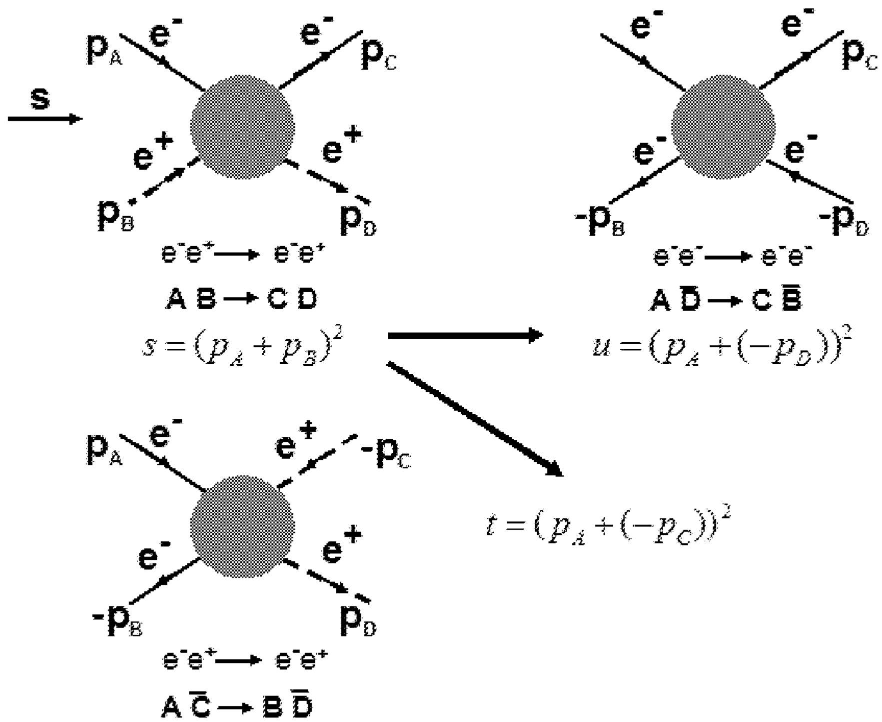
Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

Αναλλοίωτες μεταβλητές

Για την σκέδαση $AB \to CD$ έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ., στο Κ.Μ. έχουμε την ορμή και τη γωνία σκέδασης). Αλλά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε το $\mathcal{M}$ ως συνάρτηση ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις τέσσερις ορμές μπορούμε να φτιάξουμε 3 αναλλοίωτες ποσότητες: $p_A p_C$, $p_A p_D$ και $p_D p_B$, από τις οποίες βέβαια μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε συνήθως τις σταθερές του

Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2, \qquad t = (p_A - p_C)^2, \qquad u = (p_A - p_D)^2$$



Σχήμα 4:

Άσκηση 13 Δείξτε ότι $s+t+u=\sum m_i^2$

Για να αναπαραστήσουμε τις επιτρεπτές (φυσικές) περιοχές των s, t και u χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα δύο διαστάσεων, Σχ.5. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος ισο με $\sum_i m_i^2$. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα της γεωμετρίας ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τριγώνου.
Για την σκέδαση $e^+e^- \to e^+e^-$, στο Κ.Μ., έχουμε

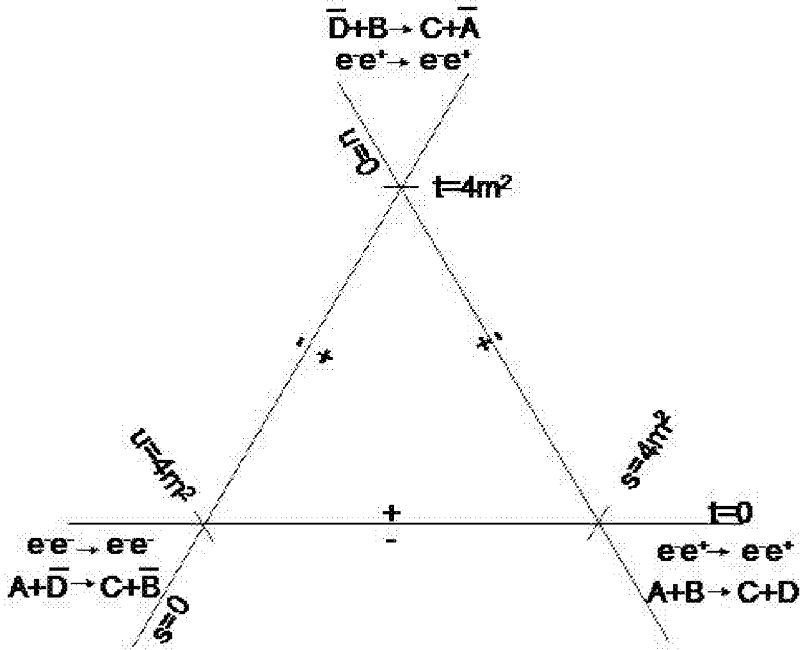
$$s=(p_1+p_2)^2=(E+E,\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_i)^2=4E^2=4(m^2+k^2)$$

$$t=(p_1-p_3)^2=(E-E,\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_f)^2=-(2k^2-2k^2\cos\theta)$$

$$u=(p_1-p_4)^2=(E-E,\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_f)^2=-(2k^2+2k^2\cos\theta)$$

Τα σωματίδια έχουν στο Κ.Μ. έχουν ίδιο μέτρο ορμής,

$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = k$ και επειδή έχουν ίδια μάζα έχουν και ίδια ενέργεια. Άρα, $s \geq 0$ και $t, u \leq 0$. Αλλά επειδή $s + t + u = 4m^2$ συμπεραίνουμε ότι $s \geq 4m^2$.



Σχήμα 5:

Βλέπουμε από το Σχ.4 ότι για την $e^+e^- \to e^+e^-$, η μεταβλητή $u = (p_A - p_d)^2$ αποτελεί την s μεταβλητή της $e^-e^- \to e^-e^-$

$$s_{e^+e^- \to e^+e^-} = u_{e^-e^- \to e^-e^-}$$

οπότε, για την $e^-e^- \to e^-e^-$, η φυσική περιοχή είναι $t, s \leq 0$ και $u \geq 4m^2$

Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam.

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.12 είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s, t, u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u, t, s)$$

Ας υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ως συνάρτηση των σταθερών s, t και u. Από τη Εξ.11 έχουμε

$$-(p_A + p_C)(p_B + p_D) = -(2p_A - p_A + p_C)(p_B + p_D) =$$
$$= -(2p_A + p_B - p_D)(p_B + p_D) = -2p_A(p_B + p_D) + p_B^2 - p_D^2$$
$$= -2p_A(p_B + p_D)$$

και

$s - u = (p_A + p_B)^2 - (p_A - p_D)^2 = 2p_A p_B + 2p_A p_d = 2p_A(p_B + p_D)$
Όμοια, $t - u = (p_A - p_C)^2 - (p_A - p_D)^2 = -2p_A p_C + 2p_A p_d =$ $2p_A(-p_C + p_D)$, και

$$(p_A - p_B)(p_C - p_D) = (2p_A - p_A - p_B)(p_C - p_D) =$$
$$= (2p_A - p_C - p_D)(p_C - p_D) = -2p_A(-p_C + p_d) - p_C^2 + p_B^2 =$$
$$= -2p_A(-p_C + p_D)$$

κια βέβαια $t = (p_D - p_B)^2$ και $s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$.
Οπότε η Εξ.11 παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}_{e^+e^-} = e^2 \left(\frac{s-u}{t} + \frac{t-u}{s} \right) \tag{13}$$

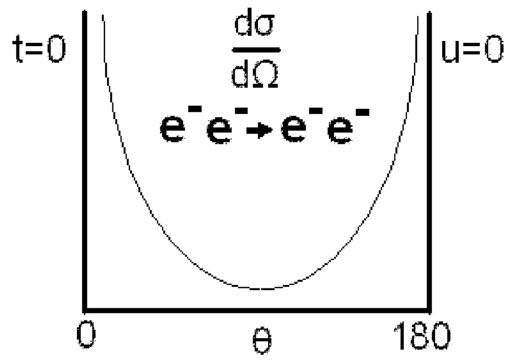
Γιατί το πλάτος παρουσιάζει συμμετρία στην εναλλαγή $s \longleftrightarrow t$;

$$AB \to CD \qquad A\bar{C} \to \bar{B}D$$
$$e^+e^- \to e^+e^- \qquad e^+e^- \to e^+e^-$$

Δηλαδή, στην περίπτωσή μας, η $AB \to CD$ και η $A\bar{C} \to \bar{B}D$ είναι η ίδια σκέδαση. Οι σκεδάσεις $AB \to CD$ και $A\bar{C} \to \bar{B}D$ έχουν συσχέτιση $s \longleftrightarrow t$. Αντίστοιχα, η σκέδαση $A\bar{D} \to \bar{B}C$ (δηλαδή $e^+e^+ \to e^+e^+$) και η $\bar{C}B \to \bar{A}D$ (δηλαδή $e^-e^- \to e^-e^-$) έχουν σχέση με την αρχική $s \longleftrightarrow u$. Δηλαδή το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^-e^- \to e^-e^-$ γράφεται αμέσως, χρησιμοποιώντας την Εξ(13),

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right) \tag{14}$$

Βλέπουμε ότι το αναλλοίωτο πλάτος, άρα και η ενεργός διατομή, απειρίζονται για $t \to 0$ και $u \to 0$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το τεράγωνο της τετρορμής του εικονικού φωτονίου τείνει στο μηδέν και ουσιαστικά δεν έχουμε αλληλεπίδραση.



Ο διαδότης

Έχουμε δεί ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δεί ότι

$$T_{fi} = -i \sum V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi\delta(E_f - E_i)$$