Η Δομή των Αδρονίων

Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της δομής του στόχου. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή κατανομή του σκεδαζομένου "βλήμματος" (π.χ. ηλεκτρόνιου), μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή.
Η γενική ιδέα είναι η εύρεση του **παράγοντα μορφής** (form factor) $F(q)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} |F(q)|^2$$

με q η μεταφερόμενη ορμή μεταξύ του προσπίπτοντος "βλήμματος" e και του στόχου: $q = k_i - k_f$. Ξεκινάμε με τη σκέδαση e σε στόχο χωρίς spin, με φορτίο $Ze\rho(\mathbf{x})$ όπου

$$\int \rho(\mathbf{x})\, d^3x = 1$$

Για στατικό στόχο έχουμε

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

ενώ

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Ας δούμε πώς φτάνουμε σ΄ αυτό. Για στατικό φορτίο με τιμή Ze θα έχουμε $A^\mu = (V, 0)$ με

$$\nabla^2 V(x) = -Ze\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{για σημειακό φορτίο}$$

$$\nabla^2 V(x) = -Ze\rho(\mathbf{x}) \quad \text{για φορτίο με πυκνότητα } \rho$$

Οπότε, για το σημειακό φορτίο

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\nabla^2 V(x)\,d^3x = -\int Ze\delta^3(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\,d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,d^3x = -Ze$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})\,d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα οδηγηθήκαμε με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη (και μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που προκύπτει κάθε φορά). Για το φορτίο με πυκνότητα ρ έχουμε αντίστοιχα

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\nabla^2 V(x)\, d^3x = -\int Ze\rho(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = -ZeF(\mathbf{q})$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\, d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}F(\mathbf{q})$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -ie\int d^4x\, \bar{\Psi}_f\gamma^\mu\Psi_i A_\mu = -ie\int d^4x\, \bar{u}(k_f)\gamma^\mu u(k_i)e^{-i(k_i-k_f)x}A_\mu$$

Για $A_\mu = (V(\mathbf{x}), 0)$ θα έχουμε

$$T_{fi} = -ie\left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot \mathbf{x}}\, V(\mathbf{x})$$

$$= -ie\left(\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right)\, 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q})$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ και $F(\mathbf{q}) = 1$ για σημειακό φορτίο. Για να πάμε στην διαφορική ενεργό διατομής, παίρνουμε

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} =$$

$$= (e^4 Z^2) \left[\frac{1}{2} \left|\bar{u}_f \gamma^0 u_i\right|^2\right] \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(2\pi\delta)^2 = T 2\pi\delta$ και η αγκύλη υπονοεί άθροισμα στα spin.

Για στατικό πεδίο, η ενέργεια του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει ($\delta(E_i - E_f)$), οπότε και $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ και $E^2 = k^2 + m^2 \to EdE = kdk$. Έτσι, $d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = k_f E_f dE_f d\Omega$. Το $d\sigma$ γράφεται

$$d\sigma = Z^2 e^4 \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}\right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f)\frac{k_f E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f}\frac{1}{2E_i}\frac{1}{v}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right]$$

$$= \frac{Z^2\alpha^2}{4(\mathbf{q}^2)^2}\left[\frac{1}{2}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2\right]\left[F(\mathbf{q}^2)\right]^2 d\Omega$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $k_f/E_f = v$. Ας υπολογίσουμε τώρα την αγκύλη ($E_i = E_f = E$ και $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$)

$$\frac{1}{2}\sum_{s_f,s_i}\left|\bar{u}_f\gamma^0 u_i\right|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[(\not{k}_i + m)\gamma_0(\not{k}_f + m)\gamma_0\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\left[\not{k}_i\gamma_0\not{k}_f\gamma_0\right] + m^2\mathrm{Tr}\left[\gamma_0^2\right]\right) \\
&= 2\left(2E_iE_f - k_ik_f + m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2 - (E^2 - k^2\cos\theta) + m^2\right) \\
&= 2\left(2E^2 - (E^2 - k^2\cos\theta) + E^2 - k^2\right) \\
&= 4E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

με $v = k/E$ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Οπότε,

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}}E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left[F(\mathbf{q})\right]^2 \tag{23}
$$

με $\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Για σημειακό στόχο, όπως είπαμε, $F(\mathbf{q}) = 1$. Οπότε, πράγματι,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{σημειακός στόχος}} \left[F(\mathbf{q})\right]^2$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.23 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4k^4\sin^4\frac{\theta}{2}}E^2\left[F(\mathbf{q})\right]^2$$

Οπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \to 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το ‘‘ηλεκτρόνιο’’ με spin=0;
