Το $F(\mathbf{q}=0)=1$. Για μικρές τιμές του $|\mathbf{q}|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό

$$F(\mathbf{q}) = \int \left(1 - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2} + \ldots \right) \rho(\mathbf{x})\, d^3x$$

Αν $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, δηλαδή σφαιρικά συμμετρική, ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, γιατί επιλλέγοντας $\mathbf{q} = (0,0,q)$, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} = qz = qr\cos\theta$ και $d^3x = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

$$\int \mathbf{q}\cdot\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\, d^3x = \int qr\cos\theta\rho(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

Αλλά

$$\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$$

Ο τρίτος όρος γίνεται

$$-\int \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2}\rho(r)d^3x = -\frac{1}{2}\int \sum_i (q_i x_i)^2 \rho(r) d^3x$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\frac{1}{3}\int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\rho(r)\, d^3x = \int x_i^2 \rho(r)\, d^3x, \quad i = 1, 2, 3$$

οπότε

$$-\frac{1}{2}\int \sum (q_i^2 x_i^2)\rho(r)d^3x = -\frac{1}{2}\int (q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_1^2 + q_3^2 x_1^2)\rho(r)d^3x =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int x_1^2\rho(r)d^3x = -\frac{1}{2}\left(\sum q_i^2\right)\int \frac{1}{3}\left(\sum x_i^2\right)\rho(r)d^3x =$$

$$-\frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2\int r^2\rho(r)d^3x = -\frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

όπου $< r^2 >$ είναι η μέση τιμή του r^2. Οπότε

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6}\,\mathbf{q}^2 < r^2 >$$

Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2. Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr}, δείξτε ότι ο παράγοντας μοφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

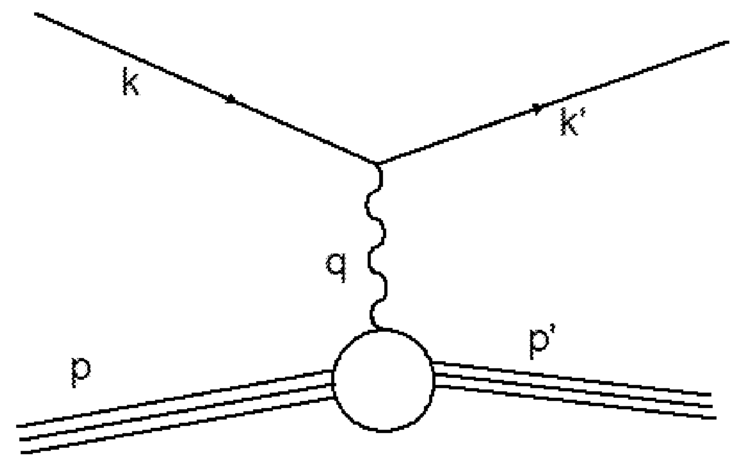
Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι “στατικό” και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ΄ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρεί για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\,\frac{E'}{E}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

όπου

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1+\frac{2E}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά όπως με την σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου, θα γράφαμε



$$T_{fi} = -i \int j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu \, d^4 x$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και θεωρώντας πια το πρωτόνιο ως ΜΗ σημειακό

$$j_\mu = -e\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) e^{-i(k-k')x}$$

$$J^\mu = e\bar{u}(p')[...]u(p) e^{-i(p-p')x}$$

Ακριβώς, γράφοντας [...] δείχνουμε ότι το πρωτόνιο δεν είναι σημειακό και δεν μπορούμε απλά να γράφουμε γ^μ. Παρ' όλα αυτά, το J^μ θα πρέπει να είναι ένα τετραδιάνυσμα, και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή ενός τετραδιανύσματος χρησιμοποιώντας τις ορμές p, p' και q καθώς και τους γ πίνακες. Μπορούμε, τελικά, να φτιάξουμε δύο ανεξάρτητες ποσότητες: μια ανάλογη του γ^μ και μια δεύτερη ανάλογη του $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το J^μ είναι $(q = p' - p)$

$$F_1\gamma^\mu + F_2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3 i\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu + F_4 q^\mu + F_5(p+p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2

Οπότε, γράφουμε

$$[...] = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \tag{24}$$

όπου κ είναι η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου. Προσέξτε ότι το q^2 είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή στην κορυφή του πρωτονίου ($p^2 = p'^2 = M^2$). Επίσης, το $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητο μιας και
$(q+p)^2 = p'^2 \rightarrow M^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2$. Αν το $q^2 \rightarrow 0$, δηλαδή όταν το φωτόνιο έχει μεγάλο μήκος κύματος, δεν μπορούμε να διακρίνουμε δομή στο πρωτόνιο και παρατηρούμε σωματίδιο με φορτίο e και μαγνητική ροπή $(1+\kappa)/2M$. Πειραματικά, το $\kappa = 1.79$. Θυμηθείτε ότι

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{e}{2M}\bar{u}(p')(p+p')^\mu u(p) + \frac{e}{2M}\bar{u}(p') i\sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p)$$

Οπότε, ο όρος γ^μ στην Εξ.24 περιέχει την "κανονική" ροπή ενώ ο άλλος όρος προσφέρει την ανώμαλη ροπή του πρωτονίου, και θα πρέπει να επιλέξουμε, σ' αυτό το όριο,

$$F_1(q^2 \to 0) = 1, \qquad F_2(q^2 \to 0) = 1$$

Για το νετρόνιο, οι αντίστοιχες τιμές είναι $F_1(q^2 \to 0) = 0$, $F_2(q^2 \to 0) = 1$ και $\kappa_n = -1.91$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής, την Εξ.(24), θα πάρουμε

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\rm lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2}F_2^2\right)\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2}\left(F_1+\kappa F_2\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

Αυτή είναι η σχέση Rosenbluth. Αποτελεί μια παραμετροποίηση της άγνοιάς μας για την δομή του πρωτονίου. Παρατηρήστε ότι για $F_1 = 1$ και $\kappa = 0$ καταλήγουμε στην σκέδαση από σημειακό στόχο. Πειραματικά οι παράγοντες μορφής μετριούνται σε σκέδαση (συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του ηλεκτρονίου). Στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο γραμμικοί συνδυασμοί των F

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \qquad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

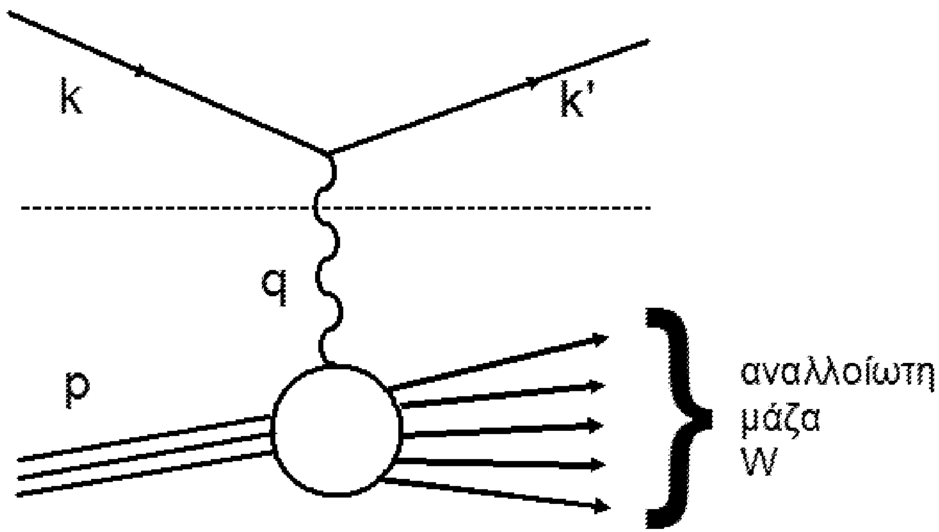
και η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

με $\tau = -q^2/2M$. Προσέξτε ότι με αυτήν την αλλαγή δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι του $G_M G_E$.

Ανελαστική Σκέδαση $ep \to eX$

Τι γίνεται όταν μεγαλώσει η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο; Δηλαδή όταν το $-q^2$ είναι μεγάλο. Για μεσαία $-q^2$ παρουσιάζονται διάφορα σωματίδια-συντονισμοί (resonances): $ep \to e\Delta^+ \to ep\pi^0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η αναλλοίωτη μάζα των προϊόντων $W^2 \simeq M_\Delta^2$. Για πιο μεγάλη μεταφερόμενη ενέργεια το πρωτόνιο "σπάει" και χρειαζόμαστε ένα καινούργιο φορμαλισμό για να περιγράψουμε το γεγονός.



Στην ελλαστική σκέδαση αντικαταστήσαμε, στο αναλλοίωτο πλάτος, το $\bar{u}\gamma^{\mu}u$ του μιονίου με $\bar{u}\Gamma^{\mu}u$ και χρησιμοποιήσαμε την πιο γενική μορφή για το Γ^{μ}. Τώρα ούτε αυτό γίνεται. Θα πρέπει να πάμε άμεσα στην ενεργό διατομή (δηλαδή στο τετραγωνισμένο αναλλοίωτο πλάτος) και αντί

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu} \left(L^{(\mu)}\right)^{\mu\nu}$$

που ισχύει για την περίπτωση του μιονίου, να γράψουμε

$$d\sigma = L^{(e)}_{\mu\nu}\, W^{\mu\nu}$$

Το λεπτονικό κομμάτι παραμένει το ίδιο. Το $W^{\mu\nu}$ παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια για την μορφή του ρεύματος στην μεριά του πρωτονίου. Και πάλι θα πρέπει να γράψουμε το $W^{\mu\nu}$ με την πιο γενική μορφή χρησιμοποιώντας τα p^{μ}, q^{μ} και το $g^{\mu\nu}$. Προσέξτε ότι $p' = p + q$ και επίσης δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γ πίνακες μιας και γράφουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους όπου έχουμε αθροίσει στα spin. Επομένως γράφουμε

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} \left(p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu \right)$$

Κρατήσαμε το $W^{\mu\nu}$ συμμετρικό στους δείκτες μιας και το $L^{(e)}_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικό. Κάθε μη συμμετρικό κομμάτι του $W^{\mu\nu}$ δεν θα συνεισέφερε στο $d\sigma$. Τα W θα εξαρτώνται από τα μόνο δύο βαθμωτά μεγέθη που σχετίζονται με την κορυφή του πρωτονίου. Μπορούμε να επιλέξουμε τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Η αναλλοίωτη μάζα της τελικής κατάστασης συνδέεται με τις δύο παραπάνω μεταβλητές

$$W^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 + 2M\nu + q^2$$

Η διατήρηση του ρεύματος οδηγεί στις σχέσεις

$$q^\mu L^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu L^{(e)}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{και} \quad q^\mu W^{(e)}_{\mu\nu} = q^\nu W^{(e)}_{\mu\nu} = 0$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών W. Οπότε, ξαναγράφουμε

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2, \qquad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2 W_2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα W_1 και W_2 εξαρτώνται από τα q^2 και ν.
Συνήθως χρησιμοποιούνται, αντ΄ αυτών, οι x και y

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

όπου k η (τετρ)ορμή του εισερχόμενου ηλεκτρονίου.
Υπολογίζουμε τώρα την ενεργό διατομή $ep \to eX$.

$$L^{\mu\nu}_{(e)} W_{\mu\nu} = 4W_1 (k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} \left(2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k'\right)$$

που στο σύστημα εργαστηρίου γίνεται ($m_e = 0$)

$$L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{lab}} = 4EE' \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Άσκηση 46 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Τελικά η ενεργός διατομή γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\Big|_{\mathrm{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \tag{25}$$