίωτο (contravariant), ενώ με κάτω δείκτη συναλλοίωτο (covariant). Για να σχηματιστεί ένα αναλλοίωτο, ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, μέγεθος θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει ο αντίστοιχος κάτω. Επίσης, μια σχέση είναι Lorentz συναλλοίωτη όταν οι μη επαναλαμβανόμενοι (άνω και κάτω) δείκτες στις δυο πλευρές της ισότητας αντιστοιχίζονται ένας προς έναν.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$

Παραδείγματα βαθμωτών γινομένων είναι

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}, \quad p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2$$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm}. Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση (υπολογίστε το s στο σύστημα εργαστηρίου)

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

Προσοχή στο τετραδιάνυσμα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) = \partial^\mu \text{ και } \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) = \partial_\mu$$

Μπορείτε να δείξετε ότι το πρώτο μετασχηματίζεται όπως το $(t, \boldsymbol{x})$ ενώ το δεύτερο όπως το $(t, -\boldsymbol{x})$.
Η αντικατάσταση της ενέργειας και της ορμής με τους αντίστοιχους τελεστές γενικεύεται

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$$

Τέλος, χρησιμοποείται ο συμβολισμός

$$\Box^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

Η εξίσωση Klein-Gordon

Χρησιμοποιώντας της σχετικιστική εξίσωση $E^2 = p^2 + m^2$ και τις αντικαταστάσεις $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ και $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, οδηγούμαστε στην $(\hbar = 1)$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = \left((-i\boldsymbol{\nabla})^2 + m^2\right)\phi \Rightarrow$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla^2\phi = m^2\phi$$

που αποτελεί την εξίσωση Klein-Gordon.

Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και να αναγνωρίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας και την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein-Gordon επί $-i\phi^*$ και την συζυγή της επί $i\phi$ και προσθέτουμε

$$-i\phi^* \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla^2\phi\right) + i\phi\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* + \nabla^2\phi^*\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right] = 0$$

οπότε αναγνωρίζουμε ότι

$$\rho = i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right) \text{ και } \boldsymbol{j} = -i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)$$

Αν πάρουμε για ϕ τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon που αντιστοιχεί σε ελεύθερο σωματίδιο $\phi = Ne^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)} = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$, τότε

$$\rho = i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \text{ και } \boldsymbol{j} = -i(2i\boldsymbol{p})|N|^2 = 2\boldsymbol{p}|N|^2$$

Η Klein-Gordon μπορεί να γραφεί με τετραδιανύσματα

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\boldsymbol{\nabla})^2\right]\phi = m^2\phi \Rightarrow -\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right]\phi = m^2\phi \Rightarrow$$

$$-\partial^\mu\partial_\mu\phi = m^2\phi \Rightarrow \left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0$$

και

$$j^\mu \equiv (\rho, \boldsymbol{j}) = 2(E, \boldsymbol{p})|N|^2 = 2p^\mu|N|^2$$

Προσέξτε ότι η ρ δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, αφού είναι ανάλογη με την ενέργεια, αλλά το $\rho\, d^3x$ είναι αναλλοίωτο.

Τις ιδιοτιμές ενέργειας της Klein-Gordon τις παίρνουμε αντικαθιστώντας τη λύση $\phi = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$ στην εξίσωση και παίρνουμε

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

Με αρνητικές ενέργειες μπορούμε να έχουμε μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλώτερες ενέργειες και επιπλέον η πιθανότητα ρ μπορεί να γίνει αρνητική. Δεν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες γιατί πρέπει να έχουμε πάντοτε το πλήρες σύνολο των καταστάσεων.

Ιστορική αναδρομή

''Εξήγηση'' του Dirac για τις αρνητικές ενέργειες της εξίσωσής του.

''Εξήγηση'' των Pauli και Weisskopf για τις αρνητικές ενέργειες της Klein-Gordon. Μετέτρεψαν το j^μ σε πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρικού φορτίου $j^\mu = -ie\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$.

Η περιγραφή των λύσεων με $E < 0$ από τους Feynman-Stückelberg

Η βασική ιδέα είναι ότι η κατάσταση με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ περιγράφει σωματίδιο που ‘‘διαδίδεται’’ πίσω στο χρόνο, ή ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΟ που διαδίδεται κανονικά με τον χρόνο.

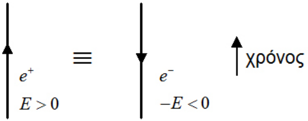
Ας ξεχάσουμε τη ‘‘δυσκολία’’ του σπιν και ας θεωρήσουμε ότι η KG περιγράφει ηλεκτρόνια με φορτίο $-e$. Οπότε, το τετραδυάνυσμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος γίνεται

$$j^{\mu}(e^{-}) = -2e|N|^2(E, \boldsymbol{p})$$

Για το αντισωματίδιο, με φορτίο $+e$ θα γράφαμε

$$j^{\mu}(e^{+}) = +2e|N|^2(E, \boldsymbol{p}) = -2e|N|^2(-E, -\boldsymbol{p})$$

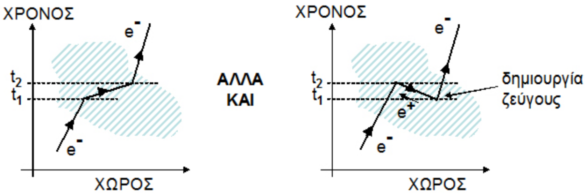
Αυτό περιγράφει σωματίδιο φορτίου $-e$ με ενέργεια $-E$ και ορμή $-\boldsymbol{p}$. Δηλαδή



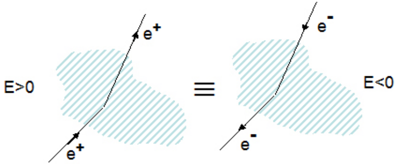
Προσέξτε ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Γι' αυτό ακριβώς μπορούμε να περιγράφουμε αρνητικής ενέργειας σωματίδια που πηγαίνουν ''πίσω'' στο χρόνο ως θετικής ενέργειας αντισωματίδια που πηγαίνουν ''μπροστά'' στον χρόνο (δηλαδή με ανάποδη ορμή).



Διπλή σκέδαση ηλεκτρονίου από πεδίο. Στο δεύτερο διάγραμμα, μεταξύ των t_1 και t_2, η κατάσταση περιγράφει 3 σωματίδια!!



Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του e^-. Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του e^+.

Μη σχετικιστική θεωρία διαταραχών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις ϕ_n της εξίσωσης Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο. Η χαμιλτονιανή H_0 είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \qquad \text{με} \quad \int_V \phi_m^*\phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

(νορμαλισμός=1 σωματίδιο/όγκο, $\rho = |\phi|^2 \Rightarrow N = V^{-1/2}$)

Ζητάμε να λύσουμε την

$$(H_0 + V(\boldsymbol{x}, t))\,\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (1)$$