Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam. (Π)

Λύση

Στο Κ.Μ. έχουμε

$$s = (p_A + p_B)^2 = m^2 + M^2 + 2(E_A E_B + p^2) \geq (m + M)^2$$

$$t = (p_A - p_C)^2 = 2m^2 - 2p_C p_A = 2m^2 - 2(E_A^2 - p^2 \cos\theta) =$$

$$= 2p^2(\cos\theta - 1), \quad \text{άρα} \quad -4p^2 \leq t \leq 0$$

Πρέπει να εκφράσουμε το p ως συνάρτηση του s ή/και u για να βρούμε την καμπύλη όπου το t είναι ελάχιστο. Από την έκφραση για το s έχουμε

$$\begin{aligned}
-2E_A E_B &= 2p^2 - s + M^2 + m^2 \\
4(m^2+p^2)(M^2+p^2) &= (2p^2 - s + M^2 + m^2)^2 \\
4m^2M^2 &= (M^2+m^2-s)^2 - 4p^2 s \\
4p^2 &= \frac{(M^2+m^2-s)^2 - 4m^2M^2}{s}
\end{aligned}$$

Επομένως

$$t_{min} = -\frac{1}{s}\left[(M^2+m^2-s)^2 - 4m^2M^2\right]$$

που είναι μια παραβολή. Να βρούμε τις ασύπτωτες ευθείες

$$\text{για} \quad s \to 0^+ \quad \text{τότε} \quad t_{min} \to -\infty$$

Για $s \to \infty$ τότε $t_{min} \to -\infty$ με ασύπτωτη που την βρίσκουμε γράφοντας το t_{min}

$$t_{min} = -\left(\frac{s^2}{s} - \frac{2s(M^2+m^2)}{s} + \frac{1}{s}(\cdots)\right)$$

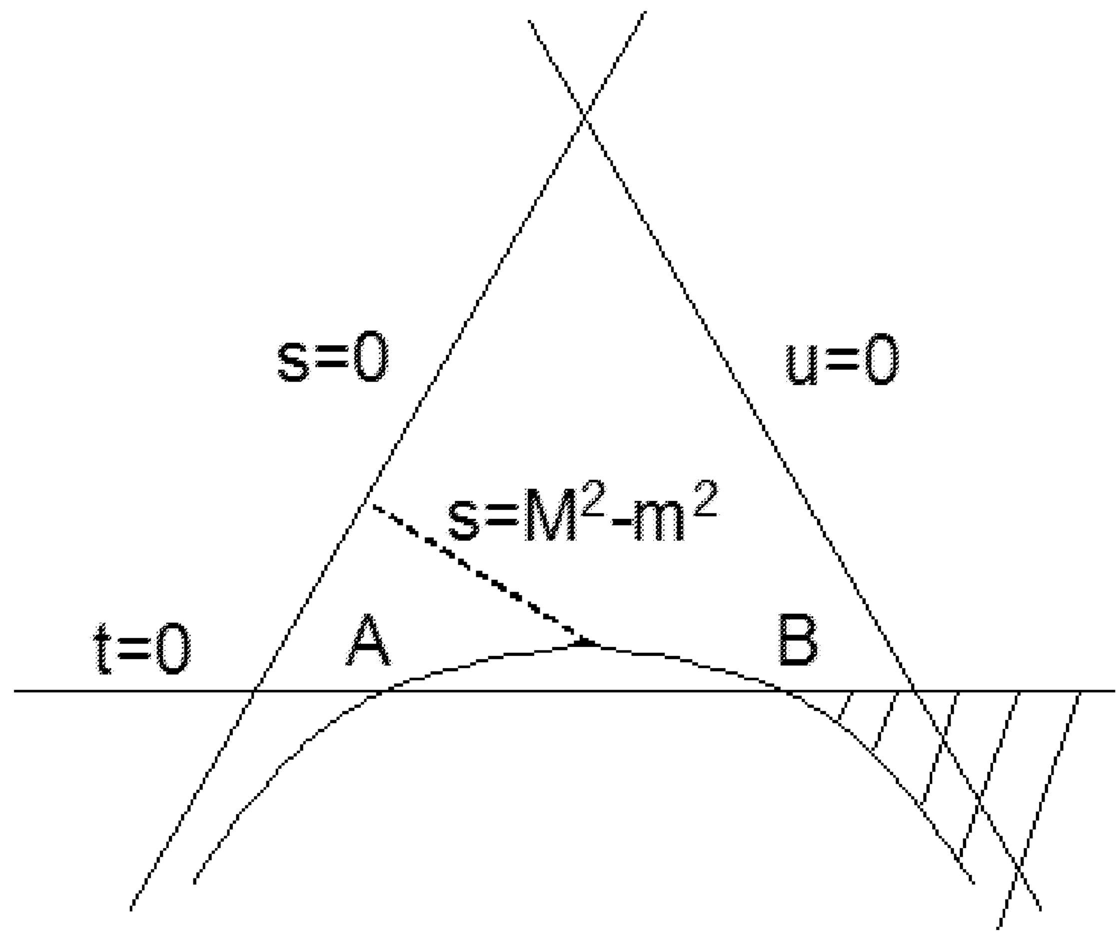
οπότε η ασύμπτωτη είναι η $t = -s + 2(M^2+m^2)$ ή άλλως $0 = -t - s + 2(M^2+m^2)$ ή $u = 0$. Τα σημεία A και B αντιστοιχούν στον μηδενισμό της t_{min}

$$(M^2 + m^2 - s)^2 = 4m^2M^2$$

$$s^2 + (M^2+m^2)^2 - 2s(M^2+m^2) = 4M^2m^2$$

$$\left[s - (M+m)^2\right]\left[s - (M-m)^2\right] = 0$$

Επίσης μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της καμπύλης t_{min}. Μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς s βρίσκουμε ότι το μέγιστο αντιστοιχεί στην τιμή $s = (M^2 - m^2)$ που δεν ανήκει στην φυσική περιοχή του s (στην αρχή της άσκησης είχαμε βρει $s \geq (m+M)^2$). Γι΄ αυτήν την τελευταία τιμή του s, το $t=0$. Είναι το σημείο B.



Από την εξίσωση του t_{min}, εύκολα παίρνουμε ότι

$$st = 4M^2m^2 - (M^2 + m^2 - s)^2 \rightarrow$$

$$s(2M^2 + 2m^2 - s - u) = 4M^2m^2 - M^4 - m^4 - s^2$$

$$- 2M^2m^2 + 2M^2s + 2m^2s \rightarrow$$

$$- su = 2M^2m^2 - M^4 - m^4 = -(M^2 - m^2)^2$$