Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $[H, \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$. (Π)

Λύση

Οι πίνακες β και $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ είναι διαγώνιοι, οπότε μετατίθενται. Επομένως θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$.

$$[a_i p_i, \Sigma_j \hat{p}_j] = [a_i, \Sigma_j] \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \right] \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = 2\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = 0$$

γιατί το ϵ_{ijk} είναι αντισυμμετρικό στα i, j ενώ το $p_i p_j$ είναι συμμετρικό.