

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon. (II)

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του Dirac επί $\gamma^\nu \partial_\nu$ από αριστερά

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 &\rightarrow i\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0 \\ &\rightarrow i\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0\end{aligned}$$

Αλλάζοντας τους ‘τυφλούς’ δείκτες $\mu \leftrightarrow \nu$ στον πρώτο όρο παίρνουμε

$$i\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi - \gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0$$

και αθροίζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, χρησιμοποιώντας ότι $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ και $\gamma^\nu \partial_\nu \psi = -im\psi$, έχουμε

$$2ig^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \psi - 2\gamma^\nu \partial_\nu m\psi = 0 \rightarrow \square^2 \psi + m^2 \psi = 0$$