**Άσκηση 24** Δείξτε τις σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m$$

(Π)

**Λύση**

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)u^{(s)\dagger}(p)\gamma^0 =$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta^{1s} \, \delta^{2s} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}^\dagger \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right) \gamma^0 N^2 =$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} (\delta^{1s}\,\delta^{2s}) & -\begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} (\delta^{1s}\,\delta^{2s})\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} (\delta^{1s}\,\delta^{2s}) & -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{pmatrix} (\delta^{1s}\,\delta^{2s})\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} N^2 =$$

$$\sum_s \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} (E+m) & -\begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} & -\frac{p^2}{E+m} \begin{pmatrix} \delta^{1s}\delta^{1s} & \delta^{1s}\delta^{2s} \\ \delta^{2s}\delta^{1s} & \delta^{2s}\delta^{2s} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (E+m) & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -(E-m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -p^0 \end{pmatrix} + mI$$

Το τελευταίο φαίνεται ότι είναι ίσο με $p^0\gamma^0 - p^i\gamma^i + m = \not{p} + m$.
Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.