Συμπερασματικά, απαιτώντας αναλλοιώτητα σε τοπική αλλαγή φάσης της ελεύθερης Λαγκραντζιανής, οδηγούμαστε σε μια θεωρία με αλληλεπιδράσεις, την ΚΗΔ. Αυτό που φάνταζε σαν μια παραξενιά της θεωρίας του Maxwell, γίνεται τώρα σημαντικό στοιχείο.

Μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική βασίζεται στην ομάδα $SU(3)$. Η ελεύθερη Λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) q_j = 0, \quad \text{όπου} \quad j = 1, 2, 3, \text{ τα τρία χρώματα}$$

Θα συγκεντρωθούμε προς στιγμή σε μια “γεύση” κουαρκ.

Ο μετασχηματισμός του πεδίου $q(x)$ είναι τώρα

$$q(x) \rightarrow Uq(x) = e^{i\alpha_j(x)T_j} q(x)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός (unitary) 3×3 πίνακας. Οι πίνακες T_j είναι οι 8 γενήτορες της $SU(3)$ ($j = 1, 2, ..., 8$) και α_j οι παράμετροι του μετασχηματισμού.

Άσκηση 50 Για μοναδιακό μετασχηματισμό ($U^\dagger U = 1$), ισχύει ότι $\det U = e^{i\phi}$ με $\phi \in \mathbb{R}$. Αν περιοριστούμε στους μοναδιακούς πίνακες με $\det U = +1$ (ειδικούς μοναδιακούς, special unitary), τότε $\mathrm{Tr}(T_j) = 0$, και $\alpha_i T_j = \alpha_j^* T_j^\dagger$.

Η ομάδα $SU(3)$ δεν είναι αβελιανή

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k$$

όπου f_{ijk} είναι οι σταθερές δομής (structure constants) της ομάδας. Οι σταθερές αυτές είναι πραγματικές και πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Άσκηση 51 Δείξτε ότι οι σταθερές αυτές είναι πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k.

Θεωρώντας απειροστούς μετασχηματισμούς, παίρνουμε

$$q(x) \to (1 + i\alpha_j(x)T_j)\, q(x)$$
$$\partial_\mu q(x) \to (1 + i\alpha_j(x)T_j)\, \partial_\mu q(x) + iT_j q(x)\partial_\mu \alpha_j$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ΚΗΔ, θα εισάγουμε 8 νέα πεδία G_j^μ που μετασχηματίζονται

$$G_j^\mu \to G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \alpha_j$$

και θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + igT_j G_j^\mu$$

Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

Ας δούμε πώς μετασχηματίζεται κάθε όρος

$$\begin{aligned} m\bar{q}q &\to m\bar{q}\left(1 - i\alpha_j(x)T_j\right)\left(1 + i\alpha_i(x)T_i\right)q = m\bar{q}q + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q &\to i\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(1 + i\alpha_j(x)T_j\right)q = \\ &= -i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q - \bar{q}\gamma^\mu T_j q\partial_\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu \rightarrow -g\bar{q}\left(1 - i\alpha_i(x)T_i\right)\gamma_\mu T_j \left(1 + i\alpha_m(x)T_m\right) q\cdot \\
\cdot\,(G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \alpha_j) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu - ig\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu [T_j, T_m] q G_j^\mu - \\
+\, g\,\frac{1}{g}\,\bar{q}\gamma_\mu T_j q \partial^\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\
= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu + \underline{g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu} - \\
+\, \bar{q}\gamma_\mu T_j q \partial^\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

Βλέπουμε ότι μας μένει ο όρος $g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$ που χαλάει την αναλλοιώτητα. Αλλά, αν αναβαθμίσουμε το μετασχηματισμό του πεδίου βαθμίδας

$$
G_j^\mu \rightarrow G_j^\mu - \frac{1}{g}\,\partial^\mu \alpha_j - f_{jms}\alpha_m G_s^\mu
$$

στον μετασχηματισμό του όρου $-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu$ θα εμφανιστεί ο επιπλέον όρος

$$g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jms} T_j q G_s^\mu$$

Κάνοντας την αλλαγή στους ‘‘τυφλούς’’ δείκτες $j \to r$ και $s \to j$, παίρνουμε

$$g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{rmj} T_r q G_j^\mu = -g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f_{rmj} = -f_{jmr}$. Οπότε, βλέπουμε ότι ο όρος που χαλούσε την αναλλοιώτητα εξαλείφεται. Βέβαια, στην Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

θα πρέπει να προσθέσουμε τον κινητικό όρο του πεδίου βαθμίδας, τον αντίστοιχο του $-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)q - g(\bar{q}\gamma_{\mu}T_{j}q)G^{\mu}_{j} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_{j}G_{\mu\nu j}$$

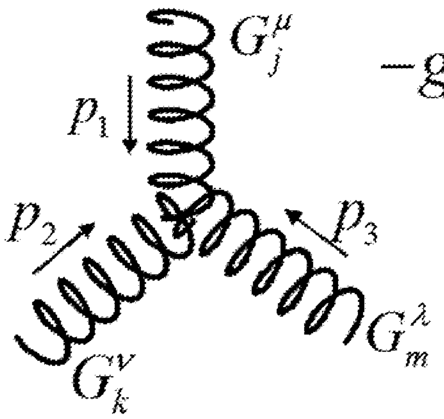
όπου όμως, ο αναβαθμισμένος μετασχηματισμός του πεδίου βαθμίδας μας υποχρεώνει να ορίσουμε

$$G^{\mu\nu}_{j} = \partial^{\mu}G^{\nu}_{j} - \partial^{\nu}G^{\mu}_{j} - gf_{jrs}G^{\mu}_{r}G^{\nu}_{s}$$

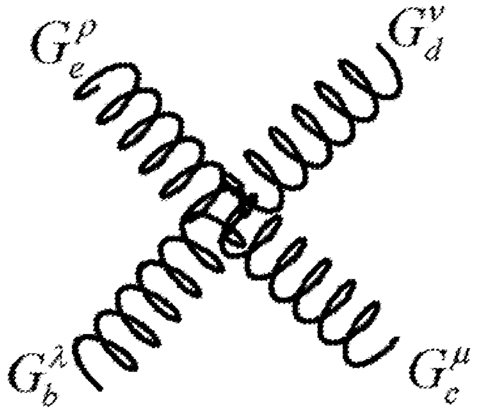
Η παραπάνω Λαγκραντζιανή περιγράφει "έγχρωμα" κουάρκ και γκλουόνια και είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της ομάδας $SU(3)$. Τα γκλουόνια είναι και πάλι άμαζα. Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)q - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}_{j}G_{\mu\nu j}$$

Ποιο είναι το καινούργιο στοιχείο με τα γκλουόνια; Ο κινητικός όρος περιέχει όρο αυτο-αλληλεπίδρασης μεταξύ των γκλουονίων: $gGGG$ και g^2GGGG.



$$-gf_{jkm}[(p_1-p_2)_\lambda g_{\mu\nu}+(p_2-p_3)_\mu g_{\nu\lambda}+(p_3-p_1)_\nu g_{\mu\lambda}]$$



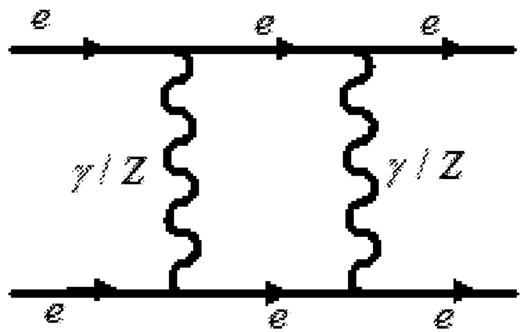
$$-ig^2[f_{abc}f_{ade}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})+f_{adc}f_{abe}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})+f_{abd}f_{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}-g_{\nu\mu}g_{\lambda\rho})]$$

Μη αβελιανές θεωρίες - Yang-Mills θεωρίες

Η μικρή ακτίνα δράσης των ασθενών αλληλεπιδράσεων μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα σωματίδια υπεύθυνα για αυτήν την αλληλεπίδραση (τα αντίστοιχα σωματίδια βαθμίδας) πρέπει να έχουν μάζα, πράγμα που δεν επιτρέπεται στις θεωρίες βαθμίδας (Θ.Β.). Οπότε, η εισαγωγή των Θ.Β. ήταν από ομορφιά μόνο; Μπορούμε να αγνοήσουμε τις Θ.Β. και να βάλουμε όρο μάζας, για π.χ. $M^2 W^\mu W_\mu$, στην Λαγκραντζιανή; Αν το εφαρμόσουμε, θα συναντήσουμε απειρίες στους υπολογισμούς μας που δεν μπορούμε ούτε να “διώξουμε” ούτε να “κρύψουμε”.

Στο παρακάτω διάγραμμα “ενός βρόχου”, αν τα σωματίδια με την κυματιστή γραμμή είναι φωτόνια, κάθε διαδότης του φωτονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q^2$ ενώ κάθε διαδότης του ηλεκτρονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q$, όπου q είναι η ορμή στο βρόχο που είναι ελεύθερη (μετά την διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή), οπότε και θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την ορμή αυτή: $\int d^4 q$

$$\int d^4 q \, \frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m}$$



Για μεγάλα q το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.
Αν όμως αντί φωτόνια έχουμε σωματίδια με μάζα, ο διαδότης είναι

$$\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2} \xrightarrow{q \to \infty} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2}$$

οπότε, το διάγραμμα θα δίνει

$$\int d^4q \, \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2} \frac{q_\rho q_\sigma}{M^2 q^2}$$

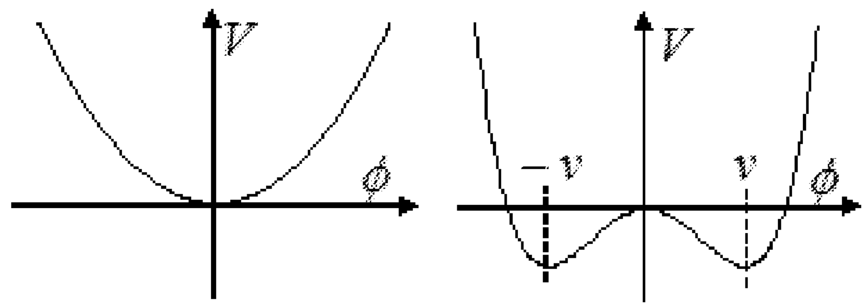
Το ολοκλήρωμα όμως τώρα αποκλίνει για μεγάλα q. Βέβαια, θα μπορούσαμε να βάλουμε ένα πάνω όριο στο ολοκλήρωμα, ως μια παράμετρο που θα μας δώσει το πείραμα. Αλλά, πηγαίνοντας σε διαγράμματα με περισσότερους βρόχους, οι απειρίες χειροτερεύουν και χρειαζόμαστε όλο και καινούργιες παραμέτρους. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται μη ‘‘ανακανονικοποιήσιμη’’ και δεν μπορεί να έχει προβλεψιμότητα.

Κρυμμένη συμμετρία - Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας

Ας θεωρήσουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

η οποία έχει μια συμμετρία $\phi \to -\phi$. Το λ θα πρέπει να είναι θετικό για να μπορούμε νε έχουμε ελάχιστο. Για $\mu^2 > 0$, η Λαγκραντζιανή περιγράφει ένα βαθμωτό σωματίδιο με μάζα μ και αυτοαλληλεπιδράσεις. Η κατάσταση χαμηλώτερης ενέργειας (ground state) είναι $\phi = 0$ και η κατάσταση αυτή υπακούει τη συμμετρία $\phi \to -\phi$. Για $\mu^2 < 0$, όμως, βλέπουμε ότι $\phi = 0$ δεν είναι ολικό ελάχιστο.



Πράγματι

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \rightarrow \phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$

Εφαρμόζουμε θεωρία διαταραχών γύρω από ένα από τα ελάχιστα, επιλέγοντας το $\phi = +v$

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

όπου $\eta(x)$ περιγράφει τις κβαντικές διαταραχές γύρω από το ελάχιστο. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 + \text{σταθερά}$$

Ο δεύτερος όρος μας δείχνει ότι το η έχει μάζα

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Αλλά, η $\mathcal{L}$ και η $\mathcal{L}'$ είναι ισοδύναμες. Ένας μετασχηματισμός δεν μπορεί να αλλάξει τη φυσική που περιγράφει η Λαγκραντζιανή. Αν μπορούσαμε να "λύσουμε" πλήρως την $\mathcal{L}$ και η $\mathcal{L}'$ θα βρίσκαμε τα ίδια αποτελέσματα. Αλλά, στη θεωρία διαταραχών υπολογίζουμε διαταραχές γύρω από ένα ελάχιστο. Με την $\mathcal{L}$, η σειρά της θεωρίας διαταραχών δεν θα συνέκλινε γιατί θα αναπτύσαμε γύρω από ένα ασταθές ελάχιστο, $\phi = 0$.