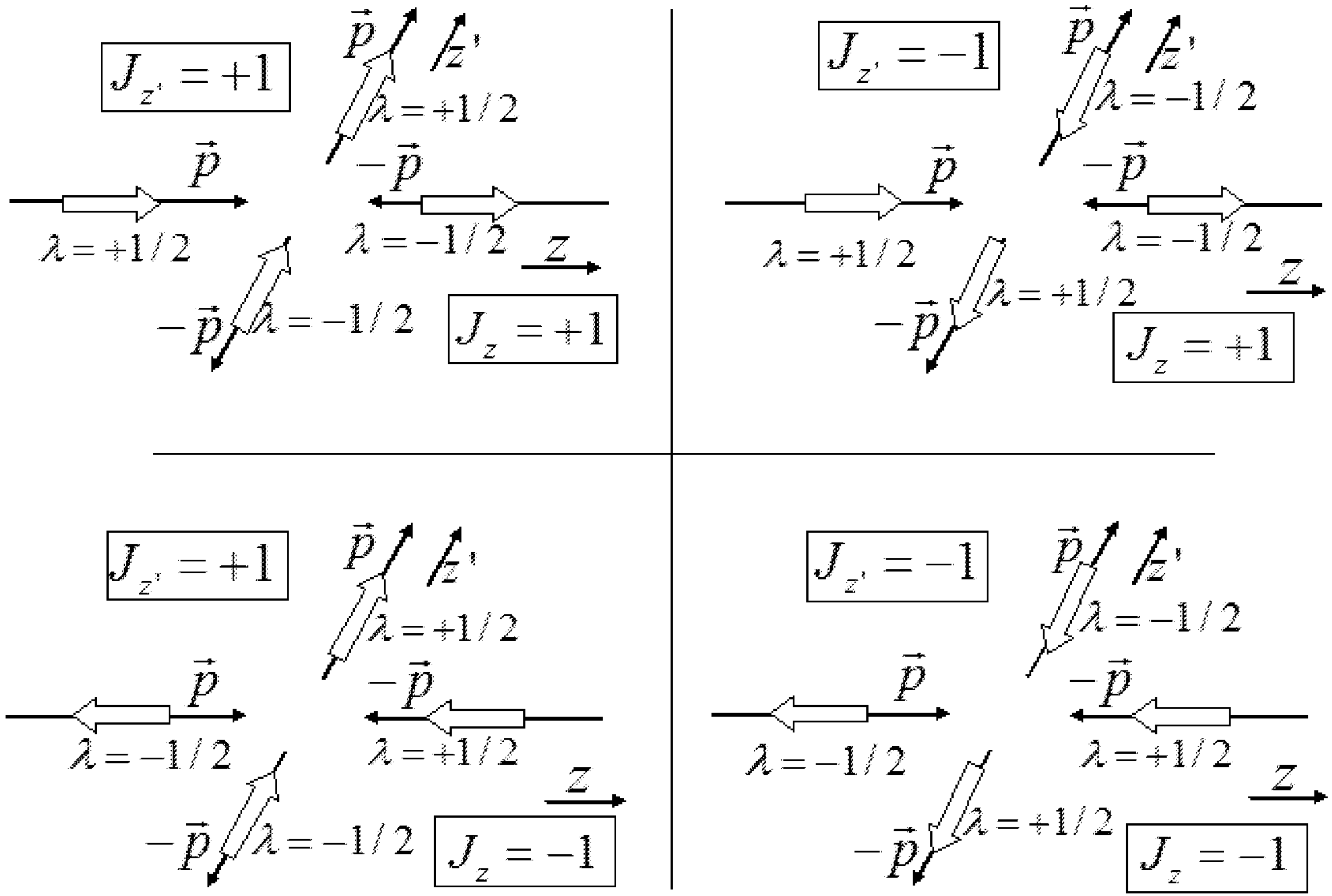
Άσκηση 30 Δείξτε ότι στην διάσπαση $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ το e είναι L. Στην $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, ποια είναι η χειραλικότητα του e;

Μπορούμε μόνο με την διατήρηση της στροφορμής να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Όπως είδαμε, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο (στην αρχική κατάσταση) όπως και το μιόνιο και το αντιμιόνιο (στη τελική κατάσταση) θα πρέπει να έχουν αντίθετη ελικότητα. Επομένως, στο Κέντρο Μάζας, θά εχουμε τις τέσσερεις παρακάτω περιπτώσεις, όπου με παχιά βέλη δείχνουμε το spin και σημειώνεται και η αντίστοιχη ελικότητα.


$J_{z'} = +1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = +1/2$
$\lambda = -1/2$
z
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
$J_z = +1$
$J_{z'} = -1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = -1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = +1/2$
$\lambda = -1/2$
z
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$J_z = +1$
$J_{z'} = +1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = +1/2$
z
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
$J_z = -1$
$J_{z'} = -1$
$\vec{p}$
z'
$\lambda = -1/2$
$-\vec{p}$
$\lambda = -1/2$
$\lambda = +1/2$
z
$\lambda = +1/2$
$-\vec{p}$
$J_z = -1$

Σχήμα 6:

Από μια αρχική κατάσταση με στροφορμή $J_z = \pm 1$, το σύστημα πηγαίνει σε $J_{z'} = \pm 1$, μέσω μιας ενδιάμεσης κατάστασης, το φωτόνιο, με στροφορμή 1. Επομένως το αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι ανάλογο του πίνακα στροφής

$$< j\lambda' | exp(-i\theta J_y) | j\lambda > \tag{16}$$

όπου y είναι ο άξονας κάθετος στο επίπεδο αλληλεπίδρασης και λ και λ' είναι η συνολική ελικότητα στους άξονες z και z'. Η αναπαράσταση του πίνακα J_y είναι $(j = 1)$

$$J_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζεται ότι

$$J_y^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_y^3 = J_y, \quad J_y^4 = J_y^2$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{-i\theta J_y} &= 1 + J_y^2\left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right) = \\ &= 1 - J_y^2 + J_y^2\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) - iJ_y\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right) = \\ &= 1 - J_y^2 + J_y^2\cos\theta - iJ_y\sin\theta \end{aligned}$$

Και η (16) αντιστοιχεί στη σχέση

$$\left(a_1^* \, a_0^* \, a_{-1}^*\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στην συνολική ελικότητα. Εμάς μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις από ± 1 σε ± 1. Βλέπουμε ότι

$$\text{όρος } (-1 \to -1) = (1 \to 1) \text{ αντιστοιχεί } \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\text{όρος } (-1 \to 1) = (1 \to -1) \text{ αντιστοιχεί } \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Για μεγάλες ενέργειες όμως $\frac{1+\cos\theta}{2} = -u/s$ και $\frac{1-\cos\theta}{2} = -t/s$.

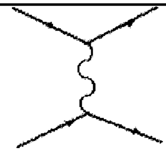
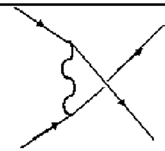
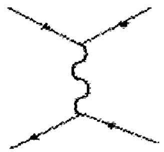
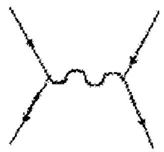
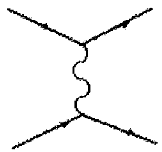
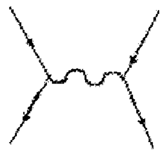
Οπότε

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{u^2}{s^2} + \frac{t^2}{s^2} = \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

Το αποτέλεσμα είναι λοιπόν απλή απόρροια διατήρησης της στροφορμής. Βλέπουμε ακόμα, για παράδειγμα, ότι η σκέδαση $e^-_R e^+_L \to \mu^-_L \mu^+_R$, που αντιστοιχεί στη πάνω δεξιά περίπτωση του Σχ.(6), για $\theta = 0$ είναι 0. Δεν έχουμε εμπρόσθια (forward) σκέδαση σ΄ αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 31 Δείξτε, με την παραπάνω μέθοδο, ότι για σωματίδια με spin=0, το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ είναι ανάλογο του $(t-u)/s = \cos\theta$

$e^+e^- \to e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$: Περίληψη

Διαδικασία	$\overline{\lvert\mathcal{M}\rvert^2}/2e^4$		
$e^-e^- \to e^-e^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2+t^2}{u^2}$		
$e^-e^+ \to e^-e^+$	$\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2+t^2}{s^2}$		
$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$	$\frac{s^2+u^2}{t^2}$		
$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$	$\frac{u^2+t^2}{s^2}$		

$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **στο εργαστήριο - Κινηματική**

Η παρακάτω ανάλυση θα φανεί πολύ χρήσιμη στην κατανόηση της σκέδασης ηλεκτρονίου από πρωτόνιο. Επιστρέφουμε στον πλήρη τύπο της σκέδασης $e^-(k)\mu^-(p) \to e^-(k')\mu^-(p')$, όπου αμελούμε μόνο την μάζα του ηλεκτρονίου

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - M^2 k'\cdot k\right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2(k\cdot p - k'\cdot p) + 2(k'\cdot p)(k\cdot p) + \frac{1}{2}M^2 q^2\right]\end{aligned}$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και χρησιμοποιήσαμε ότι

$$p' = k - k' + p, \qquad k^2 = {k'}^2 \simeq 0, \qquad q^2 = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k'$$

Στο σύστημα εργαστηρίου $p = (M, 0)$ για το μιόνιο, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{q^4}\left[-\frac{1}{2}q^2 M(E-E') + 2EE'M^2 + \frac{1}{2}M^2q^2\right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4}2M^2EE'\left[-\frac{q^2}{2M^2}\,\frac{M(E-E')}{2EE'} + 1 + \frac{1}{4}\,\frac{q^2}{EE'}\right] = \\ &= \frac{8e^4}{q^4}2M^2EE'\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε ότι

$$q^2 \simeq -2kk' = 2EE'(1-\cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}&q = -p + p' \to q + p = p' \to q^2 + 2p\cdot q + M^2 = M^2 \to \\ &\qquad \to q^2 = -2p\cdot q = -2M(E-E')\end{aligned}$$

με E και E' η ενέργεια του εισερχόμενου και εξερχόμενου ηλεκτρονίου.

Ορίζουμε την χρήσιμη ποσότητα $\nu = E - E' = -\frac{q^2}{2M} = \frac{pq}{M}$.

Πηγαίνουμε τώρα στην ενεργό διατομή

$$d\sigma = \left(\frac{1}{(2E)(2M)} \frac{1}{1} \right) \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2} \frac{d^3k'}{2E'} \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + k - p' - k')$$

όπου ο όρος $(2E)$ αντιστοιχεί στην ροή των ηλεκτρονίων, ο $(2M)$ στην ''ροή'' των μιονίων και η μονάδα στην σχετική ταχύτητα του ηλεκτρονίων ως προς το μιόνιο (περίπου c)

$$d\sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{4ME} \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2} \frac{\mathbf{k}^{2'} dk' d\Omega}{E'} \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + k - p' - k')$$

Αλλά, $\mathbf{k}^{2'} \simeq E'^2$ οπότε $\frac{\mathbf{k}^{2'} dk'}{E'} \simeq E' dE'$

$$d\sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{4ME} \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2} E' dE' \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p - p' + q) d\Omega \qquad (19)$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$\int \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p - p' + q) = \int d^3 p' dp'_0 \delta^{(4)}(p - p' + q) \theta(p'_0) \delta(p'^2 - M^2)$$
$$= \frac{1}{2M} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \frac{1}{2MA} \delta\left(E' - \frac{E}{A}\right)$$

όπου $A = 1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Κατ΄ αρχάς μπορούμε να γράψουμε

$\delta(p'^2 - M^2) = \delta(p_0'^2 - M^2 - \mathbf{p}'^2)$. Και επομένως

$\int dp'_0 \delta(p_0'^2 - M^2 - \mathbf{p}'^2) = \frac{1}{2p'_0}$, με $p'_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}$, όπου χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{f(x_0)}{\left|\frac{dg}{dx}\Big|_{x=x_0}\right|}$$

Η συνάρτηση θ είναι ίση με τη μονάδα όταν το όρισμα της είναι θετικό και μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Οπότε η $\theta(p_0')$ επιλέγει μόνο τη θετική ρίζα. Έτσι δείξαμε την πρώτη ισότητα της προς απόδειξη σχέσης. Για την δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\int d^4p'\delta^{(4)}(p+q-p')\theta(p_0')\delta(p'^2 - M^2) = \delta\left((p+q)^2 - M^2\right) =$$

$$= \delta(q^2 + 2pq) = \delta(q^2 + 2\nu M) = \frac{1}{2M}\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\delta\left(E - E' - \frac{4EE'}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2M}\delta\left(E - E'\left(1 + \frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{1}{2M}\frac{1}{A}\,\delta\left(E' - \frac{E}{A}\right)$$

Ξαναγυρίζουμε στη σχέση (19) και χρησιμοποιώντας το αναλοίωτο πλάτος, (18), έχουμε

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) =$$
$$= \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\frac{1}{A}\,\delta(E' - E/A)$$

και ολοκληρώνοντας ως προς E' θα πάρουμε ($q^2 = (k - k')^2 = -2kk' = 2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$ και
$A = 1 + 2E\sin^2(\theta/2)/M = 1 + q^2/(-2E'M) =$

$1 + (-2M(E-E'))/(-2E'M) = 1 + E/E' - 1 = E/E')$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{A} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] =$$
$$= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]$$

Η ύπαρξη του δεύτερου όρου στις αγκύλες ($\sin^2 \frac{\theta}{2}$) είναι χαρακτηριστικό του στόχου (μιόνιο) με spin=1/2.

Άσκηση 32 Δείξτε, ότι η ενεργός διαφορική διατομή για σκέδαση ηλεκτρονίου από στόχο με spin=0 δίνεται από τον τύπο

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Φωτόνια - Διάνυσμα πόλωσης

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι νόμοι του Maxwell γράφονται με συναλλοίωτο τρόπο

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu$$

ή ακόμα, ορίζοντας τον τανυστή του πεδίου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, μπορούμε να γράφουμε

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Η διατήρηση του ρεύμετος j^ν είναι ενσωματωμένη στη μορφή αυτή: $\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ παραμένουν αναλοίωτα στον μετασχηματισμό $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$ όπου χ τυχαία συνάρτηση. Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση χ

μπορούμε να επιτύχουμε $\partial_\nu A^\nu = 0$ (συνθήκη Lorentz), οπότε

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu A_\nu = j^\mu \rightarrow \Box^2 A^\mu = j^\mu$$

Ακόμα και σ΄ αυτήν την περίπτωση, παραμένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής της χ, αρκεί βέβαια $\Box^2\chi = 0$. Δηλαδή, μένει μια επιπλέον ελευθερία επιλογής του $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ με $\Box^2 \Lambda = 0$. Η κυματοσυνάρτηση του ελεύθερου φωτονίου ικανοποιεί την $\Box^2 A^\mu = 0$ με λύση $A^\mu = \epsilon^\mu(\mathbf{q}) e^{-iqx}$, με $q^2 = 0$ $(m_\gamma = 0)$. Το $\epsilon^\mu(\mathbf{q})$ είναι το διάνυσμα πόλωσης, το οποίο έχει, βέβαια, 4 συνιστώσες. Αλλά, η σχέση $\partial_\mu A^\mu = 0$ μας υποχρεώνει $q^\mu \epsilon_\mu = 0$, οπότε έχουμε μειώσει σε τρεις τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχουμε ακόμα μια ελευθερία για το $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ με $\Box^2 \Lambda = 0$. Αν επιλέξουμε $\Lambda = iae^{-iqx}$, οπότε $\Box^2 \Lambda = -iq^2 a e^{-iqx} = 0$, τότε

$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda = A^\mu + a q^\mu e^{-iqx}$ που αντιστοιχεί στην αλλαγή $\epsilon^\mu \to \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + a q^\mu$. Δηλαδή, τα ϵ^μ και ϵ'^μ είναι ισοδύναμα, περιγράφουν το ίδιο φωτόνιο. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο a ώστε να έχουμε $\epsilon^0 = 0$. Και η σχέση $\epsilon^\mu q_\mu = 0$ γίνεται $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{q} = 0$ (βαθμίδα Coulomb). Τελικά, λοιπόν, έχουμε μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες (spin=1 με μηδενική μάζα), π.χ. $\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0)$ και $\boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$, θεωρώντας ότι $\mathbf{q} = (0,0,q)$. Τα $\mathbf{q}$ και ϵ^μ περιγράφουν πλήρως το φωτόνιο.

Άσκηση 33 Δείξτε πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

σε μια στροφή με γωνία θ γύρω από τον άξονα z. Τα διανύσματα αυτά ονόμαζονται διανύσματα κυκλικής πόλωσης και το δεξιόστροφο (R) έχει θετική ελικότητα ενώ το αριστερόστροφο (L) έχει αρνητική ελικότητα.

Άσκηση 34 Δείξτε ότι στην βαθμίδα Coulomb, ή εγκάρσια βαθμίδα, ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_\lambda)_i^* (\epsilon_\lambda)_j = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\boldsymbol{\epsilon}_R = -\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2\right), \quad \boldsymbol{\epsilon}_L = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2\right)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (0,1,0)$$

Διανύσματα πόλωσης για spin=1 και $\mathbf{M \neq 0}$

Στο σύστημα ηρεμίας έχουμε 3 δυνατές καταστάσεις για spin=1.