Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$ (Π)

Λύση

Η ελάχιστη αντικατάσταση $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ σημαίνει $E \to E + eV$ και $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + e\mathbf{A}$. Οπότε θα έχουμε από την εξίσωση του Dirac

$$E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E + eV) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \to$$

$$(E+eV)\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}+e\mathbf{A}) & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & -m\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $(E+eV)\psi_A = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\psi_B + m\psi_A$. Αλλά, $\psi_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})}{2m}\psi_A$. Άρα παίρνουμε

$$(E+eV-m)\psi_A = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\frac{1}{2m}\psi_a$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, παίρνουμε,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})$$

$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A}) + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{p})$$

$$= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ei\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i)\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

Για να καταλάβουμε πώς πήγαμε από την δεύτερη στην τρίτη γραμμή της προηγούμενης σχέσης ας δούμε πώς η x-συνιστώσα δρα σε ένα ψ

$$[(\mathbf{p} \times \mathbf{A})_x + (\mathbf{A} \times \mathbf{p})]_x \,\psi = -i\,[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \boldsymbol{\nabla}]_x \,\psi =$$

$$= -i\,[\partial_y A_z - \partial_z A_y + A_y \partial_z - A_z \partial_y]\,\psi$$

$$= -i\,[(\partial_y A_z)\psi + A_z \partial_y \psi - (\partial_z A_y)\psi - A_y \partial_z \psi + A_y \partial_z \psi - A_z \partial_y \psi]$$

$$= -i\,[\partial_y A_z - \partial_z A_y]\,\psi = -i(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_x \psi$$

Οπότε η εξίσωση Dirac γίνεται

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right] \psi_A$$

που είναι ακριβώς η εξίσωση του Pauli.