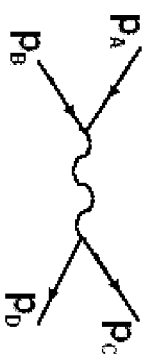


Ο διαδότης

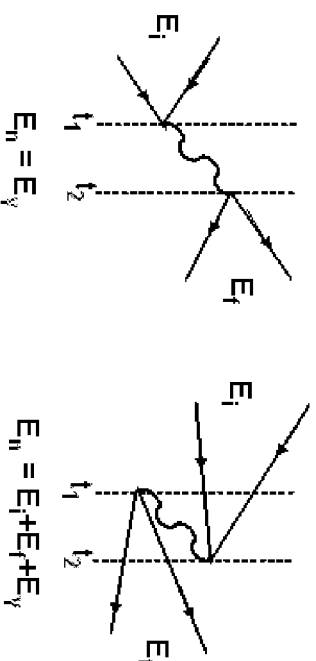
Έχουμε δει ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δει ότι

$$T_{fi} = -i \sum V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$



Πώς θα πάμε από το $1/(E_i - E_n)$ στο $1/(p_A + p_B)^2$. Ας θυμηθούμε ότι το διάγραμμα Feynman είναι το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων



Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος θα είναι

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - (2E_i + E_\gamma)} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni}$$

Το $2E_\gamma$ σχετίζεται με τον νορμαλισμό. Η παραπάνω μέθοδος είναι η λεγόμενη “παλαιά μέθοδος διαταραχών”. Σ’ αυτήν η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά όχι η ενέργεια (πρόγραμμα μη συναλλοίωτο). Τα σωματίδια είναι πάντα στο “κέλυφος μάζας” (mass shell), δηλαδή το τετράγωνο της τετρορμής είναι ίσο με το τετράγωνο της μάζας.

Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \quad \text{και} \quad E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + \mathbf{p}_\gamma^2$$

όπου βάλουμε μιά μάζα στο φωτόνιο για την περίπτωση που το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα. Ο όρος $(p_A + p_B)^2$ είναι η συνολική μάζα. Επίσης $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$. Οπότε, ο παρονομαστής της

προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$E_i^2 - E_\gamma^2 = (p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2 = q^2 - m_\gamma^2$$

που στην περίπτωση του άμαζου φωτονίου γίνεται απλά q^2 .

Δηλαδή, αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα παίρνουμε συναλλοίωτο αποτέλεσμα. Μπορούμε να δούμε το ίδιο γεγονός και στην σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.



Αριστερά έχουμε το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων όπου η τριπορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή και για το ενδιάμεσο σωματίδιο ισχύει $p^2 = m^2$. Αλλά η ενέργεια δεν

διατηρείται σε κάθε κορυφή. Στο δεξιό διάγραμμα η τετροπμή (ορμή και ενέργεια) διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά $p^2 \neq m^2$.

Η ΕΙΣΙΣΤΑΣΗ DIRAC

... τα κουάρκ και τα λεπτόνια όμως έχουν spin $1/2$ και δεν περιγράφονται από την απλή κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την Klein-Gordon. Πρέπει να βρούμε μια εξίσωση με λύσεις που να μπορούν να περιγράφουν το spin των σωματιδίων και αντισωματιδίων.

Ο Dirac προστάθηκε να γράψει μια εξίσωση γραμμική ως προς το $\partial/\partial t$, ετοιμένως γραμμική και ως προς ∇ (συναλλοιώτητα). Η πιο γενική μορφή είναι

$$H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m) \psi = 0$$

Οι παράμετροι \mathbf{a} και β πρέπει να είναι κατάλληλοι ώστε για το

ελεύθερο σωματίδιο να πληρούται η σχέση

$$H^2\psi = (P^2 + m^2)\psi$$

Βέβαια, η αρχική προσπάθεια του Dirac ήταν να αποφύγει την αρνητική πυκνότητα πιθανότητας. Αλλά αυτό για μας δεν είναι πλέον πρόβλημα. Αντίθετα, έχουμε το κέρδος περιγραφής των αντισωματιδίων. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (a_i P_i + \beta m)(a_j P_j + \beta m)\psi = \\ &= ((a_i P_i)(a_j P_j) + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m)\psi = \\ &= \left(a_i^2 p_i^2 + \underbrace{(a_i a_j + a_j a_i)}_{i \neq j} P_i P_j + \beta^2 m^2 + (a_i P_i)\beta m + \beta(a_j P_j)m \right) \psi \end{aligned}$$

Επομένως, θα πρέπει

$$a_i^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i \beta + \beta a_i = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, 3$$

$$\beta^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

Επομένως, τα a_i και β δεν μπορεί να είναι απλοί αριθμοί. Θα πρέπει να πάμε σε πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ που γίνεται πια διάνυσμα με συνιστώσες.

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1 .

Η ελάχιστη διάσταση, λοιπόν, είναι 4. Η περίπτωση 2 διαστάσεων πρέπει να απορριφθεί διότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 ανεξάρτητοι 2×2 πίνακες (του Pauli) ενώ εμείς χρειαζόμαστε 4

πίνακες. Μια άπο τις δυνατές αναπαράσεις των a_i και β είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Pauli-Dirac (όπου σ οι πίνακες του Pauli)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{όπου}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι αυτή του Weyl

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η επιλογή των a_i και β δεν είναι μοναδική. Θυμίζοντας ότι ένας μοναδιαίος μετασχηματισμός διατηρεί τις αντισυμβατικές ιδιότητες, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί

$$a'_i = U a_i U^{-1}, \quad \beta' = U \beta U^{-1}$$

όπου U ένας μοναδιαίος πίνακας 4×4 , δίνει μια νέα αναπαράσταση των a_i και β . Φυσικά, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση. Το διάνυσμα ψ έχει τέσσερις συνιστώσες και ονομάζεται spinor του Dirac.

Συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Πίνακες γ

Από την $H\psi = (\mathbf{aP} + \beta m)\psi$ παίρνουμε, πολλαπλασιάζοντας επί β ,

$$\beta i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\beta \mathbf{a} \cdot \nabla + \beta^2 m) \psi \rightarrow \left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + i\beta \mathbf{a} \cdot \nabla \right) \psi = \beta^2 m \psi \rightarrow$$

$$(\beta, \beta\mathbf{a}) \left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\nabla \right) \psi = m\psi \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

όπου ορίσαμε $\gamma^\mu = (\beta, \beta\mathbf{a})$ τους πίνακες γ . Αυτή είναι η συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Αντιστοιχεί σε τέσσερις διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_k \left(i(\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m\delta_{jk} \right) \psi_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των \mathbf{a} και β πινάκων, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I$$

και επίσης τις σχέσεις

$$\gamma^0 = \beta \rightarrow (\gamma^0)^2 = 1, \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$

$$\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k \beta = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -1, \quad k = 1, 2, 3$$

ή, πιο γενικά $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

Διατηρήσιμο ρεύμα και η συζυγής εξίσωση Dirac

Η ερμητιανή συζυγής της εξίσωση Dirac

$$(i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^k \partial_k - m)\psi = 0 \text{ είναι}$$

$$-i(\partial_t \psi^\dagger) \gamma^{0\dagger} - i(\partial_k \psi^\dagger) \gamma^{k\dagger} - m\psi^\dagger = 0$$

$$-i(\partial_t \psi^\dagger) \gamma^0 + i(\partial_k \psi^\dagger) \gamma^k - m\psi^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με γ^0 και χρησιμοποιώντας ότι

$$\gamma_0 \gamma_k = -\gamma_k \gamma_0$$

$$-i\partial_t(\psi^\dagger \gamma^0) \gamma^0 - i\partial_k(\psi^\dagger \gamma^0) \gamma^k - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0$$

$$i\partial_t \bar{\psi} \gamma^0 + i\partial_k \bar{\psi} \gamma^k + m\bar{\psi} = 0 \rightarrow i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

όπου ορίσαμε $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ που είναι ένας spinor γραμμή.

Τώρα χρησιμοποιώντας την $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$ επί $(\bar{\psi} \cdot)$

$$\text{και την } i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \text{ επί } (\cdot \psi)$$

και αθροίζοντας παίρνουμε

$$i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi + i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + m\bar{\psi} \psi = 0 \rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

Επομένως, ορίζουμε το μέγεθος πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ και βέβαια τώρα

$$\rho = j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \geq 0$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας). Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το j^μ είναι τετραδίδνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδίδνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της