Για χωρική αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$
$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\left(\begin{array}{c}\chi\\ \phi\end{array}\right)=E\left(\begin{array}{c}\chi\\ \phi\end{array}\right)\rightarrow\left\{\begin{array}{l}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi=E\chi\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi=E\phi\end{array}\right.$$

Για κάθε εξίσωση ισχύει $E^2=p^2\rightarrow E=\pm p$.
Ας δούμε την πρώτη εξίσωση $-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi=E\chi$. Για $E>0$ έχουμε

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi(\mathbf{p})=E\chi(\mathbf{p})\rightarrow-\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\mathbf{p}}{E}\chi(\mathbf{p})=\chi(\mathbf{p})\rightarrow\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p})=-\chi(\mathbf{p})$$

Άρα, το χ έχει αρνητική ελικότητα. Η ίδια πρώτη εξίσωση, για $E<0$ (ως συνήθως μιλάμε για $-E$ και $-\mathbf{p}$), γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})\chi(-\mathbf{p})=-E\chi(-\mathbf{p})\rightarrow\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\hat{\mathbf{p}})\chi(-\mathbf{p})=\chi(-\mathbf{p})$$

Επομένως το $\chi(-\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα.
Ακριβώς τα αντίθετα συμβαίνουν για την δεύτερη εξίσωση. Το ϕ για $E>0$ έχει θετική ελικότητα, ενώ για $E<0$ έχει αρνητική ελικότητα.

Στην αναπαράσταση Weyl, ο $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-I, I)$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι τελεστές P_L και P_R είναι προβολικοί: $P_L + P_R = 1$, $P_L P_R = 0$ και $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.
Αν ψ είναι ένας γενικός spinor, τότε το $P_L\psi$ ονομάζεται αριστερή συνιστώσα και το $P_R\psi$ δεξιά συνιστώσα του ψ. Πάντοτε μπορούμε να γράψουμε $\psi = (P_L + P_R)\psi = P_L\psi + P_R\psi$.
Βλέπουμε ότι

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Οπότε ένας spinor με μηδενικές τις δύο κάτω συνιστώσες είναι ιδιοκατάσταση του P_L, δηλαδή είναι αριστερόστροφο

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔΗΛΑΔΗ: το $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ με $E > 0$, έχει αρνητική ελικότητα και είναι αριστερόστροφο. Το ίδιο με $E < 0$ είχαμε δει ότι έχει θετική ελικότητα και

$$P_L \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

αλλά λόγω του $-\mathbf{p}$ είναι δεξιόστροφο. Τα αντίθετα ισχύουν για το spinor με μηδενικές τις δύο πάνω συνιστώσες.

Συνοψίζουμε (για $m = 0$)

$\begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο αντινετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο αντινετρίνο)

Το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$\frac{1}{2}\,\bar{\psi}_e \left[\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5\right] \psi_{\nu_e} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$$

Αλλά, για άμαζο νετρίνο, η ποσότητα $\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\nu_e}$ αντιστοιχεί στο αριστερόστροφο νετρίνο (ή δεξιόστροφο αντινετρίνο). Στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν εμφανίζεται δεξιόστροφο νετρίνο (ή αριστερόστροφο αντινετρίνο).

Για $m \neq 0$, το $u_L = P_L u$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Χρησιμοποιώντας την Dirac-Pauli αναπαράσταση θα έχουμε

$$P_L u(p) = \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της ελικότητας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \frac{p}{E+m})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \frac{p}{E+m})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

βλέπουμε ότι το u_L δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Αν όμως $m = 0$, και τότε $p = E$, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}+1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

Παρατηρήστε ότι για $m=0$ η δράση του γ^5 και του τελεστή της ελικότητας ταυτίζονται

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Majorana spinors

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο, που περιγράφεται από την ψ_M, συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Δηλαδή, $\psi_M^C = \psi_M$. Βέβαια, ένα τέτοιο σωματίδιο θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά αφόρτιστο. Ας δούμε ποιες σχέσεις πληρούν οι συνιστώσες του. Γνωρίζουμε ότι

$$\psi_M^C = C\gamma^0\psi_M^* = i\gamma^2\psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi_M^*$$

Γράφοντας το ψ_M με δυο συνιστώσες ϕ και χ έχουμε

$$\psi_M^C = \psi_M \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

ή με άλλα λόγια

$$i\sigma_2\, \chi^* = \phi$$

Η άλλη σχέση, $-i\sigma_2\, \phi^* = \chi$ είναι ισοδύναμη μιας και $\sigma_2^* = -\sigma_2$ καθώς και $(\sigma_2)^2 = 1$. Οπότε, το ψ_M γράφεται

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \phi \\ -i\sigma_2\, \phi^* \end{pmatrix}, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \psi_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2\, \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι αν το ϕ έχει αρνητική ελικότητα, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi = -\phi$, τότε το $-i\sigma_2\, \phi^*$ έχει θετική ελικότητα.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}(-i\sigma_2\, \phi^*) &= -i(\sigma_1\sigma_2\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 + \sigma_3\sigma_2\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i(-\sigma_2\sigma_1\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i(-\sigma_2\sigma_1^*\hat{p}_1 - \sigma_2\sigma_2^*\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3^*\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i\sigma_2(-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi)^* = -i\sigma_2\, \phi^* \end{aligned}$$

Επομένως ο ψ_M (Majorana spinor), μπορεί να περιγράφει με την πάνω συνιστώσα ϕ ένα αριστερόστροφο νετρίνο και με την κάτω συνιστώσα $-i\sigma_2\,\phi^*$ ένα δεξιόστροφο αντινετρίνο.

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση: $S_L^{-1}\gamma^{\sigma} S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L\gamma^5$$

(Π)

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$S_L^{-1}\gamma^{\sigma} S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$$

Ξεκινάμε με το αριστερό σκέλος. Για απειροστό μετασχηματισμό

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow S_L^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \left(1+\frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\gamma^\sigma\left(1-\frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\\
&= \gamma^\sigma + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\sigma_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

Ας συγκεντρωθούμε στην παρένθεση της τελευταίας σχέσης. Εισάγοντας τον ορισμό του $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma^\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu\right) =\\
\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - 2g_\mu^\sigma\gamma_\nu + 2g_\nu^\sigma\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma\right.\\
\left. + 2g_\nu^\sigma\gamma_\mu - 2g_\mu^\sigma\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma\right) =\\
-2i\left(g_\mu^\sigma\gamma_\nu - g_\nu^\sigma\gamma_\mu\right)
\end{aligned}
$$

Οπότε, η αρχική σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left(g_\mu^\sigma\gamma_\nu - g_\nu^\sigma\gamma_\mu\right) \\
&= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu - \epsilon^{\mu\sigma}\gamma_\mu\right) \qquad \left(\epsilon^{\sigma\mu} = -\epsilon^{\mu\sigma}\right) \\
&= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu + \epsilon^{\sigma\mu}\gamma_\mu\right) \\
&= \gamma^\sigma + \epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau g^{\nu\tau}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\gamma^\tau
\end{aligned}$$

Αλλά το δεξί μέλος της αρχικής προς απόδειξη σχέσης γράφεται

$$\gamma^\tau\Lambda^\sigma{}_\tau = \gamma^\tau\left(\delta_\tau^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\right) = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\gamma^\tau$$

Οπότε, αποδείξαμε την αρχική σχέση

$$S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau\Lambda^\sigma{}_\tau$$

Για την σχέση $S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger\gamma^0$, προσέξτε ότι

$$\gamma^0\sigma_{\mu\nu}^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0\left(\gamma_\nu^\dagger\gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger\gamma_\nu^\dagger\right)\gamma^0 = -\frac{i}{2}\left(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\right) = \sigma_{\mu\nu}$$

λόγω της ταυτότητας $\gamma^0\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu\gamma^0$.

Οπότε, εύκολα φαίνεται ότι

$$\gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} = S_L^{-1}$$

Η τελευταία σχέση, $\gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$ αποδεικνύεται εύκολα μιας και ο γ_5 αντιμετατίθεται με τους υπόλοιπους γ πίνακες, οπότε

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\gamma_5$$

Μετασχηματισμός Lorentz

Για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x^1) έχουμε ($c = 1$)

$$x'^0 = \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$$

όπου

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^0_1 = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1_0 = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

Χρησιμοποιώντας τα $x_0 = x^0$ και $x_1 = -x^1$ θα έχουμε

$$x'^0 = \frac{x_0 + vx_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{-x_1 - vx_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^{\nu\sigma} x_\sigma$$

όπου

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{01} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{11} = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{10} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

δηλαδή

$$\Lambda^{01} = -\Lambda^{10}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετρικό τανυστή

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} g^{\mu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma}$$

Θέλει προσοχή η σειρά των δεικτών ν, σ. Επίσης, μπορούμε να γράψουμε (πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση επί $g_{\nu\rho}$)

$$g_{\nu\rho} x'^{\nu} = g_{\nu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

δηλαδή

$$x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι το 'τετράγωνο' του τετραδιανύσματος

$$(x')^2 = (x)^2 \to x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\nu} x_{\nu} \to x'^{\mu} x'^{\rho} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu} \to$$
$$\Lambda^{\mu}_{\ \mu'} x^{\mu'} \Lambda^{\rho}_{\ \rho'} x^{\rho'} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Τα x είναι βέβαια ανεξάρτητες παράμετροι. Οπότε, εξισώνοντας δεξιά και αριστερά τους ίδιους όρους, δηλαδή θέτοντας $\mu' = \nu$ και $\rho' = \sigma$, θα έχουμε

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{T} g \Lambda = g$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to x'_{\mu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = g_{\rho\sigma} x^{\sigma} = x_{\rho}$$

και όμοια $x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$. Συνοψίζοντας

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \; x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}{}^{\sigma} x_{\sigma}, \; x_{\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu}, \; x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$$

Τέλος

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \Lambda_{\sigma}{}^{\mu} x'^{\sigma} \to \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \Lambda_{\sigma}{}^{\mu} = \delta^{\nu}_{\sigma}$$

Απειροστός μετασχηματισμός

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$$

Από τη σχέση $\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g_{\sigma\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_{\sigma\nu} &= \Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (\delta^{\rho}_{\sigma} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma}) g_{\rho\mu} (\delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \\ &= g_{\sigma\nu} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \delta^{\mu}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \epsilon^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= g_{\sigma\nu} + (\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

δηλαδή $\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu} = 0$.

Ο πίνακας $\epsilon_{\nu\sigma}$ είναι αντισυμμετρικός, επομένως έχει 6 ανεξάρτητα στοιχεία: 3 στροφές και 3 κινήσεις. Για παράδειγμα, στροφή γύρω απο τον άξονα z

$$\left.\begin{array}{l} x'^0 = x^0,\ x'^3 = x^3, \\ x'^1 = x^1 + \epsilon x^2, \\ x'^2 = -\epsilon x^1 + x^2 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποιος είναι ο $\epsilon_{\mu\nu}$

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\,\epsilon^{\rho}{}_{\nu} = g_{\mu 1}\,\epsilon^{1}{}_{\nu} + g_{\mu 2}\,\epsilon^{2}{}_{\nu}$$

Τα διάφορα του μηδενός είναι $\epsilon^{1}{}_{2} = -\epsilon^{2}{}_{1} = \epsilon$. Επομένως τα μόνα διάφορα του μηδενός στοιχεία είναι $-\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon$, δηλαδή

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για κίνηση στον άξονα z (τώρα $\epsilon = v$)

$$\left.\begin{array}{l} x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2, \\ x'^0 = x^0 - \epsilon x^3, \\ x'^3 = -\epsilon x^0 + x^3 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και όπως πριν

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$