Άσκηση 7 Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε συναλλοίωτη μορφή ως $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ όπου $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία επιλογής της βαθμίδας μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι $\Box^2 A^\mu = j^\mu$.(Π)

Λύση

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Δηλαδή

$$F^{12} = -F^{21} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_z = -B_z$$
$$-F^{13} = F^{31} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_y = -B_y$$
$$F^{23} = -F^{32} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x = -B_x$$

και

$$F^{01} = -F^{10} = \partial_t A_x + \partial_x V = -E_x$$
$$F^{02} = -F^{20} = \partial_t A_y + \partial_y V = -E_y$$
$$F^{03} = -F^{30} = \partial_t A_z + \partial_z V = -E_z$$

Οπότε,

για $\nu = 0$: $\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_x F^{10} + \partial_y F^{20} + \partial_z F^{30} =$

$$= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho = j^0$$

για $\nu = 1$: $\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_t F^{01} + \partial_y F^{21} + \partial_z F^{31} =$

$$= -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y =$$
$$= -\partial_t E_x + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_x = j_x$$

Όμοια, $\partial_\mu F^{\mu 2} = j_y$ και $\partial_\mu F^{\mu 3} = j_z$. Άρα, πράγματι $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\rho, \mathbf{j}) = j^\nu$. Τέλος

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \Box^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)$$

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$. Οπότε, μπορώ νε επιλέξω κατάλληλα την συνάρτηση χ έτσι ώστε να έχω $\partial_\mu A^\mu = 0$. Επομένως, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box^2 A^\nu$