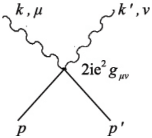
Σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'' Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού ''ηλεκτρονίου'', χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής ''ηλεκτρόνιο''-''ηλεκτρόνιο'' -φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχ.(Π)



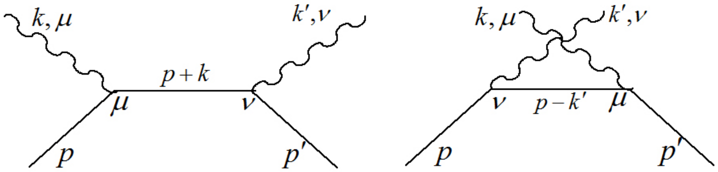
Λύση

Το αναλλοίωτο πλάτος για καθένα από τα δύο διαγράμματα που φαίνονται στο σχ. παρακάτω δίνεται από τις σχέσεις

$$-i\mathfrak{M}_1 = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \left(ie(p+p+k)^\mu\right) \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} \left(ie(p+k+p')^\nu\right) =$$

$$= \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \, T_1^{\mu\nu}$$

$$-i\mathfrak{M}_2 = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \left(ie(p + p - k')^\nu\right) \frac{i}{(p - k')^2 - m^2} \left(ie(p - k' + p')^\mu\right) =$$
$$= \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \, T_2^{\mu\nu}$$



Όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση με ηλεκτρόνιο, η αναλλοίωτητα ως προς τη συμμετρία βαθμίδας σημαίνει ότι αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα πόλωσης του φωτονίου με ορμή k

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + a k_\mu$$

το πλάτος θα μείνει αναλλοίωτο. Φυσικά το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει με αντίστοιχη αλλαγή του διανύσματος πόλωσης του φωτονίου με ορμή k'.

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει (όπως και πάλι στην περίπτωση του ηλεκτρονίου)

$$k_\mu \left(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} \right) = 0$$

και αντίστοιχα και για την ορμή k'_ν. Ας υπολογίσουμε κάθε όρο

$$\begin{aligned} k_\mu T_1^{\mu\nu} &= k(2p+k) \frac{-ie^2}{(p+k)^2 - m^2} (p+k+p')^\nu = \\ &= 2pk \frac{-ie^2}{p^2 + k^2 + 2pk - m^2} (p+k+p')^\nu = \\ &= -ie^2 (p+k+p')^\nu \end{aligned}$$

μιας και $k^2 = 0$ και $p^2 = m^2$. Συνεχίζουμε με τον δεύτερο όρο

$$\begin{aligned} k_\mu T_2^{\mu\nu} &= (p+p-k')^\nu \frac{-ie^2}{(p-k')^2 - m^2} k(p-k'+p') = \\ &= (2p-k')^\nu \frac{-ie^2}{p^2 + k'^2 - 2pk' - m^2} k(2p'-k) = \\ &= (2p-k')^\nu \frac{-ie^2}{-2pk'} 2kp' = +ie^2 (2p-k')^\nu \end{aligned}$$

όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της ορμής και την ισότητα $pk' = p'k$

$$k + p = k' + p' \to k - p' = k' - p \to kp' = k'p$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} k_\mu T_1^{\mu\nu} + k_\mu T_2^{\mu\nu} &= ie^2 \left(2p - k' - p - k - p'\right)^\nu = \\ &= ie^2 \left(p - p' - k - k'\right)_\nu = -2ie^2 k_\nu \end{aligned}$$

πράγμα που είναι διάφορο του μηδενός. Πράγματι, λοιπόν, λείπει ένα όρος της ίδιας ταξης ως προς g. Αυτός ακριβώς ο όρος προέρχεται από τον επιπλέον κόμβο που έχει η αλληλεπίδραση βαθμωτού ηλεκτρονίου-φωτονίου, όπως δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης. Αυτό αντιστοιχεί σε ένα αναλλοίωτο πλάτος

$$-i\mathfrak{M}_3 = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu 2ie^2 g^{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \; T_3^{\mu\nu}$$

Τώρα

$$k^\mu T_3^{\mu\nu} = 2ie^2 k_\nu$$

και επομένως

$$k_\mu \left(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu} \right) = 0$$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται και ότι

$$k'_\nu \left(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu} \right) = 0$$

Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της δομής του στόχου. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή κατανομή του σκεδαζομένου "βλήμματος" (π.χ. ηλεκτρόνιου), μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή.

Η γενική ιδέα είναι η εύρεση του **παράγοντα μορφής** (form factor) $F(q)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} |F(q)|^2$$

με q η μεταφερόμενη ορμή μεταξύ του προσπίπτοντος "βλήμματος" e και του στόχου: $q = k_i - k_f$. Ξεκινάμε με τη σκέδαση e σε στόχο χωρίς spin, με φορτίο $Ze\rho(\mathbf{x})$ όπου

$$\int \rho(\mathbf{x})\, d^3x = 1$$

Για στατικό στόχο έχουμε

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

ενώ

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Ας δούμε πώς φτάνουμε σ' αυτό. Για στατικό φορτίο με τιμή Ze θα έχουμε $A^\mu = (V, 0)$ με

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = -Ze\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{για σημειακό φορτίο}$$
$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = -Ze\rho(\mathbf{x}) \quad \text{για φορτίο με πυκνότητα } \rho$$

Οπότε, για το σημειακό φορτίο

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(\mathbf{x})\, d^3x = -\int Ze\delta^3(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = -Ze$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα οδηγηθήκαμε με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη (και μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που προκύπτει κάθε φορά). Για το φορτίο με πυκνότητα ρ έχουμε αντίστοιχα

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(\mathbf{x})\, d^3x = -\int Ze\rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = -ZeF(\mathbf{q})$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q})$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -ie \int d^4x\, \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i A_\mu = -ie \int d^4x\, \bar{u}(k_f)\gamma^\mu u(k_i) e^{-i(k_i - k_f)x} A_\mu$$

Για $A_\mu = (V(\mathbf{x}), 0)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -ie \left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{x}}\, V(\mathbf{x}) \\ &= -ie \left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ και $F(\mathbf{q}) = 1$ για σημειακό φορτίο. Για να πάμε στην διαφορική ενεργό διατομή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} = \\ &= (e^4 Z^2) \left[\frac{1}{2} \left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2\right] \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(2\pi\delta)^2 = T2\pi\delta$ και η αγκύλη υπονοεί άθροισμα στα spin.

Για στατικό πεδίο, η ενέργεια του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει ($\delta(E_i - E_f)$), οπότε και $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ και $E^2 = k^2 + m^2 \rightarrow EdE = kdk$. Έτσι, $d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = k_f E_f dE_f d\Omega$. Το $d\sigma$ γράφεται

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= Z^2 e^4 \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f)\frac{k_f E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f}\frac{1}{2E_i}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right] \\
&= \frac{Z^2\alpha^2}{4(\mathbf{q}^2)^2}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right]\left[F(\mathbf{q}^2)\right]^2 d\Omega
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $k_f/E_f = v$. Ας υπολογίσουμε τώρα την αγκύλη ($E_i = E_f = E$ και $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{s_f,s_i}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(\not{k}_i+m)\gamma_0(\not{k}_f+m)\gamma_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\left[\not{k}_i\gamma_0\not{k}_f\gamma_0\right]+m^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_0^2\right]\right) \\
&= 2\left(2E_iE_f-k_ik_f+m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2-(E^2-k^2\cos\theta)+m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2-(E^2-k^2\cos\theta)+E^2-k^2\right) \\
&= 4E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

με $v=k/E$ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Οπότε,

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}}E^2\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left[F(\mathbf{q})\right]^2 \qquad (24)
$$

με $\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Για σημειακό στόχο, όπως είπαμε, $F(\mathbf{q}) = 1$. Όπότε, πράγματι,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} [F(\mathbf{q})]^2$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.24 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}} E^2 [F(\mathbf{q})]^2$$

Οπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \to 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το ''ηλεκτρόνιο'' με spin=0;

Το $F(\mathbf{q}=0)=1$. Για μικρές τιμές του $|\mathbf{q}|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό

$$F(\mathbf{q}) = \int \left(1 - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2} + \ldots\right) \rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

Αν $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, δηλαδή σφαιρικά συμμετρική, ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, γιατί επιλλέγοντας $\mathbf{q}=(0,0,q)$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} = qz = qr\cos\theta$ και $d^3x = r^2\sin\theta d\theta d\phi dr$

$$\int \mathbf{q}\cdot\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\, d^3x = \int qr\cos\theta\rho(r)r^2\sin\theta d\theta d\phi dr$$

Αλλά

$$\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

Ο τρίτος όρος γίνεται

$$-\int \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2}\rho(r)d^3x = -\frac{1}{2}\int\sum_i (q_i x_i)^2\rho(r)d^3x$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\frac{1}{3}\int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\rho(r)\, d^3x = \int x_i^2 \rho(r)\, d^3x, \quad i = 1, 2, 3$$

οπότε

$$-\frac{1}{2}\int \sum (q_i^2 x_i^2)\rho(r) d^3x = -\frac{1}{2}\int (q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_1^2 + q_3^2 x_1^2)\rho(r) d^3x =$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int x_1^2 \rho(r) d^3x = -\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int \frac{1}{3}\left(\sum x_i^2\right)\rho(r) d^3x =$$
$$-\frac{1}{6}\mathbf{q}^2 \int r^2 \rho(r) d^3x = -\frac{1}{6}\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

όπου $< r^2 >$ είναι η μέση τιμή του r^2. Οπότε

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6}\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2. Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr}, δείξτε ότι ο παράγοντας μορφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι ‘‘στατικό’’ και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ΄ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρεί για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου