Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2. Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr}, δείξτε ότι ο παράγοντας μορφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

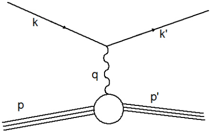
Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι ‘‘στατικό’’ και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ΄ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρεί για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

όπου

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά όπως με την σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου, θα γράφαμε



$$T_{fi} = -i\int j_\mu\left(-\frac{1}{q^2}\right)J^\mu\, d^4x$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και θεωρώντας πια το πρωτόνιο ως ΜΗ σημειακό

$$j_\mu = -e\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)e^{-i(k-k')x}$$

$$J^\mu = e\bar{u}(p')[...]u(p)e^{-i(p-p')x}$$

Ακριβώς, γράφοντας [...] δείχνουμε ότι το πρωτόνιο δεν είναι σημειακό και δεν μπορούμε απλά να γράψουμε γ^μ. Παρ' όλα αυτά, το J^μ θα πρέπει να είναι ένα τετραδιάνυσμα, και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή ενός τετραδιανύσματος χρησιμοποιώντας τις ορμές p, p' και q καθώς και τους γ πίνακες. Μπορούμε, τελικά, να φτιάξουμε δύο ανεξάρτητες ποσότητες: μια ανάλογη του γ^μ και μια δεύτερη ανάλογη του $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το [...] στο J^μ είναι $(q = p' - p)$

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3 i\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu + F_4 q^\mu + F_5(p+p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2

Οπότε, γράφουμε

$$[...] = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \tag{25}$$

όπου κ είναι η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου. Προσέξτε ότι το q^2 είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή στην κορυφή του πρωτονίου ($p^2 = p'^2 = M^2$). Επίσης, το $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητο μιας και $(q+p)^2 = p'^2 \to M^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 \to 2p \cdot q = -q^2$. Αν το $q^2 \to 0$, δηλαδή όταν το φωτόνιο έχει μεγάλο μήκος κύματος, δεν μπορούμε να διακρίνουμε δομή στο πρωτόνιο και παρατηρούμε σωματίδιο με φορτίο e και μαγνητική ροπή $(1+\kappa)/2M$. Πειραματικά, το $\kappa = 1.79$. Θυμηθείτε ότι

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{e}{2M}\bar{u}(p')(p+p')^\mu u(p) + \frac{e}{2M}\bar{u}(p') i\sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p)$$

Οπότε, ο όρος γ^μ στην Εξ.25 περιέχει την ''κανονική'' ροπή ενώ ο άλλος όρος προσφέρει την ανώμαλη ροπή του πρωτονίου, και θα πρέπει να επιλέξουμε, σ' αυτό το όριο,

$$F_1(q^2 \to 0) = 1, \qquad F_2(q^2 \to 0) = 1$$

Για το νετρόνιο, οι αντίστοιχες τιμές είναι $F_1(q^2 \to 0) = 0$, $F_2(q^2 \to 0) = 1$ και $\kappa_n = -1.91$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής την Εξ.(25), θα πάρουμε

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ \left. - \frac{q^2}{2M^2} \left(F_1 + \kappa F_2 \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Αυτή είναι η σχέση Rosenbluth. Αποτελεί μια παραμετροποίηση της άγνοιάς μας για την δομή του πρωτονίου. Παρατηρήστε ότι για $F_1 = 1$ και $\kappa = 0$ καταλήγουμε στην σκέδαση από σημειακό στόχο. Πειραματικά οι παράγοντες μορφής μετριούνται σε σκέδαση (συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του ηλεκτρονίου).

Στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο γραμμικοί συνδυασμοί των F

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \qquad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

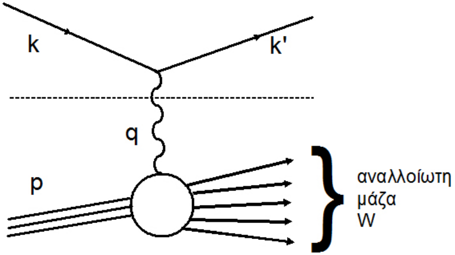
και η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

με $\tau = -q^2/2M$. Προσέξτε ότι με αυτήν την αλλαγή δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι του $G_M G_E$.

Ανελαστική Σκέδαση $ep \to eX$

Τι γίνεται όταν μεγαλώσει η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο; Δηλαδή όταν το $-q^2$ είναι μεγάλο. Για μεσαία $-q^2$ παρουσιάζονται διάφορα σωματίδια-συντονισμοί (resonances): $ep \to e\Delta^+ \to ep\pi^0$. Σ′ αυτήν την περίπτωση η αναλλοίωτη μάζα των προϊόντων $W^2 \simeq M_\Delta^2$. Για πιο μεγάλη μεταφερόμενη ενέργεια το πρωτόνιο ''σπάει'' και χρειαζόμαστε ένα καινούργιο φορμαλισμό για να περιγράψουμε το γεγονός.



Στην ελλαστική σκέδαση αντικαταστήσαμε, στο αναλλοίωτο πλάτος, το $\bar{u}\gamma^\mu u$ του μιονίου με $\bar{u}\Gamma^\mu u$ και χρησιμοποιήσαμε την πιο γενική μορφή για το Γ^μ. Τώρα ούτε αυτό γίνεται. Θα πρέπει να πάμε άμεσα στην ενεργό διατομή (δηλαδή στο τετραγωνισμένο αναλλοίωτο πλάτος) και αντί

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu} \left(L^{(\mu)}\right)^{\mu\nu}$$

που ισχύει για την περίπτωση του μιονίου, να γράψουμε

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

Το λεπτονικό κομμάτι παραμένει το ίδιο. Το $W^{\mu\nu}$ παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια για την μορφή του ρεύματος στην μεριά του πρωτονίου. Και πάλι θα πρέπει να γράψουμε το $W^{\mu\nu}$ με την πιο γενική μορφή χρησιμοποιώντας τα p^μ, q^μ και το $g^{\mu\nu}$. Προσέξτε ότι $p' = p + q$ και επίσης δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γ πίνακες μιας και γράφουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους όπου έχουμε αθροίσει στα spin. Επομένως γράφουμε

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$$

Κρατήσαμε το $W^{\mu\nu}$ συμμετρικό στους δείκτες μιας και το $L^{(e)}_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικό. Κάθε μη συμμετρικό κομμάτι του $W^{\mu\nu}$ δεν θα συνεισέφερε στο $d\sigma$. Τα W θα εξαρτώνται από τα μόνο δύο βαθμωτά μεγέθη που σχετίζονται με την κορυφή του πρωτονίου. Μπορούμε να επιλέξουμε τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Η αναλλοίωτη μάζα της τελικής κατάστασης συνδέεται με τις δύο παραπάνω μεταβλητές

$$W^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 + 2M\nu + q^2$$

Η διατήρηση του ρεύματος οδηγεί στις σχέσεις

$$q^\mu L^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu L^{(e)}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{και} \quad q^\mu W^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu W^{(e)}_{\mu\nu} = 0$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών W. Οπότε, ξαναγράφουμε

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2, \qquad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 W_2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα W_1 και W_2 εξαρτώνται από τα q^2 και ν. Συνήθως χρησιμοποιούνται, αντ' αυτών, οι x και y

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

όπου k η (τετρ)ορμή του εισερχόμενου ηλεκτρονίου.
Υπολογίζουμε τώρα την ενεργό διατομή $ep \to eX$.

$$L^{\mu\nu}_{(e)} W_{\mu\nu} = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} \left(2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k' \right)$$

$$\left|L_{(e)}^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right|_{\rm lab} = 4EE'\left[W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Άσκηση 46 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Τελικά η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left.\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[W_2(\nu,q^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu,q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{26}$$

Περίληψη για τον φορμαλισμό σκέδασης ep

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$\left.\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}\left|L^{\mu\nu}_{(e)}W_{\mu\nu}\right|_{\mathrm{lab}} \tag{27}$$

όπου

$q^2 = (k-k')^2 = -2k\cdot k' = -2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Θυμόμαστε ότι για $e\mu \to e\mu$ είχαμε

$$d\sigma = \frac{1}{4ME}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\frac{d^3p'}{(2\pi^3)2p'_0}\left[\frac{e^4}{q^4}L^{\mu\nu}_{(e)}L^{(\mu)}_{\mu\nu}\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p')$$

Μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή (27) αν

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4ME}\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p') \times <p,s|\tilde{J}^\dagger_\mu|p',s'><p',s'|\tilde{J}_\nu|p,s>$$

όπου

$$< p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s >= \bar{u}_{p'}^{(s')}\gamma_\nu u_p^{(s)}$$

Αν αντί αυτού γράψουμε

$$< p', s'|\tilde{J}_\nu|p, s >= F_1(q^2)\gamma_\nu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q_\nu$$

θα πάρουμε τον τύπο της ελαστικής σκέδασης *ep*. Γενικεύοντας, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε για την περίπτωση που το πρωτόνιο ''σπάει'' και έχουμε παρουσία N σωματιδίων

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4ME}\sum_N \left(\frac{1}{2}\sum_s\right)\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d^3p'_n}{(2\pi)^3 2E'_n}$$
$$\times\sum_{s_n} < p, s|\tilde{J}_\mu^\dagger|X >< X|\tilde{J}_\nu|p, s > (2\pi)^4\delta^{(4)}(p + q - \sum_n p'_n)$$

Έτσι, η ενεργός διατομή γράφεται γενικά

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}4EE'\,[...] = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4}\,[...]$$

όπου

$$[...] = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right), \quad \text{για } e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

$$[...] = \left(\frac{G_E^2 + G_M^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right),$$

$$\text{για } e^-p \to e^-p$$

$$[...] = W_2(\nu, q^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2)\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \text{για } e^-p \to e^-X$$

όπου $\tau = -q^2/4M$. Αν ολοκληρώσουμε τις δύο πρώτες ως προς E' χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δ, θα πάρουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\,[...]$$