

Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης  
Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές  
ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

# ΣΤΟΙΧΕΙΑΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

Νίκος Τρόκας

Καθηγητής ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ

Σημειώσεις από το βιβλίο: Quarks and Leptons, F. Halzen and A.D. Martin  
καθώς και από τα:

Gauge Theories in Particle Physics, I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hay

Relativistic Quantum Mechanics, J.D. Bjorken and S.D. Drell

Introduction to Elementary Particles, D. Griffiths

Field Theory, A Modern Primer, P. Ramond

Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Σ. Τραχανάς

Σωματιδιακή Φυσική. Μια εισαγωγή στη Βασική Δομή της Ύλης, Κ. Ε. Βαγιωνάκης

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Αντισωματίδια
- Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων χωρίς spin
- Η εξίσωση Dirac
- Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων με spin=1/2
- Η δομή των αδρονίων
- Θεωρίες βαθμίδας
- Ασθενείς αλληλεπιδράσεις
- Δύσεις των ασκήσεων
- Παράρτημα

## ΑΝΤΙΣΣΩΜΑΤΙΔΙΑ

Οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις, π.χ.

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-, \quad eq \rightarrow eq, \quad \gamma q \rightarrow e^+ e^- q$$

αποτελούν συστήματα πολλών σωματιδίων και από τα πειράματα που έχουμε στη διάθεσή μας βρίσκόμεστε στην περιοχή της σχετικιστικής κινηματικής. Επί πλέον εμφανίζονται και αντισωματίδια που δεν απαιτούνται στην μη σχετικιστική θεωρία.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών θα χρησιμοποιούμε τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν ελεύθερο σωματίδιο (IN και OUT καταστάσεις) και την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων θα τη θεωρούμε ως διαταραχή σε περιορισμένο χώρο και χρόνο.

Χρησιμοποιούμε σχετικιστικό φορμαλισμό της θεωρίας διαταραχών. Σημαντικό ρόλο παίζουν τα “διαγράμματα Feynman”. Με τη χρήση των “κανόνων Feynman” μπορούμε να υπολογίσουμε φυσικές ποσότητες (ενεργές διατομές, ρυθμούς μετάβασης κ.λπ.) χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στη θεωρία πεδίου. Βέβαια, οι κανόνες αυτοί καθορίζονται από τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τη θεωρία πεδίου.

Αρχικά θα αγνοήσουμε το spin των σωματιδίων, που κάπως περιπλέκει την εικόνα, και θα ασχοληθούμε με ‘ηλεκτρόνια’ χωρίς spin.

## Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Με τις αντικαταστάσεις

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

η κλασική σχέση  $E = \frac{p^2}{2m}$  γίνεται ( $\hbar = 1$ )

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi = 0$$

όπου  $\rho = |\Psi|^2$  είναι η πυκνότητα πιθανότητας ( $|\Psi|^2 d^3x$  δίνει την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο  $d^3x$ ). Αυτή είναι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο μάζας  $m$ .

Ανάλογα με την διατήρηση φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό, η διατήρηση της πιθανότητας μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{διαφορική μορφή}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv + \oint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{ολοκληρωτική μορφή}$$

όπου  $\mathbf{j}$  είναι η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Ας βρούμε τη μορφή του. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Schrödinger με  $-i\Psi^*$  και την συζυγή της με  $i\Psi$  και αθροίζουμε

$$\begin{aligned} & -i\Psi^* \left( i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi \right) + i\Psi \left( -i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi^* \right) = 0 \\ & \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{i}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{i}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underbrace{\left[ -\frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right]}_j = 0$$

Η λύση της εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο

$\Psi = N \exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)]$  δίνει  $\rho = |N|^2$  και

$$j = \frac{-i|N|^2}{2m} (\nabla (i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) - \nabla (-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})) = \frac{|N|^2}{2m} 2\mathbf{p} = \frac{|N|^2}{m} \mathbf{p}$$

## Τετραδιανύσματα και αναλλοίωτα Lorentz

---

**Άσκηση 1** Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία  $i\theta$  στον χώρο  $(ict, x)$

Ό,τι μετασχηματίζεται όπως το  $(ct, \mathbf{x})$  καλείται τετραδιάνυσμα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

Επίσης, το  $E/c$  και  $\mathbf{p}$  συγκροτούν τετραδιάνυσμα

$$(E/c, \mathbf{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) \text{ και } B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$



Ορίζοντας το  $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$  μπορούμε να γράψουμε το βαθμωτό γινόμενο ως (επιαναλαμβανόμενος δείκτης άνω και κάτω αθροίζεται)

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζουμε τον (μετρικό) τανυστή  $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad \text{οι άλλοι όροι μηδενικοί}$$

Ο αντίστροφός του  $g^{\mu\nu}$  (δηλαδή  $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \delta_{\mu'}^\mu$ ) εύκολα φαίνεται ότι έχει τους ίδιους όρους. Το γινόμενο των δύο τετραδιαυσιμάτων μπορεί να γραφεί

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Με το  $g_{\mu\nu}$  και το  $g^{\mu\nu}$  μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες ενός τετραδιανύσματος

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Το διάνυσμα με άνω δείκτη ονομάζεται ανταλλοίωτο (contravariant), ενώ με κάτω δείκτη συναλλοίωτο (covariant).

Για να σχηματιστεί ένα αναλλοίωτο, ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, μέγεθος θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει ο αντίστοιχος κάτω. Επίσης, μια σχέση είναι Lorentz συναλλοίωτη όταν οι μη επαναλαμβανόμενοι (άνω και κάτω) δείκτες στις δυο πλευρές της ισότητας αντιστοιχίζονται ένας προς έναν.

---

**Άσκηση 2** Δείξτε ότι  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$

---

Παραδείγματα βαθμωτών γινομένων είναι

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \quad p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$$

---

**Άσκηση 3** Δύο σωματίδια με ίση μάζα  $M$  συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι  $E_{cm}$ . Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια  $E_{lab}$  του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση (υπολογίστε το  $s$  στο σύστημα εργαστηρίου)

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

---

Προσοχή στο τετραδιάνυσμα

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \partial^\mu \text{ και } \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \partial_\mu$$

Μπορείτε να δείξετε ότι το πρώτο μετασχηματίζεται όπως το  $(t, \mathbf{x})$  ενώ το δεύτερο όπως το  $(t, -\mathbf{x})$ .

Η αντικατάσταση της ενέργειας και της ορμής με τους αντίστοιχους τελεστές γενικεύεται

$$p^\mu \longrightarrow i\partial^\mu$$

Τέλος, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

## Η εξίσωση Klein-Gordon

Χρησιμοποιώντας της σχετικιστική εξίσωση  $E^2 = p^2 + m^2$  και τις αντικαταστάσεις  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  και  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ , οδηγούμεθα στην ( $\hbar = 1$ )

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi = \left( (-i \nabla)^2 + m^2 \right) \phi$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

που αποτελεί την εξίσωση Klein-Gordon.

Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και να αναγνωρίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας και την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein-Gordon επί  $-i\phi^*$  και την συζυγή της επί  $i\phi$  και

προσθέτουμε

$$\begin{aligned} & -i\phi^* \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi \right) + i\phi \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* + \nabla^2 \phi^* \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) \right] + \nabla \cdot [-i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0 \end{aligned}$$

οπότε αναγνωρίζουμε

$$\rho = i \left( \phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) \quad \text{και} \quad \mathbf{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$$

Αν πάρουμε για  $\phi$  τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon που αντιστοιχεί σε ελεύθερο σωματίδιο  $\phi = N e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$   $= N e^{-ix^\mu p_\mu}$ , τότε

$$\rho = i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \quad \text{και} \quad \mathbf{j} = -i(2i\mathbf{p})|N|^2 = 2\mathbf{p}|N|^2$$

Η Klein-Gordon μπορεί να γραφεί με τετραδιανύσματα

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - (-i \nabla)^2 \right] \phi = m^2 \phi \rightarrow - \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi = m^2 \phi$$
$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi = m^2 \phi \rightarrow (\square^2 + m^2) \phi = 0$$

και

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}) = 2(E, \mathbf{p}) |N|^2 = 2p^\mu |N|^2$$

Προσέξτε ότι η  $\rho$  δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, αφού είναι ανάλογη με την ενέργεια, αλλά το  $\rho d^3x$  είναι αναλλοίωτο.

Τις ιδιοτιμές ενέργειας της Klein-Gordon τις παίρνουμε αντικαθιστώντας τη λύση  $\phi = N e^{-ix^\mu p_\mu}$  στην εξίσωση και παίρνουμε

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Με αρνητικές ενέργειες μπορούμε να έχουμε μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλότερες ενέργειες και επιπλέον η πιθανότητα  $\rho$  μπορεί να γίνει αρνητική. Δεν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες γιατί πρέπει να έχουμε πάντοτε το πλήρες σύνολο των καταστάσεων.

### Ιστορική αναδρομή

“Εξήγηση” του Dirac για τις αρνητικές ενέργειες της εξίσωσής του.

“Εξήγηση” των Pauli και Weisskopf για τις αρνητικές ενέργειες της Klein-Gordon. Μετέτρεψαν το  $j^\mu$  σε πυκνότητα ρεύματος γλεκτρικού φορτίου  $j^\mu = -ie \left( \phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right)$ .



## Η περιγραφή των λύσεων με $E < 0$ από τους Feynman-Stückelberg

Η βασική ιδέα είναι ότι η κατάσταση με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ περιγράφει σωματίδιο που “διαδίδεται” πίσω στο χρόνο, ή ΑΝΤΙΣΣΩΜΑΤΙΔΙΟ που διαδίδεται κανονικά με τον χρόνο.

Ας ξεχάσουμε τη “δυσκολία” του στην και ας θεωρήσουμε ότι η ΚΓ περιγράφει ηλεκτρόνια με φορτίο  $-e$ . Οπότε, το τετραδύνασμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος γίνεται

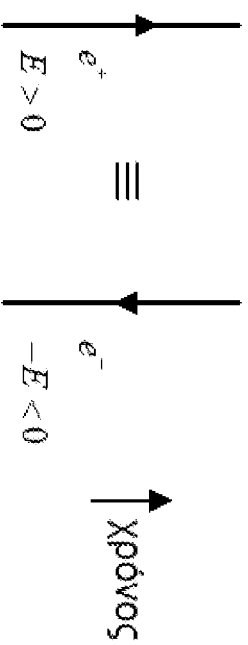
$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \mathbf{p})$$

Για το αντισωματίδιο, με φορτίο  $+e$  θα γράφαμε

$$j^\mu(e^+) = +2e|N|^2(E, \mathbf{p}) = -2e|N|^2(-E, -\mathbf{p})$$

Αυτό περιγράφει σωματίδιο φορτίου  $-e$  με ενέργεια  $-E$  και ορμή

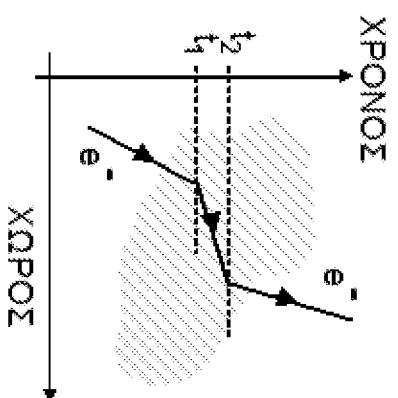
–p. Δηλαδή



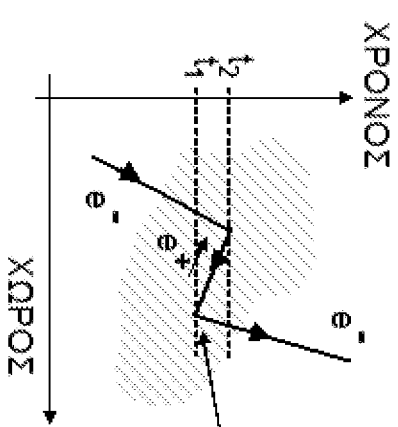
Προσέξτε ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Γι' αυτό ακριβώς μπορούμε να περιγράψουμε αρνητικής ενέργειας σωματίδια που πηγαίνουν “πίσω” στο χρόνο ως θετικής ενέργειας αντισωματίδια που πηγαίνουν “μπροστά” στον χρόνο.



ΑΛΛΑ  
ΚΑΙ



Διπλή σκέδαση ηλεκτρονίου από πεδίο. Στο δεύτερο διάγραμμα, μεταξύ των  $t_1$  και  $t_2$ , η κατάσταση περιγράφει 3 σωματίδια! Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του  $e^-$ . Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του  $e^+$ .

