Βάθμιση Bjorken και το πρότυπο των παρτονίων

Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2EE'(1 - \cos\theta), \quad \nu = E - E'$$

έχουμε (θεωρώντας αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε $\int d\phi = 2\pi$)

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta), \quad (\cos\theta = (-1, 1))$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial E'} = -1, \quad \frac{\partial \nu}{\partial \cos\theta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial E'} = 2E(1 - \cos\theta), \quad \frac{\partial Q^2}{\partial \cos\theta} = -2EE'$$

$$d\nu dQ^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial E'} & \frac{\partial \nu}{\partial \cos\theta} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial E'} & \frac{\partial Q^2}{\partial \cos\theta} \end{pmatrix} \right| dE' d(\cos\theta) = 2EE' dE' d(\cos\theta)$$

η Εξ.(26) γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

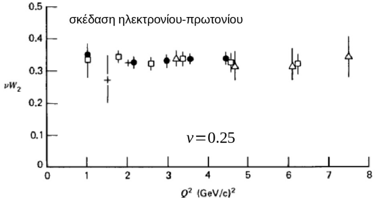
Ο Bjorken πρότεινε ότι στο όριο

$$\left.\begin{array}{l} Q^2 \to \infty \\ \nu \to \infty \end{array}\right\} \quad \text{με } x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{σταθερό}$$

οι συναρτήσεις W γίνονται

$$MW_1(Q^2,\nu) \to F_1(x), \quad \nu W_2(Q^2,\nu) \to F_2(x)$$

πράγμα που τα πειραματικά δεδομένα το επιβεβαιώνουν.
Σημαντικό στοιχείο της υπόθεσης του Bjorken είναι ότι στο όριο αυτό, οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι πεπερασμένες.



Πώς καταλαβαίνουμε αυτήν την βάθμιση;
Ο Feynman πρότεινε να θεωρήσουμε ελαστική σκέδαση με σημειακά φορτία (παρτόνια) που βρίσκονται μέσα στο πρωτόνιο. Το φωτόνιο μπαίνει βαθιά και βλέπει εσωτερική δομή στο πρωτόνιο.
Αν γράψουμε $p_i^\mu = xP^\mu$ (και $m_i \simeq xM$), δηλαδή ότι το παρτόνιο i έχει κάποιο κλάσμα της ορμής του πρωτονίου, ελαστική σκέδαση του ηλεκτρονίου με το παρτόνιο φορτίου e_i θα δίνει

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[e_i^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2e_i^2\frac{Q^2}{4m_i^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

που θα πρέπει να συγκριθεί με την

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{1}{EE'}\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Άρα θα πρέπει η συνεισφορά στα W_1 και W_2 από ένα είδος παρτονίου να είναι

$$W_1^i = e_i^2\frac{Q^2}{4xM^2}\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right)$$
$$W_2^i = e_i^2\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right)$$

Για $Q^2, \nu \to \infty$ θεωρούμε ότι οι συνεισφορές των παρτονίων αθροίζονται ασύμφωνα (incoherently). Άρα, αθροίζουμε για όλα τα είδη των παρτονίων και ολοκληρώνουμε για όλα τα $x = (0, 1)$. Βέβαια, το ολοκλήρωμα στα x θα πρέπει να έχει και κάποια συνάρτηση βάρους $f_i(x)$ για κάθε είδος παρτονίου. Αυτές οι συναρτήσεις, που καλούνται κατανομές πιθανότητας, δεν προβλέπονται από αυτό το πρότυπο. Επομένως,

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right)$$

και επειδή

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}}, \quad \text{με } g(x_0) = 0$$

θα έχουμε

$$\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right) = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right)\left(\frac{Q^2}{2Mx_0^2}\right)^{-1} = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right)\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

Επομένως,

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

όπου $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$.

Ανάλογα παίρνουμε

$$MW_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{2}\sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F_1(x)$$

οπότε

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

Η τελευταία σχέση, σχέση Callan-Gross, είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ότι τα παρτόνια έχουν spin=1/2.

Το πρότυπο των κουάρκ-παρτονίων

Ας υποθέσουμε ότι τα παρτόνια είναι τα κουάρκ του Gell-Mann με τις γνωστές ιδιότητες (φορτίο, τιμή του βαριονικού αριθμού, της παραδοξότητας κ.λπ.). Τότε για την αλληλεπίδραση φωτονίου με τα κουάρκ του πρωτονίου, θα έχουμε

$$F_2^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}\left(u(x)+\bar{u}(x)\right)+\frac{1}{9}\left(d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)\right)\right]$$

με $u(x)$, $d(x)$, $s(x)$, ... η κατανομή πιθανότητας για κάθε ένα από αυτά. Ίσως φαίνεται ότι αντικαταστήσαμε μια άγνωστη ποσότητα, F_2, από έξι άγνωστες ποσότητες! Αλλά, οι ίδιες ποσότητες παρουσιάζονται, με διαφορετικούς συνδυασμούς βέβαια, για στόχο νετρονίων (αντί πρωτονίων) ή, ακόμα, για χρήση νετρίνων και αντινετρίνων αντί φωτονίων. Για παράδειγμα, για στόχο νετρονίων (χρησιμοποιώντας την διατήρηση του isospin) μπορούμε να γράψουμε για το νετρόνιο

$$u^{(n)}(x) = d^{(p)}(x) \equiv d(x), \qquad d^{(n)}(x) = u^{(p)}(x) \equiv u(x)$$

οπότε

$$F_2^{en}(x) = x\left[\frac{4}{9}\left(d(x) + \bar{d}(x)\right) + \frac{1}{9}\left(u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)\right)\right]$$

Μιας και όλες οι συναρτήσεις πιθανότητας πρέπει να είναι θετικές, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \leq 4$$

σχέση που επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

Άσκηση 47 Αποδείξτε την παραπάνω σχέση.

Επίσης, για το πρωτόνιο και το νετρόνιο με παραδοξότητα 0, θα ισχύει

$$\int_0^1 dx\ [s(x) - \bar{s}(x)] = 0$$

Από το φορτίο του πρωτονίου και του νετρονίου έχουμε τις σχέσεις

$$\int_0^1 dx\ \left[\frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d})\right] = 1, \quad \text{για το πρωτόνιο}$$
$$\int_0^1 dx\ \left[\frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u})\right] = 0, \quad \text{για το νετρόνιο}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε τις

$$\int_0^1 dx\ [u - \bar{u}] = 2, \qquad \int_0^1 dx\ \left[d - \bar{d}\,\right] = 1$$

που ακριβώς δείχνει την περίσσεια των κουάρκ u και των κουάρκ d σε σχέση με τα αντι-κουάρκ.

Ακόμα μια ενδιαφέρουσα σχέση πηγάζει από το γεγονός ότι $xf_i(x)$ είναι το κλάσμα της ορμής που μεταφέρει το κουάρκ i. Οπότε

$$\int_0^1 dx\, x \left[u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}\right] = 1 - \epsilon$$

όπου με ϵ δηλώνουμε το κλάσμα της ορμής του πρωτονίου που δεν μεταφέρεται από τα κουάρκ. Πειραματικά το $\epsilon \sim 1/2$, που υποδηλώνει ότι μεγάλο κλάσμα της ορμής μεταφέρεται από αφόρτιστα αντικείμενα. Κατά την Κβαντική Χρωμοδυναμική, τα αντικείμενα αυτά είναι τα γκλουόνια.
Μπορούμε να πάρουμε και άλλους τέτοιους κανόνες αν προχωρήσουμε σε θεωρητικά πρότυπα για τις κατανομές των κουάρκ. Έτσι, εισάγουμε την έννοια για τα κουάρκ ‘‘σθένους’’ και τα κουάρκ ‘‘θάλασσας’’. Για παράδειγμα, για το πρωτόνιο οι κατανομές των κουάρκ u και d παραμετροποιούνται

$$u = u_v + q_s, \qquad d = d_v + q_s$$

ενώ για τα κουάρκ s και τα αντι-κουάρκ

$$\bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s$$

Έτσι, οι έξι άγνωστες συναρτήσεις αντικαθίστανται από τρεις. Φυσικά, υπάρχουν παρεκλίσεις από την βάθμιση Bjorken και το απλό πρότυπο που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά η ΚΧΔ δίνει απαντήσεις.