Η δικαιολόγηση του συντελεστή 2 θεωρείται από τους "θριάμβους" της εξίσωσης του Dirac.

Αντισωματίδια

Όπως έχουμε ήδη πει οι δύο λύσεις $e^{-ipx}u^{(1,2)}(\mathbf{p})$ αντιστοιχούν στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο με $E, \mathbf{p}$. Το αντι-ηλεκτρόνιο θα περιγραφεί από τις άλλες δύο λύσεις. Μένουμε πάντοτε στην περιγραφή: αντιηλεκτρόνιο με E και $\mathbf{p}$ περιγράφεται από "ηλεκτρονική λύση" με $-E$ και $-\mathbf{p}$

$$e^{-i(-p)x}u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) \equiv e^{ipx}v^{(2,1)}(\mathbf{p})$$

με $p^0 \equiv E > 0$. Το v είναι ο spinor του ποζιτρονίου. Ας δούμε ποια εξίσωση πληροί το v

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \to (-\not{p} - m)u(-\mathbf{p}) = 0 \to (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$$

Στα διαγράμματα Feynman συνεχίζουμε την ίδια τακτική: εισερχόμενο (εξερχόμενο) ποζιτρόνιο αντικαθίσταται από εξερχόμενο (εισερχόμενο) ηλεκτρόνιο. Προσοχή θέλει η ελικότητα. Όταν $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ και $\boldsymbol{\sigma} \to -\boldsymbol{\sigma}$, η ελικότητα $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ δεν αλλάζει.

Ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο πληροί την εξίσωση $[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\,\psi = 0$. Πώς θα γράψουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το ποζιτρόνιο. Θα πρέπει να καταλήξουμε σε μια παρόμοια με αλλαγή του προσήμου του φορτίου. Από την συζηγή της παραπάνω εξίσωσης έχουμε (πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με C' και εισάγοντας τον όρο $C'^{-1}C'$ μετά το γ)

$$
\begin{aligned}
&[\gamma^{\mu *}(-i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\,\psi^* = 0 \to \\
&[-\gamma^{\mu *}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi^* = 0 \to \\
&\left[C'(-\gamma^{\mu *})C'^{-1}(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\right]\,C'\psi^* = 0
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει λοιπόν να βρεθεί ένας πίνακας C' τέτοιος ώστε $-C'\gamma^{\mu *}C'^{-1} = \gamma^\mu$. Συνηθίζουμε να γράφουμε $C' = C\gamma^0$. Άρα θα πρέπει $-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C\gamma^0$. Αν λοιπόν ορίσουμε $\psi_C \equiv C'\psi^* = C\gamma^0\psi^* = C(\bar{\psi})^T$, το ψ_C υπακούει την εξίσωση

$$[(i\gamma^\mu\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi_C = 0$$

Άσκηση 22 Δείξτε ότι με την συγκεκριμένη μορφή των πινάκων γ, η μορφή $C\gamma^0 = i\gamma^2$ πληροί την συνθήκη $-C\gamma^0\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu C\gamma^0$.

Άσκηση 23 Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις $C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T$, $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$, $\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$.

Ας δούμε τη ''δράση'' του $i\gamma^2$ πάνω σε ένα συγκεκριμένο spinor:

$$\psi_C^{(1)} = i\gamma^2 \left[e^{-ipx} u^{(1)}(\mathbf{p})\right]^* = e^{ipx} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{ipx} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\mathbf{p}}{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Αλλά

$$\sigma_2 \boldsymbol{\sigma}^* = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2\sigma_{1,3}^* = \sigma_2\sigma_{1,3} = -\sigma_{1,3}\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_2^* = -\sigma_2\sigma_2 \end{array} \right\} = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_2$$

Άρα

$$\psi_C^{(1)} = e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= -e^{ipx} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = e^{ipx} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})}{|-E|+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-i(-p)x} u^{(4)}(-\mathbf{p}) = e^{ipx} v^{(1)}(\mathbf{p})$$

Ξαναγράφουμε, συμπερασματικά,

$$\psi_C^{(1)} = i\gamma^2 \left[e^{-ipx} u^{(1)}(\mathbf{p}) \right]^* = e^{ipx} u^{(4)}(-\mathbf{p}) = e^{ipx} v^{(1)}(\mathbf{p})$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ για το ηλεκτρόνιο. Οπότε, το ρεύμα για το ψ_C θα είναι $j^\mu_C = -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C$. Αυτό γράφεται ($\bar{\psi}_C = -\psi^T C^{-1}$)

$$
\begin{aligned}
j^\mu_C &= -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C = +e\psi^T C^{-1}\gamma^\mu\psi_C = \\
&= +e\psi^T(C^{-1}\gamma^\mu)C\gamma^0\psi^* = -e\psi^T\gamma^{\mu T}C^{-1}C\gamma^0\psi^* = \\
&= -e\psi^T\gamma^{\mu T}\gamma^0\psi^* = -e\psi^T\gamma^{\mu T}\gamma^{0T}\psi^* = \\
&= +e\left(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi\right)^T = +e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi
\end{aligned}
$$

Η αλλαγή προσήμου στην προτελευταία ισότητα είναι σημαντική. Επιβάλλεται από την σχέση στατιστικής-spin. Στην κβαντική θεωρία πεδίου παρουσιάζεται λόγω της αντιμεταθετικότητας των φερμιονικών τελεστών ψ. Στην θεωρία πεδίου ο τελεστής της συζυγίας φορτίου μετατρέπει ένα ηλεκτρόνιο θετικής ενέργειας σε ένα ποζιτρόνιο θετικής ενέργειας. Το αποτέλεσμα είναι ότι θα πρέπει να εισάγουμε με το χέρι ένα αρνητικό πρόσημο σε κάθε διάγραμμα Feynman που περιέχει ένα αρνητικής ενέργειας ηλεκτρόνιο στην τελική κατάσταση.

Ο τελεστής $C\gamma^0$ κατασκευάζει κυματοσυναρτήσεις ποζιτρονίου. Αν ο αντίστοιχος τελεστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μετατρέπει $A^\mu \to -A^\mu$ τότε η εξίσωση Dirac παραμένει αναλλοίωτη

$$\underset{\substack{\text{ηλεκτρόνιο θετικής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{spin άνω}}}{\left[\gamma^\mu \left(i\partial_\mu + eA_\mu\right) - m\right]\psi = 0} \quad \to \quad \underset{\substack{\text{ποζιτρόνιο θετικής} \\ \text{ενέργειας} \\ \text{spin άνω}}}{\left[\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right]\psi_C = 0}$$

Τώρα βλέπουμε την αναλλοίωτητα φορτίου για τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

$$j_\mu^C (A^\mu)^C = (-j_\mu)(-A^\mu) = j_\mu A^\mu$$

Νορμαλισμός των spinors και σχέσεις πληρότητας

Θα νορμαλίσουμε όπως και με τα μποζόνια: $2E$ σωματίδια ανά μονάδα όγκου. Από το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ παίρνουμε την πυκνότητα πιθανότητας $\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$.

Οπότε

$$\int\limits_{\text{μονάδα όγκου}} \rho\, dV = \int \psi^\dagger \psi\, dV = u^\dagger u = 2E$$

για τις λύσεις με θετικές ενέργειες. Το u δίνεται από τη σχέση

$$u = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

όπου $\chi^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Βέβαια, αυτό αντιστοιχεί με ορμή στον άξονα των z, αλλά γνωρίζουμε ότι με μια κατάλληλη στροφή μπορούμε να πάμε σε οποιαδήποτε διεύθυνση ενεργώντας πάνω στο u με τον τελεστή $exp(i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\theta/2)$. Τα δύο χ είναι νορμαλισμένα (στην μονάδα) και ορθογώνια. Επομένως, για $s = 1$ ή 2,

$$u^\dagger u = N^2 \begin{pmatrix} \chi^{(s)\dagger} & \chi^{(s)\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= N^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E+m)^2} \right) = N^2 \frac{2E}{E+m}$$

Επομένως, $N = \sqrt{E+m}$. Εύκολα φαίνεται ότι το ίδιο θα ισχύει και για τους spinors v με αρνητική ενέργεια.
Το u υπακούει την εξίσωση Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \to (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \to (\not{p} - m)u = 0$$

Ποια είναι η αντίστοιχη εξίσωση για το $\bar{u}$; Παίρνουμε τη συζηγή της προηγούμενης σχέσης και πολλαπλασιάζουμε με γ^0 από δεξιά

$$u^\dagger\left(p_\mu \gamma^{\mu\dagger} - m\right) = 0 \to u^\dagger\left(p_\mu \gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\gamma^0\right) = 0 \to$$
$$u^\dagger\left(p_\mu \gamma^0 \gamma^\mu - m\gamma^0\right) = 0 \to \bar{u}\,(\not{p} - m) = 0$$

μιας και γνωρίζουμε ότι $\gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu$. Όμοια, από την εξίσωση που πληροί το v: $(\not{p} + m)v = 0$ παίρνουμε $\bar{v}(\not{p} + m) = 0$.
Τώρα, μπορούμε να δείξουμε τις σχέσεις

$$\bar{u}^{(s)} u^{(s)} = 2m \quad \text{και} \quad \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = -2m, \quad s = 1, 2$$

Ας δείξουμε την πρώτη σχέση. Πολλαπλασιάζουμε την $(\not{p} - m)u = 0$ με $\bar{u}\gamma^0$ από αριστερά και την $\bar{u}\,(\not{p} - m) = 0$ με $\gamma^0 u$ από δεξιά, και αθροίζουμε

$$\left.\begin{array}{r}\bar{u}\gamma^0(\not{p}-m)u=0\\ \bar{u}\,(\not{p}-m)\,\gamma^0 u=0\end{array}\right\}\bar{u}\left(\gamma^0\not{p}+\not{p}\gamma^0\right)u-2m\bar{u}\gamma^0 u=0$$

$$2p^0\bar{u}u-2mu^\dagger u=0\to\bar{u}u=\frac{m}{E}u^\dagger u=2m$$

μιας και $u^\dagger u=2E$. Όμοια δείχνεται και η δεύτερη σχέση για τα v.

Άσκηση 24 Δείξτε τις σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)=\not{p}+m,\quad\sum_{s=1,2}v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)=\not{p}-m$$

Άσκηση 25 Δείξτε ότι $\not{p}\not{p}=p^2$

Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+=\frac{\not{p}+m}{2m},\quad\Lambda_-=\frac{-\not{p}+m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_\pm^2=\Lambda_\pm$ και $\Lambda_++\Lambda_-=1$.

Διγραμμικές αναλλοίωτες ποσότητες

Είναι χρήσιμο να βρούμε όρους της μορφής $\bar{\psi}\Gamma\psi$, όπου Γ γινόμενο γ πινάκων, με καθορισμένους κανόνες μετασχηματισμού κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να φτιάξουμε αναλλοίωτες ποσότητες. Ορίζουμε $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

χρησιμοποιώντας την αντιμετάθεση των γ πινάκων. Επίσης ισχύει ότι $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$. Στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, ο γ^5 γράφεται

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Όλες οι δυνατές (ανεξάρτητες) διγραμμικές ποσότητες είναι οι ακόλουθες (όπου $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$)

		Αρ. συνιστ.	Χωρ. αναστρ.
$\bar{\psi}\psi$	Βαθμωτό	1	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Διάνυσμα	4	Χωρικές $-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Τανυστής	6	
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	‘Αξονικό’ διάνυσμα	4	Χωρικές $+$
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Ψευδοβαθμωτό	1	$-$

Θα πρέπει να δούμε πώς μετασχηματίζεται το ψ κάτω από μετασχηματισμούς (π.χ. Lorentz, χωρική αντιστροφή) ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac. Δηλαδή, η $\psi'(x')$ να υπακούει την εξίσωση

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

με $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το S τέτοιο ώστε $\psi'(x') = S\psi(x)$. Υπενθυμίζοντας ότι $\psi = e^{-ipx}u(p)$, περιμένουμε το S να είναι ανεξάρτητο από το x. Γνωρίζοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

έχουμε

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right) S^{-1}\psi'(x') = \left(S i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

Άρα, η απαίτηση είναι

$$S\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} = \gamma^\nu \to \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu = S^{-1}\gamma^\nu S$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$$

Για χωρική αντιστροφή, όπου ο πίνακας $\Lambda^\nu{}_\mu = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, η βασική απαίτηση που θα πρέπει να πληροί ο S είναι $S_P^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0$ και $S_P^{-1}\gamma^k S_P = -\gamma^k,\ k = 1,2,3$. Αυτές οι σχέσεις πληρούνται με $S_P = \gamma^0$.

Οπότε, στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, όπου $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, οι τέσσερεις συνιστώσες του ψ μετασχηματίζονται, για χωρική αντιστροφή, ως

$$\psi'_{1,2} = \psi_{1,2}, \quad \psi'_{3,4} = -\psi_{3,4}$$

Δηλαδή, στο σύστημα ηρεμίας, οι θετικής και οι αρνητικής ενέργειας καταστάσεις (δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο) έχουν αντίθετη εσωτερική ομοτιμία.
Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς των διγραμμικών ποσοτήτων. Ας δούμε πρώτα πώς μετασχηματίζεται το $\bar{\psi}$ σε μετασχηματισμό Lorentz $\psi'(x') = S_L\psi(x)$

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (S_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S_L^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 S_L^{-1} = \bar{\psi}S_L^{-1}$$

Οπότε, σε μετασχηματισμό Lorentz,

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}S_L^{-1}\gamma^\mu S_L\psi = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα.

Για χωρική αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$