$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W\left(j_\mu^{(em)} - j_\mu^{(3)}\right)\right]Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W j_\mu^{(em)}\right]Z^\mu =$$

Ο μηχανισμός Higgs

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs ώστε τα $W^\pm$ και Z να αποκτήσουν μάζα, ενώ το φωτόνιο να παραμείνει άμαζο. Εισάγουμε μια διπλέτα ϕ με $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Βέβαια, θα προσθέσουμε στη Λαγκραντζιανή τους κατάλληλους όρους, κινητικό και δυναμικού, για το ϕ

$$\mathcal{L}_\phi = \left[\left(\partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot \boldsymbol{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}B^\mu\right)\phi\right]^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

με $\mu^2 < 0$ και $\lambda > 0$. Επιλέγουμε για

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

με $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Γιατί αυτή η επιλογή: μια διπλέτα μιγαδικών πεδίων με $Y = 1$ και τη συγκεκριμένη επιλογή του κενού, είναι η κατάλληλη για την περίπτωσή μας; Κάθε τιμή του ϕ_0 που παραβιάζει μια συμμετρία θα δημιουργήσει όρο μάζας για το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας. Αλλά, αν το ϕ_0 παραμένει αναλλοίωτο από κάποια υποομάδα των μετασχηματισμών βαθμίδας, το μποζόνιο βαθμίδας που αντιστοιχεί σ΄ αυτήν την υποομάδα θα παραμείνει άμαζο. Η επιλογή του $\phi_0 = v$ παραβιάζει την $SU(2)$ και την $U(1)$. Αλλά, το ηλεκτρικό φορτίο του ϕ_0 είναι $Q = t_3 + Y/2 = -1/2 + 1/2 = 0$, δηλαδή

$$Q\phi_0 = 0$$

και βέβαια

$$\phi_0 \to e^{i\alpha(x)Q}\phi_0 = \phi_0$$

Δηλαδή, το κενό παραμένει αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό $U(1)_{em}$ και το φωτόνιο παραμένει άμαζο. Από τους τέσσερεις γενήτορες του $SU(2) \times U(1)$, $\boldsymbol{\tau}/2$ και Y, μόνο ο συνδυασμός Q υπακούει την σχέση $Q\phi_0 = 0$. Οι άλλοι τρεις παραβιάζουντην συμμετρία και δημιουργούν όρους μάζας. Με άλλα λόγια, λόγω της διατήρησης του φορτίου, μόνο αφόρτιστα βαθμωτά πεδία μπορούν να αποκτήσουν αναμενόμενη τιμή στο μηδέν διάφορη του μηδενός.

Οι μάζες των μποζονίων βαθμίδας

Οι μάζες θα προέλθουν από τον κινητικό ορο της Λαγκραντζιανής του ϕ, επιλέγοντας την αναμενόμενη τιμή του κενού ϕ_0

$$\left|\left(ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{W_\mu}+i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2=$$

$$=\frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu & g(W_\mu^{(1)}-iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)}+iW_\mu^{(2)}) & -gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right|^2=$$

$$=\frac{v^2g^2}{8}\left[(W_\mu^{(1)})^2+(W_\mu^{(2)})^2\right]+\frac{v^2}{8}\left(g'B_\mu-gW_\mu^{(3)}\right)\left(g'B^\mu-gW^{\mu(3)}\right)=$$

$$= \left(\frac{vg}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} \left(W_\mu^{(3)}\, B_\mu\right) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(3)\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

όπου $W^\pm = (W^{(1)} \mp iW^{(2)})/\sqrt{2}$. Βλέπουμε άμεσα από τον πρώτο όρο ότι η μάζα των $W^\pm$

$$M_W = \frac{1}{2} vg$$

Ο δεύτερος όρος θα πρέπει να διαγωνοποειθεί. Τα ιδιοδιανύσματα και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g^2}{gg'} \end{pmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμή } 0, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix} \quad \text{με ιδιοτιμή } g^2 + g'^2$$

Επομένως, ο γραμμικός συνδυασμός των $W^{(3)}$ και B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{g^2}{gg'} \\ 1 & \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{(3)} \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}}\begin{pmatrix} g'W^{(3)}+gB \\ gW^{(3)}-g'B \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$A_\mu \equiv \frac{g'W_\mu^{(3)}+gB_\mu}{\sqrt{g'^2+g^2}} \quad \text{με } m_A = 0$$

$$Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^{(3)}-g'B_\mu}{\sqrt{g'^2+g^2}} \quad \text{με } m_Z^2 = \frac{v^2}{4}(g^2+g'^2)$$

Επειδή $g'/g = \tan\theta_W$, οπότε

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^{(3)} + \cos\theta_W B_\mu$$
$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^{(3)} - \sin\theta_W B_\mu$$

όπως ακριβώς και στα ρεύματα.
Το ότι το φωτόνιο παραμένει άμαζο, είναι δική μας κατασκευή! Ο λόγος των μαζών του W και

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{vg/2}{v\sqrt{g^2 + g'^2}/2} = \cos\theta_W$$

είναι πρόβλεψη που εξαρτάται από το ότι το H είναι διπλέτα. Δηλαδή, στο πρότυπό μας, η παράμετρος ρ είναι

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \qquad M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2$$

και με γνωστή την τιμή του G_F, παίρνουμε

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Οπότε

$$M_W = \frac{1}{2} g v = \frac{1}{2} \frac{e}{\sin\theta_W} \sim \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin\theta_W}$$
$$M_Z \sim \frac{74.6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta_W}$$

Το 1982 παρατηρήθηκαν W και Z σε αντιδράσεις $p\bar{p} \to ZX \to (e^+e^-)X$ και $p\bar{p} \to W^\pm X \to (e^\pm \nu)X$, με $M_W \sim 81$ GeV και $M_Z \sim 93$ GeV.

Μάζες φερμιονίων

Ο όρος μάζας για τα φερμιόνια είναι $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$. Τώρα όμως τα αριστερόστροφα πεδία είναι ανήκουν σε διπλέτα της $SU(2)$, αντίθετα με τα δεξιόστροφα που βλέπουν μόνο την $U(1)$. Επομένως, ο όρος της μάζας δεν παραμένει αναλλοίωτος σε