Χρησιμοποιώντας τον ίδιο νορμαλισμό $N = \sqrt{E+m}$ έχουμε

$$v(p,s) = \sqrt{|E|+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2$$

και $\psi = v(p,s)e^{-i(-p)\cdot x} = v(p,s)e^{ip\cdot x}$ με $p = (E, \mathbf{p})$. Η επιλογή είναι $\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ γιατί η απουσία ενός άνω spin ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια ισοδυναμεί με παρουσία ποζιτρονίου με κάτω spin με θετική ενέργεια.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή 1/2. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση η ‘‘κάτω’’ συνιστώσα του 4-spinor είναι κατά (v/c) μικρότερη από την ‘‘άνω’’ συνιστώσα: $m + E \sim 2m \rightarrow (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})/(2m) \sim v$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi_A$$

Από τον όρο $\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$ βλέπουμε ότι υπάρχει μια εσωτερική στροφορμή του ηλεκτρονίου.
Ας θυμηθούμε ότι μαγνητική ροπή $\mathbf{m}$, σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ έχει ενέργεια $-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}$. Φορτίο q, μάζας M έχει μια μαγνητική ροπή $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\frac{q}{M}\mathbf{L}$ όπου $\mathbf{L}$ η στροφορμή. Άρα, ο όρος

$$-\left(\frac{-e}{2M}\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\mathbf{B} = \left(\frac{e}{2M}2\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{B} = 2\left(\frac{e}{2M}\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{B}$$

(όπου $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$) αντιστοιχεί σε μια ιδιοστροφορμή του ηλεκτρονίου. Η αντίστοιχη μαγνητική ροπή είναι $\mathbf{m} = \frac{e}{2M}2\mathbf{S} = 2\frac{e}{2M}\mathbf{S}$. Δηλαδή ο συντελεστής μποστά από το $\mathbf{S}$ είναι διπλάσιος από αυτόν της στροφορμής $\mathbf{L}$ $(-\frac{1}{2}\frac{q}{m}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B})$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ (Π)

Λύση

Η ελάχιστη αντικατάσταση $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ σημαίνει $E \to E + eV$ και $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + e\mathbf{A}$. Οπότε θα έχουμε από την εξίσωση του Dirac

$$E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E + eV) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E + eV) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $(E + eV)\psi_A = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\psi_B + m\psi_A$. Αλλά, $\psi_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{2m} \psi_A$ $(eV << E \sim m)$. Άρα παίρνουμε

$$(E + eV - m)\psi_A = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \frac{1}{2m} \psi_A$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (*), παίρνουμε,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})$$
$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{p})$$
$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i)\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

Για να καταλάβουμε πώς πήγαμε από την δεύτερη στην τρίτη γραμμή της προηγούμενης σχέσης ας δούμε πώς η x-συνιστώσα δρα σε ένα ψ

$$[(\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{p})]_x\, \psi = -i\, [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \boldsymbol{\nabla}]_x\, \psi =$$
$$= -i\, [\partial_y A_z - \partial_z A_y + A_y \partial_z - A_z \partial_y]\, \psi$$
$$= -i\, [(\partial_y A_z)\psi + A_z \partial_y \psi - (\partial_z A_y)\psi - A_y \partial_z \psi + A_y \partial_z \psi - A_z \partial_y \psi]$$
$$= -i\, [\partial_y A_z - \partial_z A_y]\, \psi = -i(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x \psi$$

Οπότε η εξίσωση Dirac γίνεται

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi_A$$

που είναι ακριβώς η εξίσωση του Pauli.
(*) Από $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ και $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ παίρνουμε αθροίζοντας κατά μέλη

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Οπότε

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \sigma_i a_i\,\sigma_j b_j = a_i b_j \sigma_i\sigma_j = a_i b_j\,(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) = \\ = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}\end{aligned}$$