Η ενεργός διατομή και το αναλλοίωτο πλάτος

Για να συνεχίσουμε θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον νορμαλισμό της κυματοσυνάρτησης $\phi = Ne^{-ipx}$. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι $\rho = 2E|N|^2$. Ακριβώς, το ότι η ρ είναι ανάλογη της ενέργειας E, είναι αυτό που χρειάζεται για να παραμείνει η πιθανότητα σχετικιστικά αναλλοίωτη: ο όγκος d^3x συστέλλεται κατά Lorentz και η ενέργεια E αποκαθιστά αυτή την μεταβολή στο γινόμενο $d^3x\,\rho$. Επομένως, είναι προτιμότερο να νορμαλίσουμε, αντί του "ένα σωματίδιο σε V", σε "$2E$ σωματίδια σε όγκο V"

$$\int_V d^3x\,\rho = 2E \qquad \text{αντί του} \qquad \int d^3x\,\rho = 1$$

οπότε έχουμε ότι $N = 1/\sqrt{V}$.

Τρία βήματα για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής:

1. Ο "ρυθμός μετάπτωσης ανά μονάδου όγκου", για την αλληλεπίδραση $A + B \to C + D$, είναι

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{VT}$$

όπου T είναι η χρονική διάρκεια της αλληλεπίδρασης και, βέβαια,

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$

Ο τετραγωνισμός της δ, σε τέσσερις διαστάσεις, θα δώσει

$$\left(\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\right)^2 =$$

$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(p_C+p_D-p_A-p_B)} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}(VT)\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

Επομένως,

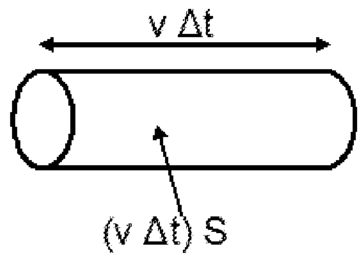
$$W_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^4\right]^2$$

2. Για να συγκρίνουμε πειράματα πρέπει να ‘‘απομονώσουμε’’ την εξάρτηση από την ροή των εισερχομένων σωματιδίων και από την πυκνότητα των σωματιδίων του στόχου.

α) Ροή προσπιπτόντων σωματιδίων

$$\frac{\text{αριθμ. σωματ.}}{S\,\Delta t} = \frac{(\text{πυκν.})\cdot(\text{όγκος})}{S\,\Delta t} =$$

$$\frac{2E_A/V \cdot v_A\,\Delta t S}{S\,\Delta t} = \frac{2E_A}{V} v_A$$



β) Πυκνότητα σωματιδίων στόχου $2E_B/V$

Σχήμα 1:

3. Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλες τις επιτρεπτές καταστάσεις των τελικών σωματιδίων. Υποθέτουμε την ‘‘σύγκρουση’’ ενός σωματιδίου του στόχου με ένα σωματίδιο της δέσμης σε όγκο $V = L^3$ $(-L/2 \leq x, y, z \leq) L/2$. Επιβάλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες στις κυματοσυναρτήσεις

$$\Psi(x-L/2,y,z)=\Psi(x+L/2,y,z)$$
$$\Psi(x,y-L/2,z)=\Psi(x,y+L/2,z)$$
$$\Psi(x,y,z-L/2)=\Psi(x,y,z+L/2)$$

και στο τέλος $L\to\infty$. Αλλά $\Psi=e^{-\mathbf{kx}}$, και επομένως $k_x(x+L/2)=k_x(x-L/2)+2\pi n_x$ με n_x ακέραιο. Άρα $k_x=(2\pi/L)n_x$ και ανάλογα $k_y=(2\pi/L)n_y$ και $k_z=(2\pi/L)n_z$. Αυτή είναι ακριβώς η κβάντωση της ορμής.

Επομένως, ο αριθμός των δυνατών ακεραίων Δn_x στην περιοχή k_x, k_x+dk_x είναι $\Delta n_x=(L/2\pi)dk_x$ και όμοια για τις άλλες συνιστώσες. Για τις πιθανές καταστάσεις στην περιοχή $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}+\mathbf{dk}$

είναι

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

Για το δικό μας νορμαλισμό ($2E$ σωματίδια στον όγκο V), θα έχουμε $\frac{V}{2E(2\pi)^3} d^3k$. Αν ορίσουμε λοιπόν ως

$$\text{ενεργός διατομή } \sigma = \int \frac{W_{fi}}{(\text{αρχική ροή})} (\text{αριθμ. τελ. καταστάσων})$$

μπορούμε να γράψουμε (θεωρώντας το σωματίδιο Β ακίνητο)

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2 \frac{1}{V^4}}{\frac{2E_A v_a}{V} \frac{2E_B}{V}} \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} =$$

$$= \frac{1}{F} |\mathcal{M}|^2 dQ \qquad (10)$$

όπου

$$F = v_a 2E_A 2E_B,$$

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

Ο όρος $d^3p/2E$ είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι και το F είναι επίσης. Να σημειώσουμε ότι για γενική κρούση (το B να μην είναι ακίνητο) θα πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση $v_A \to |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$.
Ας δούμε ξανά τι μας λέει η βασική σχέση: το γινόμενο

$$\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

μας δίνει τον αριθμό των σκεδαζομένων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και όγκου. Για να κάνουμε την ενεργό διατομή ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο πείραμα, διαιρούμε με την ροή των αρχικών σωματιδίων (που για ακίνητο σωματίδιο είναι η πυκνότητά του). Σχηματικά

$$\frac{\text{αριθμ.σκεδαζ.σωματ.}}{(\text{όγκο})(\Delta t)} = (\text{πυκν.σωματ.στόχου})(\text{πυκν.σωματ.}\cdot v_A)\sigma$$

$$n_S = (n_t)(n_A v_A)\sigma \quad \text{διαστατικά } 1/(L^3 T) = (1/L^3)(1/L^3 \cdot L/T)\sigma$$

όπου, στην τελευταία σχέση, η πρώτη παρένθεση αντιστοιχεί στον στόχο και η δεύτερη στη δέσμη. Πάντοτε το n_S θα είναι ανάλογο του $(n_t)(n_A v_A)$. **Στο σ κρύβεται όλη η Φυσική**. Διαστατικά, το σ είναι εμβαδόν(L^2). Γι΄ αυτό και το προσομοιάζουμε ως την ‘‘ενεργό επιφάνεια’’ της δέσμης που βλέπει ο στόχος, δηλαδή η επιφάνεια αλληλεπίδρασης των A και B.

Άσκηση 8 Δείξτε ότι η έκφραση $F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B$ είναι, για $\mathbf{p}_A$ και $\mathbf{p}_B$ συγγραμικά και με αντίθετη φορά, ίση με $4\left(|\mathbf{p}_A|E_B + |\mathbf{p}_B|E_A\right)$ και στη συνέχεια ότι είναι ίση με $4\left[\left(p_A^\mu p_{B\mu}\right)^2 - m_A^2 m_B^2\right]^{1/2}$, οπότε και σχετικιστικά αναλλοίωτη.

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \to C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής, εξ.10, γίνονται

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega, \qquad \text{και} \quad F = 4 p_i \sqrt{s}$$

όπου $d\Omega$ είναι η στερεά γωνία γύρω από το p_C, $s = (E_A + E_B)^2$, $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| \equiv p_i$ και $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| \equiv p_f$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ.

γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}$$

Άσκηση 10 Δείξτε ότι για υψηλές ενέργειες, η ενεργός διατομή για την σκέδαση "ηλεκτρονίου"-"μιονίου" δίνεται από τη σχέση

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

Ο ρυθμός διάσπασης ως συνάρτηση του $|\mathcal{M}|$

Για διασπάσεις της μορφής $A \to 1+2+3+...+n$ ακολουθούμε την ίδια μέθοδο

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A}|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_1(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_A - p_1 - p_2 - \ldots - p_n)$$

Το $d\Gamma$ ονομάζεται διαφορικός ρυθμός (differential rate).

Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

Ο ολικός ρυθμός διάσπασης είναι το άθροισμα των Γ για όλες τις δυνατές διασπάσεις του συγκεκριμένου σωματιδίου. Βέβαια, το Γ

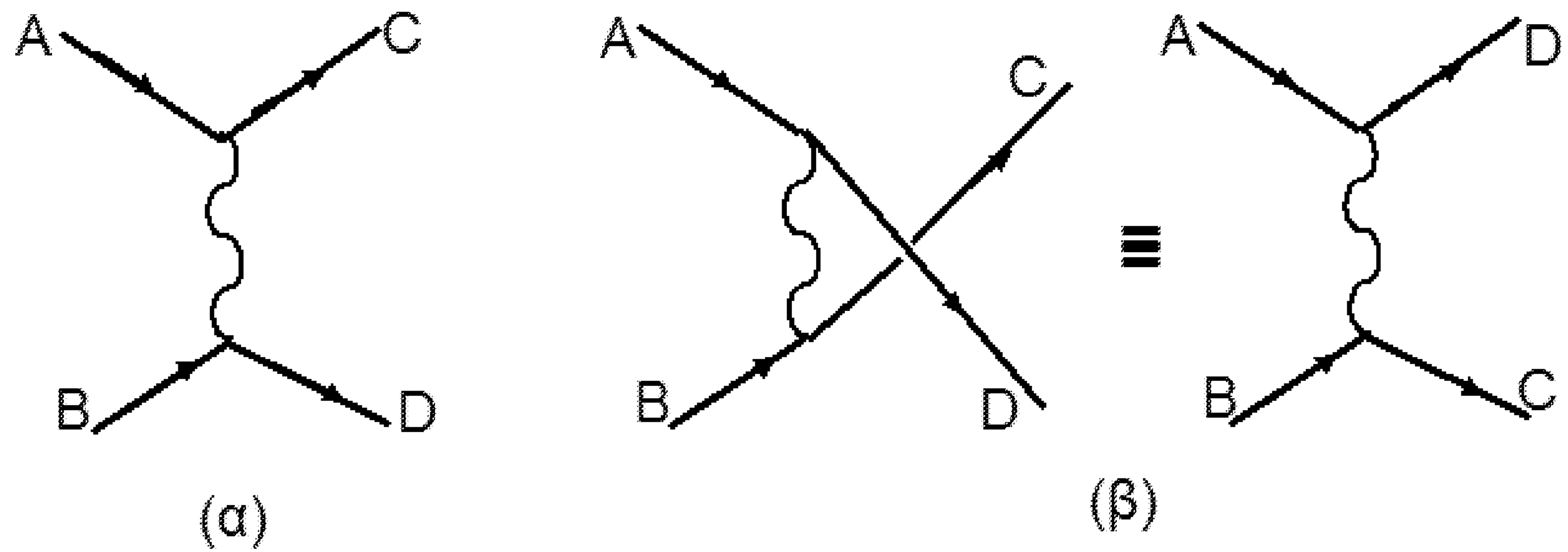
δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = -\frac{dN_A}{dt}\frac{1}{N_A} \rightarrow N_A(t) = N_A e^{-\Gamma t}$$

Χρόνος ζωής ονομάζεται η ποσότητα Γ^{-1}.

Σκέδαση "ηλεκτρονίου"-"ηλεκτρονίου"

Η διαφορά με την αντίστοιχη σκέδαση "ηλεκτρονίου" - "μιονίου" είναι ότι τώρα έχουμε όμοια σωματίδια. Επομένως, θα πρέπει το πλάτος $\mathcal{M}$ για $A + B \rightarrow C + D$ να παραμένει αναλλοίωτο στην αλλαγή $A \longleftrightarrow B$ και $C \longleftrightarrow D$. Έτσι, εκτός από το διάγραμμα (α) του Σχ.2, θα πρέπει να πάρουμε υπ΄ όψη μας και το διάγραμμα (β) του ιδίου σχήματος. Ο λόγος είναι ότι έχοντας όμοια σωματίδια, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν το ηλεκτρόνιο C έρχεται από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο A ή από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο B.



Σχήμα 2:

Επομένως, θα πρέπει να αθροίσουμε τα πλάτη και όχι τις πιθανότητες, μιας και οι δύο περιπτώσεις έχουν τις ίδιες αρχικές και τελικές καταστάσεις. Για το (α) έχουμε ήδη γράψει ότι δίνει πλάτος

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2}$$

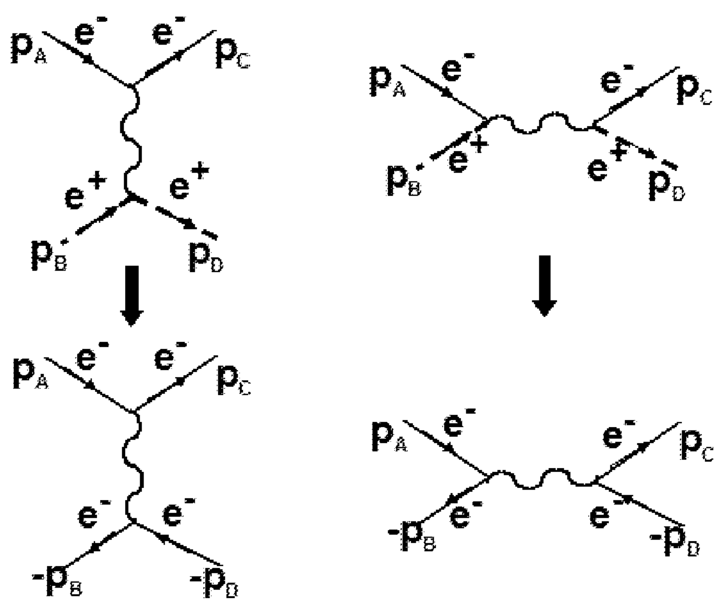
Τώρα λοιπόν το πλάτος $\mathcal{M}$ θα περιέχει και τη συνεισφορά από το διάγραμμα (β)

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2} + \frac{(p_A + p_D)^\mu (p_B + p_C)_\mu}{(p_C - p_B)^2}\right]$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή $p_C \longleftrightarrow p_D$ μετατρέπει τον ένα όρο του αθροίσματος στον άλλο. Σημειώστε ότι η αναλλοιώτητα του $\mathcal{M}$ στην αλλαγή $p_c \longleftrightarrow p_D$ είναι αρκετή για την αναλλοιώτητα και ως προς $p_A \longleftrightarrow p_B$

Σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’-‘‘ποζιτρονίου’’ (crossing)

Στο Σχ.3 βλέπουμε τα δύο πιθανά διαγράμματα στην σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’-‘‘ποζιτρονίου’’ καθώς και τα αντίστοιχα όπου τα ποζιτρόνια έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρόνια με αντίθετη ορμή (πηγαίνουν πίσω στο χρόνο και έχουν αρνητική ενέργεια). Το αναλλοίωτο πλάτος θα δίνεται από τη σχέση



Σχήμα 3:

$$\mathcal{M} = (-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu(-p_B - p_D)_\mu}{(-p_B - (-p_D))^2} + \frac{(p_A - p_B)^\mu(p_C - p_D)_\mu}{(p_C - (-p_D))^2}\right] \tag{11}$$

Υπενθυμίζεται ότι η διατήρηση ενέγειας-ορμής $p_A + p_B = p_C + p_D \rightarrow p_A + (-p_D) = p_C + (-p_B)$. Προσέξτε ότι η κορυφή $+ie(p_B + p_D)$ στην σκέδαση e^-e^- γίνεται $-ie(p_B + p_D)$ για την περίπτωση e^-e^+ (το φορτίο του ποζιτρονίου είναι $+e$). Τέλος, το πλάτος είνα αναλλοίωτο στην αλλαγή $p_C \longleftrightarrow -p_B$ που αντιστοιχεί σε ανταλλαγή δύο εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Θα μπορούσαμε να πάρουμε το $\mathcal{M}_{e^-e^+\rightarrow e^-e^+}$ από το $\mathcal{M}_{e^-e^-\rightarrow e^-e^-}$ απλά μέσω της σχέσης

$$\mathcal{M}_{e^-e^+\rightarrow e^-e^+}(p_A, p_B, p_C, p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^-\rightarrow e^-e^-}(p_A, -p_D, p_C, -p_B) \tag{12}$$

Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

Αναλλοίωτες μεταβλητές

Για την σκέδαση $AB \to CD$ έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ., στο Κ.Μ. έχουμε την ορμή και τη γωνία σκέδασης). Αλλά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε το $\mathcal{M}$ ως συνάρτηση ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις τέσσερις ορμές μπορούμε να φτιάξουμε 3 αναλλοίωτες ποσότητες: $p_A p_C$, $p_A p_D$ και $p_D p_B$, από τις οποίες βέβαια μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε συνήθως τις σταθερές του