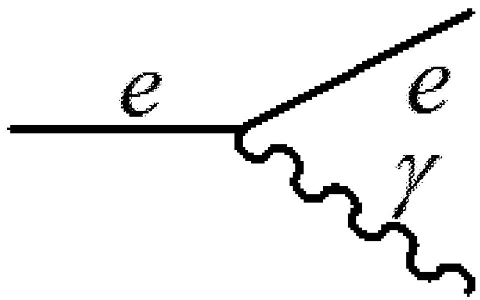
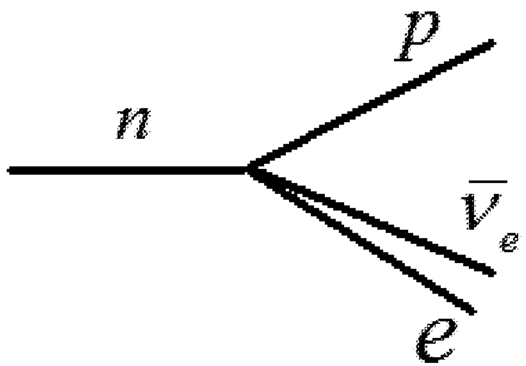
Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Ο Fermi, το 1934, έκανε την πρώτη προσπάθεια φαινομενολογικής περιγραφής των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Θεώρησε την διάσπαση β ως μια ηλεκτρομαγνητική μετάπτωση.





Το πλάτος θα δίνεται

$$M =< p|J_{\mu}^{wk}|n >< e\nu_e|J^{\mu}_{wk}|0 >$$

Λόγω της μικρής ενέργειας που εκλείεται, περιμένουμε ότι η εξάρτηση από την ορμή μπορεί να αγνοηθεί και να καταλήξουμε σε μια σταθερά $G = 1.14 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$.

Αυτή η αλληλεπίδραση "ρεύματος - ρεύματος" μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες ασθενείς διαδικασίες. Ο κανόνας που έχουμε για τα αντισωματίδια οδηγεί στην διαδικασία

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-$$

που θα πρέπει να έχει την ίδια ισχύ όπως και η διάσπαση β. Θεωρώντας, επίσης, ότι το ασθενές ρεύμα έχει λεπτονικό και αδρονικό τμήμα

$$J_\mu^{wk} = J_\mu^h + J_\mu^l$$

τότε, θα πρέπει να υπάρχουν καθαρές λεπτονικές διαδικασίες

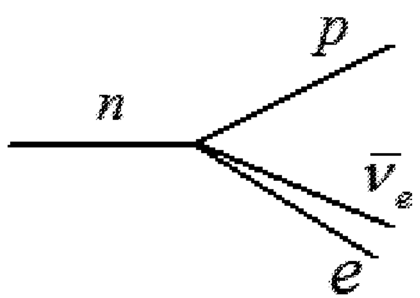
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

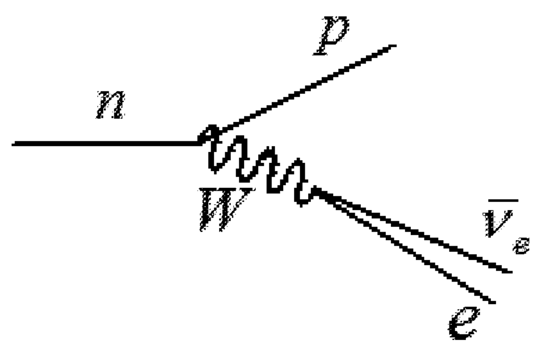
και καθαρά αδρονικές διαδικασίες

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Η πρώτη διατύπωση της "παγκοσμιότητας" (universality) ήταν ότι όλες αυτές οι διαδικασίες θα έχουν κοινό G.

Η αντιστοιχεία του φωτονίου με το ζευγάρι $(e\nu_e)$ δεν είναι πολύ επιτυχής. Το φωτόνιο που εκπέμπεται αποτελεί το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Είναι δύσκολο να θεωρήσουμε το ζευγάρι $(e\nu_e)$ ως το κβάντο του αντίστοιχου ασθενούς πεδίου. Από την άλλη πλευρά, η επιτυχία της ΚΗΔ οδηγεί άμεσα στην σκέψη εισαγωγής ενός πεδίου αντίστοιχου με το φωτόνιο, του ενδιάμεσου διανυσματικού μποζονίου (intermediate vectot boson). Αυτό ίσως ήταν το πρώτο βήμα για την ενοποίηση ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων.





Παρέμεναν βέβαια πολλές διαφορές ανάμεσα στην ΚΗΔ και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το φωτόνιο είναι ουδέτερο ενώ το W έχει φορτίο. Το W πρέπει να έχει μάζα, λόγω της μικρής εμβέλειας των ασθενών αλληλεπίδρασεων, ενώ το φωτόνιο είναι άμαζο.

Η εισαγωγή της έννοιας του ενδιάμεσου μποζονίου οδηγεί στο πλάτος

$$\mathcal{M} = J_{\mu}^{(wk)} \left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^{\mu}q^{\nu}/M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right] J_{(wk)}^{\nu}$$

Επομένως, στην κορυφή Fermi έχουμε πια μια εξάρτηση από την ενέργεια. Για τυπικές ενέργειες της διάσπασης β, το $q^2 << M_W^2$, οπότε $G \sim g^2/M_W^2$, όπου το g είναι η σταθερά σύζευξης, ανάλογη του e. Δηλαδή, οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι ασθενείς λόγω της μεγάλης μάζας του W. Αν $g \sim e$, τότε

$$M_W \sim \frac{e}{\sqrt{G}} \sim 90 \text{ GeV}$$

Το 1957 παρατηρήθηκε (Wu et al) εξάρτηση της γωνιακής κατανομής του e^- από την πόλωση του πυρήνα (n), κάτι που είχε ήδη αναφερθεί από τους Lee και Young. Άρα, θα πρέπει να εμφανίζεται όρος $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$. Μετά από πολλές προσπάθειες, παλινωδίες, αποτυχίες, καθιερώθηκε η ύπαρξη συνδυασμών V (διάνυσμα) και A (ψευδοδιάνυσμα) στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Γνωρίζουμε ότι $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ που μετασχηματίζεται ως διάνυσμα, ενώ το $J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ ως ψευδοδιάνυσμα. Δηλαδή, σε μετασχηματισμό parity

$$P: \quad J^\mu \to (J^0, -\mathbf{J})$$

$$P: \quad J_5^\mu \to (J^0, \mathbf{J})$$

Η αρχική θεωρία του Fermi πέρασε από την υπόθεση του ενδιάμεσου μποζονίου και έφτασε στην μορφή $V - A$

$$< e^-|J^\mu_{wk}|\nu_e >= \frac{g}{\sqrt{2}} N N' \, \bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_{\nu_e}$$

Επομένως, το $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ θα γράφεται

$$\frac{g^2}{2}\left[\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{(\nu_\mu)}\right]\left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2}\right]\left[\bar{u}_{(\nu_e)}\gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} u_{(e)}\right]$$

που αντιστοιχεί στην κορυφή Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)u_{(\nu_\mu)}\right]g^{\mu\nu}\left[\bar{u}_{(\nu_e)}\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)u_{(e)}\right]$$

Οπότε, για $q^2 << M_W^2$,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

και αυτό αποτελεί τον ορισμό του G_F.

Γράφοντας το

$$\bar{u}_1\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}u_2 = \bar{u}_1\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}u_2 = \bar{u}_1 P_R\gamma^\mu P_L u_2 = \overline{(u_{1_L})}\gamma^\mu u_{2_L}$$

σημαίνει ότι μόνο το αριστερόστροφο (L) τμήμα της κυματοσυνάρτησης παίζει ρόλο στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Θυμόμαστε ότι στην ΚΗΔ έχουμε

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \overline{u_L}\gamma^\mu u_R + \overline{u_R}\gamma^\mu u_L$$

Τι γίνεται για τα δεξιόστροφα τμήματα;

Ας δούμε τι συμβαίνει στην απαίτηση η Λαγκραντζιανή να παραμένει αναλλοίωτη όταν η κυματοσυνάρτηση ψ μετασχηματίζεται κάτω από δύο μετασχηματισμούς

$$\psi \to e^{-i\alpha(x)Q}\psi, \quad \text{και} \quad \psi \to e^{-i\beta(x)Y}\psi$$

Τότε, θα πρέπει να εισαγάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 Q A^\mu - ig_2 Y B^\mu$$

όπου τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως

$$A^{\mu} \to A^{\mu} - \frac{1}{g_1 Q}\partial^{\mu}\alpha(x)$$

$$B^{\mu} \to B_{\mu} - \frac{1}{g_2 Y}\partial^{\mu}\beta(x)$$

Ουδέτερα ρεύματα

Η διάσπαση $n \to p + e^- + \nu_e$, στο επίπεδο των κουάρκ αντιστοιχεί στην $d \to u + W^-$ και με τη σειρά του το $W^- \to e^- + \nu_e$. Οπότε, η αλληλεπίδραση του ασθενούς ρεύματος των κουάρκ με το W^- γράφεται

$$(\overline{u_L}\gamma^{\mu}d_L)\,W_{\mu}^- = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^{\mu}\tau^+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_{\mu}^-$$

όπου

$$\tau^{+} = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + i\tau_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Και βέβαια, για την διαδικασία $u \to d + W^{+}$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$\left(\overline{d_L}\gamma^{\mu}u_L\right) W_{\mu}^{+} = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^{\mu}\tau^{-}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_{\mu}^{+}$$

με

$$\tau^{-} = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - i\tau_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Περιμένουμε (;) λοιπόν και την παρουσία του τ_3

$$\left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^\mu \tau_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \left(\overline{u_L}\gamma^\mu u_L - \overline{d_L}\gamma^\mu d_L\right)$$

όπου βέβαια το αντίστοιχο $W_\mu^{(3)}$ πρέπει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Δουλεύοντας σε μια γενιά μόνο (u, d, e, ν_e), θα έχουμε

$$u_L, \quad u_R, \quad d_L, \quad d_R, \quad e_L, \quad e_R, \quad \nu_{e_L}$$

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μας οδηγούν σε αριστερόστρεφες διπλέτες και δεξιόστροφες ‘‘μονάδες’’ (singlets)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R, \quad e_R$$

Τα αριστερόστροφα ‘‘βλέπουν’’ μια συμμετρία $SU(2)$ και μια $U(1)$ ενώ τα δεξιόστροφα ‘‘βλέπουν’’ μόνο την $U(1)$. Δηλαδή, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$\Psi_L^{(i)} \to \exp\left(-i\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2 - i\beta(x)Y_L^{(i)}/2\right)\Psi_L^{(i)}$$

$$\Psi_R^{(i)} \to \exp\left(-i\beta(x)Y_R^{(i)}/2\right)\Psi_R^{(i)}$$

οπότε, οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι θα είναι

$$D^{\mu}_{(L)} = \partial^{\mu} + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot \mathbf{W}^{\mu} + ig'\frac{Y}{2}B^{\mu}, \quad \text{για τα } L \text{ πεδία}$$

$$D^{\mu}_{(R)} = \partial^{\mu} + ig'\frac{Y}{2}B^{\mu}, \qquad \text{για τα } R \text{ πεδία}$$

και η Λαγκραντζιανή θα γράφεται

$$\mathcal{L} = (\bar{u}\,\bar{d})_L\, i\gamma^{\mu}D^{(L)}_{\mu}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\, i\gamma^{\mu}D^{(L)}_{\mu}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L +$$

$$+\overline{u_R}i\gamma^{\mu}D^{(R)}_{\mu}u_R + \overline{d_R}i\gamma^{\mu}D^{(R)}_{\mu}d_R + \overline{e_R}i\gamma^{\mu}D^{(R)}_{\mu}e_R -$$

$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

Για να δούμε πώς παρουσιάζεται το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα, π.χ.

$\bar{e}\gamma^\mu e$. Ας πάρουμε το ρεύμα της $SU(2)$ που αντιστοιχεί στο τ_3

$$j_\mu^{(3)} = (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\,\gamma_\mu \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2}\overline{\nu_{e_L}}\gamma_\mu \nu_{e_L} - \frac{1}{2}\overline{e_L}\gamma_\mu e_L$$

Για την ίδια διπλέτα, το ρεύμα που αντιστοιχεί στην $U(1)$ θα είναι

$$j_\mu^{(Y_L)} = (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\,\gamma_\mu \frac{1}{2}Y_L\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2}Y_L\overline{\nu_{e_L}}\gamma_\mu \nu_{e_L} + \frac{1}{2}Y_L\overline{e_L}\gamma_\mu e_L$$

Αν, λοιπόν, επιλεχθεί για την λεπτονική διπλέτα $Y_L = -1$, θα πάρουμε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} = -\overline{e_L}\gamma_\mu e_L$$

Το ρεύμα για το δεξιόστροφο e_R είναι, βέβαια, μόνο από την $U(1)$

$$j_\mu^{(Y_R)} = \overline{e_R}\gamma_\mu \frac{1}{2} Y_R' e_R$$

Επιλέγουμε $Y_R' = -2$, οπότε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} + j_\mu^{(Y_R)} = -\overline{e_L}\gamma_\mu e_L - \overline{e_R}\gamma_\mu e_R = -\bar{e}\gamma_\mu e$$

που είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα. Δηλαδή, το φορτίο κάθε ψ θα δίνεται από τη σχέση

$$Q = t_3 + \frac{Y}{2}$$

όπου

$$t_3 = \begin{cases} \pm\frac{1}{2} & \text{για τις πάνω και κάτω συνιστώσες της } L \text{ διπλέτας} \\ 0 & \text{για τις } R \end{cases}$$

Αυτό αναμενόταν, μιας και κάθε κατάσταση έχει καθορισμένο φορτίο. Οπότε, ο τελεστής του φορτίου θα πρέπει να είναι διαγώνιος πίνακας, άρα γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y. Ας επαληθεύσουμε ότι ο συνδυασμός $Q = t_3 + \frac{Y}{2}$ δίνει το σωστό φορτίο σε κάθε σωματίδιο.

$$\begin{aligned} \text{για το } \nu_{e_L} : &\qquad +\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0 \\ \text{για το } e_L : &\qquad -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\ \text{για το } e_R : &\qquad 0 + \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε την τιμή του Y για την διπλέτα των κουάρκ και των δεξιόστροφων πεδίων

$$Y = \frac{1}{3}, \text{ για το } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Y = \frac{4}{3}, \text{ για το } u_R, \quad Y = -\frac{2}{3}, \text{ για το } u_R$$

Εφ΄ όσον το φορτίο είναι γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y, το φωτόνιο θα είναι γραμμικός συνδυασμός του W_3^μ και του B^μ

$$W_3^\mu = \sin\theta_W A^\mu + \cos\theta_W Z^\mu$$
$$B^\mu = \cos\theta_W A^\mu - \sin\theta_W Z^\mu$$

όπου θ_W η γωνία Weinberg που μας πηγαίνει από το ζευγάρι (W_3^μ, B^μ) στο (A^μ, Z^μ). Τώρα, οι όροι αλληλεπίδρασης των ρευμάτων $j_\mu^{(3)}$ και $j_\mu^{(Y)}$ γίνονται

$$-igj_\mu^{(3)}W_3^\mu - ig'\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}B^\mu =$$

$$= -i\left[g\sin\theta_W j_\mu^{(3)} + g'\frac{1}{2}\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu -$$

$$-i\left[g\cos\theta_W j_\mu^{(3)} - g'\frac{1}{2}\sin\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu =$$

$$= -ig\sin\theta_W\left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu -$$

$$-i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu$$

Αν $\frac{g'}{g} = \tan\theta_W$, τοτε, ο πρώτος όρος γίνεται

$$- ig\sin\theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu =$$

$$- ig\sin\theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2}j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu \equiv -iej_\mu^{(em)}A^\mu$$

όπου

$$e = g\sin\theta_W, \quad \text{και} \quad j_\mu^{(em)} = j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}$$

Ο δεύτερος όρος, ανάλογος του Z^μ, γίνεται

$$- i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right] Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W \frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right] Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W\left(j_\mu^{(em)} - j_\mu^{(3)}\right)\right]Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W j_\mu^{(em)}\right]Z^\mu =$$

Ο μηχανισμός Higgs

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs ώστε τα $W^\pm$ και Z να αποκτήσουν μάζα, ενώ το φωτόνιο να παραμείνει άμαζο. Εισάγουμε μια διπλέτα ϕ με $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Βέβαια, θα προσθέσουμε στη Λαγκραντζιανή τους κατάλληλους