δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα.

Άσκηση 34 Δείξτε ότι στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$$

Διανύσματα πόλωσης για spin=1 και M $\neq$ 0

Στο σύστημα ηρεμίας έχουμε 3 δυνατές καταστάσεις για spin=1.

Για παράδειγμα, μπορούν να περιγραφούν από τα τρία διανύσματα $\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$ και $\boldsymbol{\epsilon}_3 = (0,0,1)$, και βέβαια ισχύει $\boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j = \delta_{ij}$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda=1} = -\sqrt{1/2}(1,i,0) = -\sqrt{1/2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda=0} = (0,0,1) = \boldsymbol{\epsilon}_3$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda=-1} = \sqrt{1/2}(1,-i,0) = \sqrt{1/2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

με $\boldsymbol{\epsilon}^*_\lambda \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$. Ας φτιάξουμε τώρα τετραδιανύσματα. Στο σύστημα ηρεμίας μπορώ να διαλέξω $\epsilon^\mu_\lambda = (0, \boldsymbol{\epsilon}_\lambda)$. Σ' αυτό το σύστημα βέβαια, η ορμή είναι $p^\mu = (M,0,0,0)$ και ισχύει $p_\mu \epsilon^\mu = 0$. Η τελευταία είναι μια αναλλοίωτη συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Τώρα θα πρέπει να βρούμε το αντίστοιχο διάνυσμα πόλωσης όταν πάμε από

$(M,0,0,0) \to (E,0,0,p)$. Η ταχύτητα του νέου συστήματος είναι $(0,0,-p/E)$ και το διάνυσμα πόλωσης $(0,\boldsymbol{\epsilon}_{\lambda=0})$ γίνεται

$$0 \to \frac{0-(-v)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p/E}{\sqrt{1-p^2/E^2}} = \frac{p}{M}$$

$$1 \to \frac{1-(-v)0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E}{M}$$

Άρα, $\epsilon^{\mu}_{\lambda=0} = (0,0,0,1) \to \frac{1}{M}(p,0,0,E)$ και βέβαια ισχύει $(E,0,0,p) \cdot \frac{1}{M}(p,0,0E) = 0$. Τα διανύσματα για $\lambda = \pm 1$ δεν αλλάζουν μιας και το σύστημα μας κινείται στον άξονα των z.

Την σχέση $p^{\mu}\epsilon_{\mu} = 0$ μπορούμε να τη δούμε και από άλλη πλευρά. Γενικεύοντας την εξίσωση για το φωτόνιο, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\Box^2 A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \rightarrow \left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0$$

και εισάγοντας μάζα M

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = 0 \qquad (20)$$

Παραγωγίζοντας ως προς ∂^μ

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + M^2\right) - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\ \left[\partial_\nu\left(\Box^2 + M^2\right) - \Box^2\partial_\nu\right] A^\nu &= 0 \\ \partial_\nu A^\nu &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνθήκη Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, για τα φωτόνια $(M = 0)$, είναι ταυτότητα για $M \neq 0$. Και βέβαια η σχέση $p^\mu \epsilon_\mu = 0$ έπεται άμεσα ($A^\mu = \epsilon^\mu e^{-ip\cdot x}$).

Άσκηση 35 Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας για τα spin=1 με μάζα

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)^*_\mu (\epsilon_\lambda)_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \tag{21}$$

Ο διαδότης του ηλεκτρονίου

Από την μη σχετικιστική θεωρία είχαμε δει

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left[< f|V|i > + \sum_{n \neq i} < f|V|n > \frac{1}{E_i - E_n} < n|V|i > + ... \right]$$

όπου $H_0|n >= E_n|n >$. Φορμαλιστικά μπορούμε να γράψουμε

$$T_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i) < f|(-iV) + (-iV)\frac{i}{E_i - H_0}(-iV) + ...|i >$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\sum_{n \neq i} |n >< n| = 1$. Η επιλογή του $-iV$, αντί του V, γίνεται από την παρουσία του V στην εξίσωση του Schroedinger, $i\partial\Psi/dt = V\Psi$, που δίνει και την χρονική εξάρτηση $\exp(-iVt)$ στην "εικόνα αλληλεπίδρασης" (interaction picture). Οπότε, αντιστοιχούμε **κορυφή**$\rightarrow (-iV)$ και **διαδότης**$\rightarrow \frac{i}{E_i - H_0}$.
Αν γράψουμε την εξίσωση Schrödinger

$$(H_0 + V)\Psi = E\Psi \rightarrow (H_0 - E)\Psi = -V\Psi \rightarrow i(H_0 - E)\Psi = -iV\Psi$$

βλέπουμε ότι ο διαδότης "είναι" το αντίστροφο του τελεστή στο αριστερό σκέλος της τελευταίας ισότητας

$$\frac{1}{i(H_0 - E)} = \frac{i}{E - H_0}$$

Ο διαδότης του βαθμωτού σωματιδίου

Στο βαθμωτό πεδίο, η Klein-Gordon γράφεται

$$(\Box^2 + m^2)\phi = -V\phi \rightarrow i(\Box^2 + m^2)\phi = -iV\phi$$

και, με τον παραπάνω κανόνα, ο διαδότης τους βαθμωτού πεδίου είναι

$$\frac{1}{i(\Box^2 + m^2)} = \frac{-i}{-p^2 + m^2} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Ο διαδότης του σωματιδίου Dirac

Για το ηλεκτρόνιο θα έχουμε ανάλογα

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0 V\psi \rightarrow -i(\not{p} - m)\psi = -i\gamma^0 V\psi$$

όπου $\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu$. Και ο διαδότης του ηλεκτρονίου είναι

$$\frac{1}{-i(\not{p} - m)} = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

Θυμηθείτε ότι $\not{p} + m = \sum u^{(s)}\bar{u}^{(s)}$. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας που θα τον δούμε ξανά στο διαδότη του φωτονίου.

Ο διαδότης του φωτονίου

Η εξίσωση που πληρεί το φωτόνιο είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu \tag{22}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι έχουμε μια ελευθερία επιλογής του πεδίο:

$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$. Αν δεν "αφαιρέσουμε" αυτήν την ελευθερία δεν θα καταφέρουμε να βρούμε τον αντίστροφο του τελεστή.

Άσκηση 36 Δείξτε ότι δεν μπορείτε να ορίσετε τον αντίστροφο του $g_{\mu\nu}\Box^2 - \partial_\mu\partial_\nu$

Μόλις όμως επιλέξουμε την βαθμίδα Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, η εξίσωση γίνεται $g^{\mu\nu}\Box^2 A_\nu = j^\mu$, και μιας και $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, βλέπουμε άμεσα ότι το αντίστροφο του $-ig_{\mu\nu}\Box^2$ είναι

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{-q^2} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Αυτός είναι ο διαδότης του Feynman (ή στη βαθμίδα Feynman).

Άσκηση 37 Η συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ αφήνει ακόμα μια ελευθερία επιλογής του A^μ: $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ όπου $\Box^2\Lambda = 0$.

Οπότε, η Εξ.(22) μπορεί να γραφεί

$$\left[g_{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right] A^\nu = j^\mu$$

και τότε ο αντίστροφος του τελεστή είναι

$$\frac{i}{q^2}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]$$

Για $\xi = 1$ πηγαίνουμε στον διαδότη Feynman. Στην QED ο δεύτερος όρος μηδενίζεται στους υπολογισμούς μιας και το δυνητικό φωτόνιο αλληλεπιδρά με διατηρούμενο ρεύμα j^μ για το οποίο ισχύει $q_\mu j^\mu = 0$.

Ο διαδότης διανυσματικού, spin=1, με μάζα

Όπως είχαμε αναφέρει, Εξ.(20), η εξίσωση που πληροί ένα ελεύθερο διανυσματικό σωματίδιο με μάζα είναι

$$\left[g_{\mu\nu}\left(\Box^2 + m^2\right) - \partial_\mu \partial_\nu\right] A^\nu = 0$$

Το αντίστροφο του τελεστή (επι i) είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2 - M^2}$$

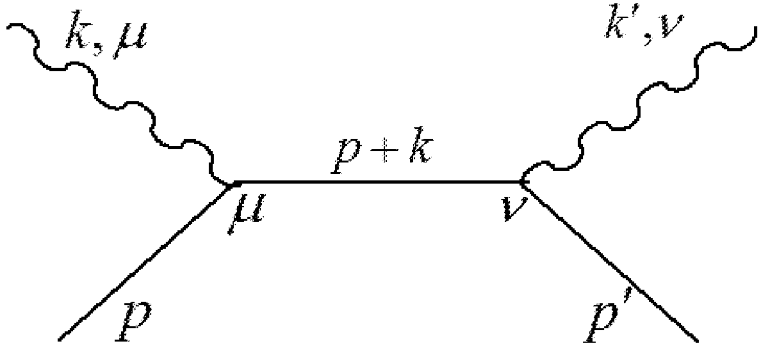
οπότε αυτός είναι και ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα. προσέξτε ότι ο αριθμητής είναι η σχέση πληρότητας Εξ.(27)

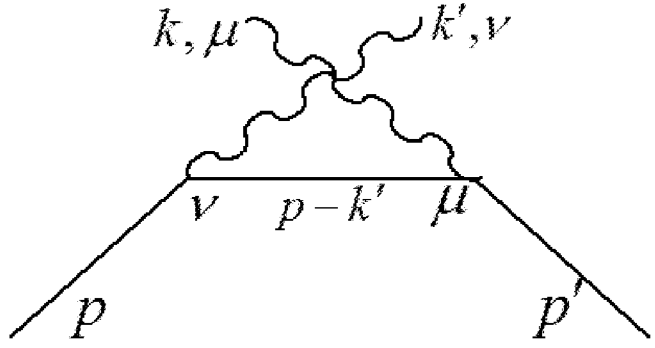
Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right)}{p^2-M^2}$$

Σκέδαση Compton $\gamma e^- \to \gamma e^-$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά το αναλοίωτο πλάτος για την σκέδαση Compton. Ας προσπαθήσουμε να δούμε κάθε όρο του πλάτους αυτού. Για το εισερχόμενο φωτόνιο θα υπάρχει ο όρος: $\epsilon_\mu e^{-ikx}$ και για το εξερχόμενο: $\epsilon'^*_\nu e^{+ik'x}$, για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα και για το δεύτερο.





Για το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο: $e^{-ipx}u^{(s)}(p)$ και το εξερχόμενο: $e^{+ip'x}\bar{u}^{(s')}(p')$. Στο ενδιάμεσο ηλεκτρόνιο θα αντιστοιχήσουμε τον διαδότη: $i(\not{p}+\not{k}+m)/((p+k)^2-m^2)$ για το πρώτο διάγραμμα και ανάλογα για το άλλο. Οι δύο κορυφές θα είναι: $ie\gamma^\mu$ και $ie\gamma^\nu$. Όλα τα εκθετικά θα δώσουν την δέλτα συνάρτηση για την διατήρηση της ορμής-ενέργειας. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος για κάθε διάγραμμα θα είναι

$$-i\mathcal{M}_1 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(ie\gamma^\mu)u^{(s)}(p)\right]\epsilon_\mu\epsilon'^*_\nu$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}(ie\gamma^\nu)u^{(s)}(p)\right]\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu$$

Ποσέξτε ότι, όπως περιμέναμε, το άθροισμα $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ είναι αναλλοίωτο στην αλλαγή $(k, \epsilon) \to (-k', \epsilon'^*)$. Ας δούμε πώς εμφανίζεται εδώ η αναλλοιώτητα βαθμίδας. Απαιτώντας την συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, γνωρίζουμε ότι η φυσική δεν αλλάζει με τον μετασχηματισμό $\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + ak_\mu$. Γράφοντας, λοιπόν, $\mathcal{M} = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu T^{\mu\nu}$ θα πρέπει

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu T^{\mu\nu} = (\epsilon_\mu + ak_\mu)(\epsilon'^*_\nu + ak'_\nu)T^{\mu\nu}$$

οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Άσκηση 39 Δείξτε ότι το πράγματι ισχύει η σχέση

$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.

Χρησιμοποιώντας ότι $(p+k)^2 = s$ και $(p-k')^2 = u$ και αγνοώντας την μάζα του ηλεκτρονίου, τα δύο πλάτη γίνονται

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu u^{(s)}(p)$$
$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{u}\,\epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu\, e^2\, \bar{u}^{(s')}(p')\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}')\gamma^\nu u^{(s)}(p)$$

θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\overline{|\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2|^2}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{1}{s^2}\, e^4\, Tr\left[\not{p}\gamma^{\mu'}(\not{p}+\not{k})\gamma^{\nu'}\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu\right]\epsilon_\mu\epsilon'^*_\nu\epsilon^*_{\mu'}\epsilon'_{\nu'}$$

Για τα φωτόνια έχουμε: $\epsilon_\mu\epsilon^*_{\mu'} = -g_{\mu\mu'}$ και $\epsilon'^*_\nu\epsilon'_{\nu'} = -g_{\nu\nu'}$ (βλ. το

Παράρτημα) και το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\,[\not{p}\gamma_\mu(\not{p}+\not{k})\gamma_\nu\not{p}'\gamma^\nu(\not{p}+\not{k})\gamma^\mu] \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2}\,e^4\,(-2)(-2)Tr\,[\not{p}(\not{p}+\not{k})\not{p}'(\not{p}+\not{k})] \\
&= \frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\,[\not{p}\not{k}\not{p}'(\not{p}+\not{k})] \\
&= \frac{1}{s^2}\,e^4\,Tr\,[\not{k}\not{p}'\not{k}\not{p}] = \frac{1}{s^2}\,e^4\,4\,[(kp')(kp)+(kp)(kp')] = \\
&= \frac{4e^4}{s^2}\,2\frac{s(-u)}{4} = -2e^4\frac{u}{s}
\end{aligned}
$$

όπου στην τρίτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$\not{p}^2 = p^2 = 0$. Όμοια, το άλλο διάγραμμα δίνει

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = -2e^4 \frac{s}{u}$$

Άσκηση 40 Δείξτε ότι $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = 0$

Επομένως,

$$\overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right)$$

Άσκηση 41 Αν το φωτόνιο είναι δυνητικό, οπότε $k^2 = -Q^2 \neq 0$, δείξτε ότι $\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2Q^2 t}{su} \right)$

Σκέδαση Compton βαθμωτού ‘‘ηλεκτρονίου’’ Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού “ηλεκτρονίου”, χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής “ηλεκτρόνιο”-“ηλεκτρόνιο” -φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχ.