Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, ${\Lambda^{\mu}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + {\epsilon^{\mu}}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση: $S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}{\Lambda^{\sigma}}_{\tau}$. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L\gamma^5$$

(Π)

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}{\Lambda^{\sigma}}_{\tau}$$

Ξεκινάμε με το αριστερό σκέλος. Για απειροστό μετασχηματισμό

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow S_L^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \left(1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\gamma^\sigma\left(1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\sigma_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Ας συγκεντρωθούμε στην παρένθεση της τελευταίας σχέσης. Εισάγοντας τον ορισμό του $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, παίρνουμε

$$\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma^\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu\right) =$$

$$\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - 2g^\sigma_\mu\gamma_\nu + 2g^\sigma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma \right.$$
$$\left. +2g^\sigma_\nu\gamma_\mu - 2g^\sigma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma\right) =$$
$$-2i\left(g^\sigma_\mu\gamma_\nu - g^\sigma_\nu\gamma_\mu\right)$$

Οπότε, η αρχική σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left(g^\sigma_\mu\gamma_\nu - g^\sigma_\nu\gamma_\mu\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu - \epsilon^{\mu\sigma}\gamma_\mu\right) \qquad \left(\epsilon^{\sigma\mu} = -\epsilon^{\mu\sigma}\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu + \epsilon^{\sigma\mu}\gamma_\mu\right) \\ &= \gamma^\sigma + \epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + {\epsilon^\sigma}_\tau g^{\nu\tau}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + {\epsilon^\sigma}_\tau\gamma^\tau \end{aligned}$$

Αλλά το δεξί μέλος της αρχικής προς απόδειξη σχέσης γράφεται

$$\gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau = \gamma^\tau \left(\delta^\sigma_\tau + \epsilon^\sigma{}_\tau\right) = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau \gamma^\tau$$

Οπότε, αποδείξαμε την αρχική σχέση

$$S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau$$

Για την σχέση $S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0$, προσέξτε ότι

$$\gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 \left(\gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu^\dagger\right) \gamma^0 = -\frac{i}{2} \left(\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu\right) = \sigma_{\mu\nu}$$

λόγω της ταυτότητας $\gamma^0 \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \gamma^0$. Οπότε, εύκολα φαίνεται ότι

$$\gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = S_L^{-1}$$

Η τελευταία σχέση, $\gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$ αποδεικνύεται εύκολα μιας και ο

γ_5 αντιμετατίθεται με τους υπόλοιπους γ πίνακες, οπότε

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \gamma_5$$