

A la Aitchison and Hey λύσεις της εξίσωσης Dirac

Από την αρχική μορφή της Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-ia \cdot \nabla + \beta m)\psi$$

και γράφοντας $\psi = \omega e^{-ip^\mu x_\mu}$ όπου $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (-ia \cdot (i)\mathbf{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Οότε, παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi$$

$$E\chi = -m\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\phi$.

Επομένως, $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$ χωρίς νοημαλισμό. Χρησιμοποιώντας

την μορφή του χ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \phi$$

$$E = m + \frac{p^2}{E + m} \rightarrow (E - m)(E + m) = p^2$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Ποια είναι η φυσική σημασία του ω με τις δύο συνιστώσες; Στην σχέση που δίνει το ω , το ϕ είναι αυθαίρετο. Μπορεί να πάρει τις τιμές $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα του τελεστή $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με

ιδιοτιμές $\pm \frac{1}{2}$. Βέβαια, η πιο γενική μορφή του ϕ είναι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ με } a, b \text{ μιγαδικοί αριθμοί. Έχουμε}$$

λοιπόν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, όπως ακριβώς ένα σύστημα με $j = 1/2$ ($2j + 1$ καταστάσεις).

Στο σύστημα ηρεμίας ($\mathbf{p}=0$), η ερμηνεία είναι άμεση. Το

$\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} = 0$, άρα και $\chi = 0$, και οι δύο λύσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Και οι δύο λύσεις έχουν ίδια ενέργεια. Άρα υπάρχει κάποιος τελεστής που μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας (την χαμιλτονιανή) και ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις. Αυτός είναι ο

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

που βέβαια μετατίθεται με την χαμιλτονιανή που στην περίπτωση μας ($\mathbf{p} = 0$) είναι απλά βm (είναι και οι δύο διαγώνιοι). Οι δύο καταστάσεις έχουν ιδιοτιμές ± 1 .

$$\Gamma \text{ενικεύοντας } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \text{ με την ιδιότητα } \left[\frac{1}{2}\Sigma_x, \frac{1}{2}\Sigma_y \right] = i\frac{1}{2}\Sigma_z$$

και $\left(\frac{1}{2}\Sigma\right)^2 = \frac{3}{4}I$. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιότητες ενός κβαντομηχανικού τελεστή στροφορμής με $j = 1/2$. Επομένως, ο

$\frac{1}{2}\Sigma$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο spin $1/2$ κατάλληλος τελεστής για το σύστημα ρεσμίας. Ακριβώς, για το σύστημα ρεσμίας η εξίσωση Dirac περιγράφει ένα σωματίδιο με spin $1/2$.

Περιμένουμε να μην αλλάξει το spin αν πάμε σε σύστημα με $\mathbf{p} \neq 0$. Αλλά τότε, ο τελεστής $\frac{1}{2}\Sigma$ δεν είναι πια κατάλληλος γιατί δεν μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας, που τώρα είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Βέβαια συνεχίζουμε να έχουμε 2 ανεξάρτητες καταστάσεις. Οπότε θα πρέπει να υπάρξει τελεστής που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Η επιλογή δεν είναι μοναδική αλλά μια χρήση είναι ο τελεστής της ελκρότητας

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

που πρόγματι μετατίθεται με την $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή

$$H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \quad [H, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ είναι ± 1 (δύο φορές). Ο $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ έχει ιδιοτιμές ± 1 και αν $U^T A U = A_{diag}$ τότε και

$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{diag} & 0 \\ 0 & A_{diag} \end{pmatrix}$$

Επομένως, ψάχνουμε να βρούμε την μορφή του ϕ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix}$$

ή $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi = \pm\phi$. Ας ονομάσουμε $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi_+ = \phi_+$ και $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi_- = -\phi_-$. Ας βρούμε τα ϕ_+ και ϕ_- . Παρατηρούμε ότι το $(1 + \sigma \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή $+1$ για αυθαίρετο ϕ

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}(1 + \sigma \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi = (\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}} + 1)\phi$$

Όμοια, το $(1 - \sigma \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή -1 . Επομένως, το τυχαίο $\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ και αν επιλέξουμε το αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\phi_+ = (1 + \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Βέβαια χρειάζεται να νορμαλίσουμε το ϕ_+ . Εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά νορμαλισμού είναι $N = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \theta/2}$. Επομένως, το νορμαλισμένο ϕ_+ γράφεται

$$\phi_+ = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

Για το ϕ_- βολαεύει να επιλέξουμε για ανθάρπτο $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και

έχουμε εντελώς ανάλορα

$$\phi_- = (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_- = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ο νορμαλισμός είναι ο ίδιος και καταλήγουμε

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (-\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\phi_+^\dagger \phi_- = 0$. Τα ϕ_+ και ϕ_- είναι νορμαλισμένα και ορθογώνια. Επίσης για $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ή $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, 1)$, οπότε

έχουμε $\theta = 0$ τα ϕ_+ και ϕ_- γίνονται

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός του spinor σε χωρικές στροφές

Ας θεωρήσουμε μια απλή στροφή γύρω από τον άξονα x , με γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ξεκινάμε με ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η οριμή είναι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Τότε τα ϕ_{\pm} είναι

τα $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Η ορμή μετασχηματίζεται ως
 διάνυσμα στην στροφή

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

δηλαδή, $p'_x = p_x = 0$, $p'_y = p \sin \theta$ και $p'_z = p \cos \theta$. Στο νέο σύστημα, τα ϕ_{\pm} θα πρέπει να υπακούουν αντίστοιχες σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \phi'_+, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_- = -\phi'_-$$

δηλαδή, για το ϕ'_+

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \phi'_+ = \phi'_+$$

Γράφοντας το $\phi'_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$a \cos \theta - b \sin \theta = a \rightarrow b = ia \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} \end{pmatrix}$. Νοηματοδοτώντας παίρνουμε

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ i \sin \theta/2 \end{pmatrix}. \text{ Αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί ως}$$

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ i \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \phi_+$$

$$\text{όπου το } \phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Ακριβώς ανάλογα έχουμε για το } \phi_-$$

$$\phi'_- = \begin{pmatrix} i \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \phi_-$$

όπου το $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι τα ϕ_+ και ϕ_- παραμένουν ορθογώνια. Δηλαδή έχουμε και εδώ μια “στροφή”, μόνο που γωνία είναι $\theta/2$. Για να το γενικεύσουμε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
 e^{i\sigma_x\theta/2} &= 1 + i\sigma_x\theta/2 + \frac{1}{2!}(i\sigma_x\theta/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\sigma_x\theta/2)^3 + \dots \\
 &= 1 + i\sigma_x\theta/2 - \frac{1}{2}(\theta/2)^2 - \frac{1}{3!}i\sigma_x(\theta/2)^3 + \dots \\
 &= \cos\theta/2 + i\sigma_x\sin\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

η πιο γενικά, αν η στροφή θ είναι γύρω από τον άξονα που

ορίζεται από το μοναδιαίο δίδνυσμα \hat{n}

$$\phi' = e^{i\sigma \cdot \hat{n}\theta/2} \phi$$

Ο πίνακας $e^{i\sigma \cdot \hat{n}\theta/2} \phi \equiv U$ είναι μοναδιακός ($U^\dagger U = U U^\dagger = 1$), οπότε το “μήκος” $\phi^\dagger \phi$ διατηρείται. Αυτός ο κανόνας, παρ’ όλο που ξεκινησαμε με ειδικά ϕ που είναι ιδιοκαταστάσεις της ελκρότητας, είναι γενικός για κάθε spinor.

Ο spinor του Dirac, με 4 συνιστώσες, γράφεται τώρα, για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις ϕ_+ και ϕ_-

$$\omega_+ = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \phi_+ \end{pmatrix}, \quad \omega_- = \begin{pmatrix} \phi_- \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \phi_- \end{pmatrix}$$

Δηλαδή το πάνω και το κάτω τμήμα μετασχηματίζονται με τον ίδιο

τρόπο (το $\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$ είναι βαθμωτό). Άρα γενικεύουμε τον μετασχηματισμό για τον spinor του Dirac

$$\omega' = e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ και ισχύει για κάθε τετρα-spinor. Έτσι η πιθανότητα

$$\rho' = \psi'^{\dagger}\psi' = \omega'^{\dagger}\omega' = \omega^{\dagger}e^{-i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}e^{i\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega = \omega^{\dagger}\omega$$

Οι αρνητικές λύσεις της εξίσωσης Dirac

Είχαμε ξεκινήσει από την εξίσωση του Dirac με τη μορφή

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi \\ E\chi = -m\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi \end{cases}$$

Για $E > 0$ γνωρίζουμε ήδη τον spinor $\omega = \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi^s \end{pmatrix}$, $s = 1, 2$.

Για να νορμαλίσουμε $\omega^\dagger \omega = 2E$. Οπότε (τα ϕ^s είναι νορμαλισμένα)

$$N^2 \left(1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E+m)^2} \right) = 2E \rightarrow N^2 \frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2} = 2E$$

$$N = \sqrt{E+m}$$

και τότε $u(p, s) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi^s \end{pmatrix}$, $s = 1, 2$ και

$$\psi = e^{-ip \cdot x} u(p, s).$$

Για τις αρνητικές λύσεις, στο σύστημα ηρεμίας $\mathbf{p} = 0$, θα έχουμε $E = -m$ οπότε

$$-m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

οπότε $\phi = 0$ και έχουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις

$$\omega(E < 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^s \end{pmatrix}.$$

Για $\mathbf{p} \neq 0$ θα έχουμε $E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi \rightarrow \phi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E-m}\chi$, οπότε

$$\omega(E < 0) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E-m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E|+m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

Θυμίζουμε τα αντισωματίδια που πηγαίνουν αντίθετα στο χρόνο ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$), οπότε ορίζουμε

$$\omega(E < 0, -\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο νορμαλισμό $N = \sqrt{|E| + m}$ έχουμε

$$v(p, s) = \sqrt{|E| + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

και $\psi = v(p, s)e^{-i(-p) \cdot x} = v(p, s)e^{ip \cdot x}$ με $p = (E, \mathbf{p})$. Η επιλογή

είναι $\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ γιατί η απουσία ενός άνω spin

ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια ισοδυναμεί με παρουσία ποζιτρονίου με κάτω spin με θετική ενέργεια.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή $1/2$. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλιτονιανή δεν μετατίθεται με τη στροφορμή \mathbf{L} αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\Sigma$

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση η “κάτω” συνιστώσα του 4-spinor είναι κατά (v/c) μικρότερη από την “άνω” συνιστώσα: $m + E \sim 2m \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) / (2m) \sim v$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi_A$$