Άσκηση 18 Δείξτε ότι οι 4 λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι ορθογώνιες
$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

Ας αποδείξουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση: $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2 I$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \sum_{i,j} (\sigma_i p_i)(\sigma_j p_j) = \sum_i \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i,j(i \neq j)} (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) p_i p_j = p^2$$

μιας και το τετράγωνο $\sigma_i^2 = 1$ για κάθε πίνακα και επίσης $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$ για $i \neq j$.
Η σχέση μπορεί να αποδειχθεί επίσης με άμεση αντικτάσταση της μορφής των πινάκων του Pauli.

Οι γενικές λύσεις της εξίσωσης Dirac (Gauge Theories in Particle Physics, Aitchison and Hey)

Από την αρχική μορφή της Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi$$

και γράφοντας $\psi = \omega\, e^{-ip^{\mu}x_{\mu}}$ όπου $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (-i\mathbf{a}\cdot(i)\mathbf{p} + \beta m)\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E\phi &= m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi \\ E\chi &= -m\chi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi$.

Επομένως, $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$ χωρίς νορμαλισμό. Χρησιμοποιώντας την μορφή του χ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi$$

$$E = m + \frac{p^2}{E+m} \to (E-m)(E+m) = p^2$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \to E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$$

Ποια είναι η φυσική σημασία του ω με τις δύο συνιστώσες; Στη σχέση που δίνει το ω, το ϕ είναι αυθαίρετο. Μπορεί να πάρει τις τιμές $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές $\pm\frac{1}{2}$. Βέβαια, η πιο γενική μορφή του ϕ είναι $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ με a, b μιγαδικοί αριθμοί.

Έχουμε λοιπόν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, όπως ακριβώς ένα σύστημα με στροφορμή $j = 1/2$ ($2j + 1$ καταστάσεις).
Στο σύστημα ηρεμίας ($\mathbf{p}$=0), η ερμηνεία είναι άμεση. Το $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} = 0$, άρα και $\chi = 0$, και οι δύο λύσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Και οι δύο λύσεις έχουν ίδια ενέργεια. Άρα υπάρχει κάποιος τελεστής που μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας (την χαμιλτονιανή) και ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις. Αυτός είναι ο

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

που βέβαια μετατίθεται με την χαμιλτονιανή που στην περίπτωσή μας ($\mathbf{p} = 0$) είναι απλά βm (είναι και οι δύο διαγώνιοι). Οι δύο καταστάσεις έχουν ιδιοτιμές ± 1.

Γενικεύοντας $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα $\left[\frac{1}{2}\Sigma_x, \frac{1}{2}\Sigma_y\right] = i\frac{1}{2}\Sigma_z$ και $\left(\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}\right)^2 = \frac{3}{4}I$. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιότητες ενός κβαντομηχανικού τελεστή στροφορμής με $j = 1/2$. Επομένως, ο $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο spin $1/2$ κατάλληλος τελεστής για το σύστημα ηρεμίας. Ακριβώς, για το σύστημα ηρεμίας η εξίσωση Dirac περιγράφει ένα σωματίδιο με spin $1/2$. Περιμένουμε να μην αλλάζει το spin αν πάμε σε σύστημα με $\mathbf{p} \neq 0$. Αλλά τότε, ο τελεστής $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ δεν είναι πια κατάλληλος γιατί δεν μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας, που τώρα είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Βέβαια συνεχίζουμε να έχουμε 2 ανεξάρτητες καταστάσεις. Οπότε θα πρέπει να υπάρχει τελεστής που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Η επιλογή δεν είναι μοναδική αλλά μια χρήσιμη είναι ο τελεστής της ελικότητας

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$$

που πράγματι μετατίθεται με την $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \beta m$, $[H, \mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}] = 0$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ είναι ± 1 (δύο φορές). Ο $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ έχει ιδιοτιμές ± 1 και αν $U^T A U = A_{diag}$ τότε και

$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{diag} & 0 \\ 0 & A_{diag} \end{pmatrix}$$

Επομένως, ψάχνουμε να βρούμε την μορφή του ϕ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$$

ή $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi = \pm\phi$. Ας ονομάσουμε $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi_+ = \phi_+$ και $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi_- = -\phi_-$. Ας βρούμε τα ϕ_+ και ϕ_-. Παρατηρούμε ότι το $(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή $+1$ για αυθαίρετο ϕ

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}+1)\phi$$

Όμοια, το $(1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή -1. Επομένως, για τυχαίο $\hat{\mathbf{p}}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ και επιλέγοντας το αυθαίρετο $\phi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ έχουμε

$$\phi_+=(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\cos\varphi-i\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi & 1-\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\phi_+=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\ \sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

Βέβαια χρειάζεται να νορμαλίσουμε το ϕ_+. Εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά νομαλισμού είναι

$$N^2\left[(1+\cos\theta)^2+|\sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi|^2\right]=1\Rightarrow N=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

Επομένως, το νορμαλισμένο ϕ_+ γράφεται

$$\phi_+ = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

Για το ϕ_- βολεύει να επιλέξουμε για αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε εντελώς ανάλογα

$$\phi_- = (1 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_- = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ο νορμαλισμός είναι ο ίδιος και καταλήγουμε

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(-\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\phi_+^\dagger \phi_- = 0$. Τα ϕ_+ και ϕ_- είναι νορμαλισμένα και ορθογώνια. Επίσης για $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ή $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, 1)$, οπότε έχουμε $\theta = 0$ τα ϕ_+ και ϕ_- γίνονται

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός του spinor σε χωρικές στροφές

Ας θεωρήσουμε μια απλή στροφή γύρω από τον άξονα x, με γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ξεκινάμε με ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η ορμή είναι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Τότε τα $\phi_\pm$ είναι τα $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Η ορμή μετασχηματίζεται ως διάνυσμα στην στροφή

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

δηλαδή, $p'_x = p_x = 0$, $p'_y = p\sin\theta$ και $p'_z = p\cos\theta$. Στο νέο σύστημα, τα $\phi_\pm$ θα πρέπει να υπακούουν αντίστοιχες σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \phi'_+, \qquad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_- = -\phi'_-$$

δηλαδή, για το ϕ'_+ θα έχουμε ($\hat{\mathbf{p}}' = (0, \sin\theta, \cos\theta)$)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \phi'_+ = \phi'_+$$

Γράφοντας το $\phi'_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$a\cos\theta - ib\sin\theta = a \to b = ia\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} \end{pmatrix}$. Νορμαλίζοντας παίρνουμε $\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix}$. Αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\phi_+$$

όπου το $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ακριβώς ανάλογα έχουμε για το ϕ_-

$$\phi'_- = \begin{pmatrix} i\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\phi_-$$

όπου το $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παρατηρήστε ότι τα ϕ'_+ και ϕ'_- παραμένουν ορθογώνια. Δηλαδή έχουμε και εδώ μια ''στροφή'', μόνο που γωνία είναι $\theta/2$. Για να το γενικεύσουμε, παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
e^{i\sigma_x\theta/2} &= 1 + i\sigma_x\theta/2 + \frac{1}{2!}(i\sigma_x\theta/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\sigma_x\theta/2)^3 + \cdots \\
&= 1 + i\sigma_x\theta/2 - \frac{1}{2}(\theta/2)^2 - \frac{1}{3!}i\sigma_x(\theta/2)^3 + \cdots \\
&= \cos\theta/2 + i\sigma_x\sin\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Οπότε, αν η στροφή θ είναι γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$

$$
\phi' = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\theta/2}\phi
$$

Ο πίνακας $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\theta/2}\phi \equiv U$ είναι μοναδιακός ($U^\dagger U = UU^\dagger = 1$), οπότε το ''μήκος'' $\phi^\dagger\phi$ διατηρείται. Αυτός ο κανόνας, παρ' όλο που ξεκινήσαμε με ειδικά ϕ που είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, είναι γενικός για κάθε spinor.

Ο spinor του Dirac, με 4 συνιστώσες, γράφεται τώρα, για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις ϕ_+ και ϕ_-

$$\omega_+ = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_+ \end{pmatrix}, \qquad \omega_- = \begin{pmatrix} \phi_- \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_- \end{pmatrix}$$

Δηλαδή το πάνω και το κάτω τμήμα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο (το $\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$ είναι βαθμωτό). Άρα γενικεύουμε τον μετασχηματισμό για τον spinor του Dirac

$$\omega' = e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ και ισχύει για κάθε τετρα-spinor. Έτσι η πιθανότητα

$$\rho' = \psi^{\dagger\prime}\psi' = \omega^{\dagger\prime}\omega' = \omega^\dagger e^{-i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega = \omega^\dagger\omega$$

Οι αρνητικές λύσεις της εξίσωσης Dirac

Είχαμε ξεκινήσει από την εξίσωση του Dirac με τη μορφή

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}E\phi=m\phi+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi\\ E\chi=-m\chi+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi\end{cases}$$

Για $E>0$ γνωρίζουμε ήδη τον spinor $\omega=\begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s=1,2$.
Για να νορμαλίσουμε $\omega^\dagger\omega=2E$. Οπότε (τα ϕ^s είναι νορμαλισμένα)

$$N^2\left(1+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)^2}\right)=2E\rightarrow N^2\frac{(E+m)^2+p^2}{(E+m)^2}=2E$$

$$N=\sqrt{E+m}$$

και τότε $u(p,s)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s=1,2$ και
$\psi=e^{-ip\cdot x}u(p,s)$.

Για τις αρνητικές λύσεις, στο σύστημα ηρεμίας $\mathbf{p}=0$, θά έχουμε $E=-m$ οπότε

$$-m\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

οπότε $\phi=0$ και έχομε δύο ανεξάρτητες λύσεις
$\omega(E<0)=\begin{pmatrix}0\\ \chi^s\end{pmatrix}$.
Για $\mathbf{p}\neq 0$ θα έχουμε $E\phi=m\phi+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi\rightarrow\phi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi$, οπότε

$$\omega(E<0)=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix},\qquad s=1,2$$

Θυμίζουμε τα αντισωματίδια που πηγαίνουν αντίθετα στο χρόνο ($\mathbf{p}\rightarrow-\mathbf{p}$), οπότε ορίζουμε

$$\omega(E<0,-\mathbf{p},s)=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο νορμαλισμό $N = \sqrt{E+m}$ έχουμε

$$v(p,s) = \sqrt{|E|+m}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2$$

και $\psi = v(p,s)e^{-i(-p)\cdot x} = v(p,s)e^{ip\cdot x}$ με $p = (E, \mathbf{p})$. Η επιλογή είναι $\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ γιατί η απουσία ενός άνω spin ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια ισοδυναμεί με παρουσία ποζιτρονίου με κάτω spin με θετική ενέργεια.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή $1/2$. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση η ‘‘κάτω’’ συνιστώσα του 4-spinor είναι κατά (v/c) μικρότερη από την ‘‘άνω’’ συνιστώσα: $m + E \sim 2m \to (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})/(2m) \sim v$.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή 1/2. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ (Π)

Λύση

Να βρούμε την ποσότητα $[H, \mathbf{L}]$, όπου $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ και γνωρίζουμε ότι $[r_i, p_j] = i\delta_{ij}$. Οπότε

$$[H, \mathbf{L}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] + [\beta m, \mathbf{L}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{r} \times \mathbf{p}] = a_i[p_i, r_j p_k]\epsilon^{mjk}$$
$$= a_i[p_i, r_j]p_k\epsilon^{mjk} = -ia_i p_k \epsilon^{mjk}\delta_{ij} = -ia_i p_k \epsilon^{mik} = -i\mathbf{a} \times \mathbf{p}$$

Άρα, η στροφορμή δεν διατηρείται. Ας υπολογίσουμε τώρα το $[H, \mathbf{\Sigma}]$.

$$[H, \mathbf{\Sigma}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{\Sigma}] + [m\beta, \mathbf{\Sigma}] = [a_i, \Sigma_j]p_i + [\beta, \mathbf{\Sigma}]m =$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\right] p_i = \begin{pmatrix} 0 & 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i =$$
$$2i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i = 2i(\mathbf{a} \times \mathbf{p})$$

Επομένως, $[H, \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}] = 0$, δηλαδή, η συνολική διατηρήσιμη στροφορμή είναι $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}$.