Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+ = \frac{\not p + m}{2m}, \quad \Lambda_- = \frac{-\not p + m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$ και $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$.

Διγραμμικές αναλλοίωτες ποσότητες

Είναι χρήσιμο να βρούμε όρους της μορφής $\bar\psi \Gamma \psi$, όπου Γ γινόμενο γ πινάκων, με καθορισμένους κανόνες μετασχηματισμού κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να φτιάξουμε αναλλοίωτες ποσότητες. Ορίζουμε $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

χρησιμοποιώντας την αντιμετάθεση των γ πινάκων. Επίσης αποδεικνύεται ότι $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$. Στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, ο γ^5 γράφεται

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Όλες οι δυνατές (ανεξάρτητες) διγραμμικές ποσότητες είναι οι ακόλουθες (όπου $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$)

		Αρ. συνιστ.	Χωρ. αναστρ.
$\bar{\psi}\psi$	Βαθμωτό	1	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Διάνυσμα	4	Χωρικές $-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Τανυστής	6	
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	‘Αξονικό’ διάνυσμα	4	Χωρικές $+$
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Ψευδοβαθμωτό	1	$-$

Θα πρέπει να δούμε πώς μετασχηματίζεται το ψ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac. Δηλαδή, η $\psi'(x')$ να υπακούει την εξίσωση

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

με $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το S τέτοιο ώστε $\psi'(x') = S\psi(x)$. Υπενθυμίζοντας ότι $\psi = e^{-ipx}u(p)$, περιμένουμε το S να είναι ανεξάρτητο από το x. Γνωρίζοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

έχουμε

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right) S^{-1}\psi'(x') = \left(Si\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

Άρα, η απαίτηση είναι

$$S\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} = \gamma^\nu \rightarrow \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu = S^{-1}\gamma^\nu S$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L\gamma^5$$

Για χωρική αντιστροφή, όπου ο πίνακας $\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, η βασική απαίτηση που θα πρέπει να πληροί ο S είναι $S_P^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0$ και $S_P^{-1}\gamma^k S_P = -\gamma^k,\ k = 1,2,3.$ Αυτές οι σχέσεις πληρούνται με $S_P = \gamma^0$. Οπότε, στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, όπου $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, οι τέσσερεις συνιστώσες του ψ μετασχηματίζονται, για χωρική αντιστροφή, ως

$$\psi'_{1,2} = \psi_{1,2}, \quad \psi'_{3,4} = -\psi_{3,4}$$

Δηλαδή, στο σύστημα ηρεμίας, οι θετικής και οι αρνητικής ενέργειας καταστάσεις (δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο) έχουν αντίθετη εσωτερική ομοτιμία.
Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς των διγραμμικών ποσοτήτων. Ας δούμε πρώτα πώς μετασχηματίζεται το $\bar{\psi}$ στον μετασχηματισμό $\psi'(x') = S\psi(x)$

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\gamma^0 = (S\psi)^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}\gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi}S^{-1}$$

Οπότε, σε μετασχηματισμό Lorentz,

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \bar{\psi}S_L^{-1}\gamma^{\mu}S_L\psi = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα. Για χωρική αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi = E\chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi = E\phi \end{cases}$$

Για κάθε εξίσωση ισχύει $E^2 = p^2 \rightarrow E = \pm p$.
Ας δούμε την πρώτη εξίσωση $-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi = E\chi$. Για $E > 0$ έχουμε

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi(\mathbf{p}) = E\chi \rightarrow -\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E}\chi(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}) \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}) = -\chi(\mathbf{p})$$

Άρα, το χ έχει αρνητική ελικότητα. Η ίδια πρώτη εξίσωση, για

$E < 0$ (ως συνήθως μιλάμε για $-E$ και $-\mathbf{p}$), γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{p})\chi(-\mathbf{p}) = -E\chi \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\hat{\mathbf{p}})\chi(-\mathbf{p}) = \chi(-\mathbf{p})$$

Επομένως το $\chi(-\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα.
Ακριβώς τα αντίθετα συμβαίνουν για την δεύτερη εξίσωση. Το ϕ για $E > 0$ έχει θετική ελικότητα, ενώ για $E < 0$ έχει αρνητική ελικότητα.
Στην αναπαράσταση Weyl, ο $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-I, I)$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι τελεστές P_L και P_R είναι προβολικοί: $P_L + P_R = 1$, $P_L P_R = 0$ και $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.

Αν ψ είναι ένας γενικός spinor, τότε το $P_L\psi$ ονομάζεται αριστερή συνιστώσα και το $P_R\psi$ δεξιά συνιστώσα του ψ. Πάντοτε μπορούμε να γράφουμε $\psi = P_L\psi + P_R\psi$.
Βλέπουμε ότι

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Οπότε ένας spinor με μηδενικές τις δύο κάτω συνιστώσες είναι ιδιοκατάσταση του P_L, δηλαδή είναι αριστερόστροφο

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔΗΛΑΔΗ: το $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ με $E > 0$, έχει αρνητική ελικότητα και είναι αριστερόστροφο. Το ίδιο με $E < 0$ είχαμε δει ότι έχει θετική ελικότητα και

$$P_L \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

αλλά λόγω του $-\mathbf{p}$ είναι δεξιόστροφο. Τα αντίθετα ισχύουν για το spinor με μηδενικές τις δύο πάνω συνιστώσες.

Συνοψίζουμε (για $m = 0$)

$\begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο αντινετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο αντινετρίνο)

Το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$\frac{1}{2}\,\bar{\psi}_e \left[\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5\right] \psi_{\nu_e} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$$

Αλλά, για άμαζο νετρίνο, η ποσότητα $\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\nu_e}$ αντιστοιχεί στο αριστερόστροφο νετρίνο (ή δεξιόστροφο αντινετρίνο). Στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν εμφανίζεται δεξιόστροφο νετρίνο (ή αριστερόστροφο αντινετρίνο).

Για $m \neq 0$, το $u_L = P_L u$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας.

Χρησιμοποιώντας την Dirac-Pauli αναπαράσταση θα έχουμε

$$P_L u(p) = \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της ελικότητας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι το u_L δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Αν όμως $m = 0$, και τότε $p = E$, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι για $m = 0$ η δράση του γ^5 και του τελεστή της ελικότητας ταυτίζονται

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Majorana spinors

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο, που περιγράφεται από την ψ_M, συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Δηλαδή, $\psi_M^C = \psi_M$. Βέβαια, ένα τέτοιο σωματίδιο θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά αφόρτιστο. Ας δούμε ποιες σχέσεις πληρούν οι συνιστώσες του. Γνωρίζουμε ότι

$$\psi_M^C = C\gamma^0\psi_M^* = i\gamma^2\psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi_M^*$$

Γράφοντας το ψ_M με δυο συνιστώσες ϕ και χ έχουμε

$$\psi_M^C = \psi_M \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

ή με άλλα λόγια

$$i\sigma_2\,\chi^* = \phi$$

Η άλλη σχέση, $-i\sigma_2\,\phi^* = \chi$ είναι ισοδύναμη μιας και $\sigma_2^* = -\sigma_2$ καθώς και $(\sigma_2)^2 = 1$. Οπότε, το ψ_M γράφεται

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \phi \\ -i\sigma_2\,\phi^* \end{pmatrix}, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \psi_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2\,\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι αν το ϕ έχει αρνητική ελικότητα, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi = -\phi$, τότε το $-i\sigma_2\, \phi^*$ έχει θετική ελικότητα.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}(-i\sigma_2\, \phi^*) &= -i(\sigma_1\sigma_2\hat{p_1} + \sigma_2\sigma_2\hat{p_2} + \sigma_3\sigma_2\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1\hat{p_1} + \sigma_2\sigma_2\hat{p_2} - \sigma_2\sigma_3\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1^*\hat{p_1} - \sigma_2\sigma_2^*\hat{p_2} - \sigma_2\sigma_3^*\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i\sigma_2(-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi)^* = -i\sigma_2\, \phi^*
\end{aligned}$$

Επομένως ο ψ_M (Majorana spinor), μπορεί να περιγράφει με την πάνω συνιστώσα ϕ ένα αριστερόστροφο νετρίνο και με την κάτω συνιστώσα $-i\sigma_2\, \phi^*$ ένα δεξιόστροφο αντινετρίνο.