ΒΙΒΛΙΟΝ IV.

Ὁρισμοί.

1. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς εὐθύγραμμον σχῆμα, ὅταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

2. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι σχῆμα περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, περὶ τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

3. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

4. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι περιγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

5. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι κύκλος ἐγγράφεται εἰς σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

6. Κύκλος δὲ λέγεται, ὅτι περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

7. Εὐθεῖα λέγεται, ὅτι ἐναρμόζεται εἰς κύκλον, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

1.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ μὴν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Δ, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, τὸ προσταχθὲν εἶναι γεγονός· διότι εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῇ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ, ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν Δ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΕ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΑΖ, ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῆ ἡ ΓΑ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Α ἡ ΗΘ (ΙΙΙ. 17) καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΘ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΘΑΓ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΗ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΗΑΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ (Ι. 23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖά τις, ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῆ εἰς τὸν κύκλον ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν, τὴν ΑΒΓ (ΙΙΙ. 32). Ἀλλὰ ἡ ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ (Ι. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ἔχει ἐγγραφῆ ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΕΖ καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτῆς μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Κ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τούτου τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΚΒ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Κ, πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΔΕΗ ἴση ἡ ΒΚΑ, πρὸς δὲ τὴν ΔΖΘ ἴση ἡ ΒΚΓ (Ι. 23), καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓ αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ (ΙΙΙ. 17).

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτονται αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἔχουν ἀχθῆ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ἕπεται, ὅτι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, γωνίαι εἶναι ὀρθαί (III. 18). Καὶ ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΒΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, διότι τὸ ΑΜΒΚ διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα (I. 32), καὶ αἱ γωνίαι ΚΑΜ, ΚΒΜ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται, ὅτι αἱ ἀπομένουσαι ΑΚΒ, ΑΜΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (I. 13)· ἄρα αἱ ΑΚΒ, ΑΜΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕΗ ΔΕΖ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΗ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα ἡ ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΔΕΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΛΝΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΜΛΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΛΜΝ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· καὶ εἶναι τοῦτο περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον περιεγράφη ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΓΔ (I.9), καὶ ἂς συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὸ σημεῖον Δ (I. αἴτ. 5), καὶ ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΒΖΔ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, δηλ. κοινὴν τὴν ἀπέναντι (ὑποτείνουσαν) μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΒΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπάς (I. 26)· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (εἰς τὸν κώδικα ἐλλείπει τὸ γράμμα Δ) θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, διότι αἱ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν θὰ τέμνῃ ὁ κύκλος αὐτάς, τότε ἡ εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἀγομένη κάθετος θὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἄτοπον (III. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· ἐπομένως θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΖΗΕ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

5.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κάθετοι αἱ ΔΖ, ΕΖ· αὗται θὰ συμπέσουν ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Ἂς συμπέσουν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ (I.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (κοιναὶ ἔνν. 1). Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς περιγραφῇ ὅπως ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλ' ἂς συμπίπτουν τώρα αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ ἂς συμπίπτουν αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πάλιν κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι δὲ κοινὴ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΖ (I.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα πάλιν ὁ κύκλος γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον ἔχει περιγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[Πόρισμα.]

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ γωνία ΒΑΓ, εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· ὅτε δὲ τὸ κέντρον πίπτει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, ἡ γωνία ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. [Ὥστε καὶ ὅταν ἡ διδομένη γωνία εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, αἱ ΔΖ, ΕΖ θὰ πέσουν ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ὅταν δὲ εἶναι ὀρθή, θὰ πέσουν ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς θὰ πέσουν ἐκτὸς τῆς ΒΓ (III. 31)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

6.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΒΔ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· διότι τὸ Ε εἶναι κέντρον· κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΔ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ΒΑΔ εἶναι ἡμικύκλιον· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή (III. 31). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον (I. ὁρισ. 22). Καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῆ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

7.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των, αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ (III. 17).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΗ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ε ἔχει ἀχθῆ ἕως τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι αἱ παρὰ τὸ Α γωνίαι εἶναι ὀρθαί (III. 18). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΒΗ ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (I. 29). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ. Ὥστε καὶ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ (I. 30). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΖ, ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕΔ. Ἄρα τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἄρα ἡ μὲν ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΚ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ [καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ], ἕπεται, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΗΘΚ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΗΒΕΑ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΒ εἶναι ὀρθή (I. 34). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Θ, Κ, Ζ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἄρα τὸ ΖΗΘΚ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον. Καὶ ἔχει περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ἔχει περιγραφῆ τετράγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

8.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῆ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῆ κύκλος.

Ἂς τμηθῆ ἑκάστη τῶν ΑΔ, ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεια Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΔ, ΒΓ ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΖΚ (I. 30 καὶ 31)· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΚ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΗ, ΗΕ· ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ, Κ, γωνίαι εἶναι ὀρθαί· διότι, ἐὰν ὁ κύκλος θὰ τέμνῃ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (III. 16). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει ἐγγραφῆ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

9.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ περιγραφῆ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῆ κύκλος.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον Ε.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΑΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΒ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ διχοτομεῖται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΕΑΒ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΑΒ, ἡ δὲ ΕΒΑ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἡ ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ (I. 6). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΕΑ, ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΓ, ΕΔ. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἂς περιγραφῇ, ὅπως ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει περιγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς.

Ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη κατὰ τὸ σημεῖον Γ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ (II. 11)· καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΒΔΕ, καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς τὸν κύκλον ΒΔΕ ἡ εὐθεῖα ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΒΔΕ (IV. 1)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ κύκλος ὁ ΑΓΔ (IV· 5).

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, εἶναι δὲ ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ κύκλου τοῦ ΑΓΔ ἔχει ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἔχουν προσπέσει πρὸς τὸν κύκλον ΑΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν ἐξ αὐτῶν τέμνει αὐτόν, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΓΔ (III. 37). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ ἐπαφῆς διέρχεται ἡ ΔΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΑΓ τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου (III. 32). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑΓ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΓΔΑ· ἄρα ὅλη ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς δύο, τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι ἴση ἡ ἐκτὸς ἡ ΒΓΔ (I. 32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἀλλὰ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (I. 5)· ὥστε καὶ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἄρα αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Καὶ πειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΓ (1. 6). Ἀλλὰ ἡ ΒΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΓΑ· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΓΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΑΓ (I. 5)· ἄρα αἱ γωνίαι ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΔΑΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΔΑΒ.

Κατεσκευάσθη ἄρα ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΔΒ γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ληφθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ΖΗΘ, ἔχον ἑκάστην τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν διπλασίαν τῆς γωνίας παρὰ τὸ Ζ (IV. 10), καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΘ (IV. 2), ὥστε ἡ μὲν γωνία ΓΑΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Ζ, ἑκάστη δὲ τῶν πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ (IV. 2)· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Ἂς διχοτομηθῇ τώρα ἑκάστη τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ καὶ αὗται ἔχουν διχοτομηθῇ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ (I. 9), ἕπεται, ὅτι αἱ πέντε γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (III. 26)· ἄρα τὰ πέντε τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Τὰ ἴσα δὲ τόξα ὑποτείνουν εὐθεῖαι ἴσαι· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΕ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒ. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒ βαίνει ἡ γωνία ΒΑΕ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ (III. 27)· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἄς νοήσωμεν, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πενταγώνου (IV. 11) εἶναι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ νὰ εἶναι ἴσα· καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ (III. 17) καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κέντρον τὸ Ζ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ζ πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ἔχει ἀχθῆ ἡ ΖΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ (III. 18)· ἄρα ἑκάστη τῶν πρὸς τὸ σημεῖον Γ γωνιῶν εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Β, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΓΚ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ (I. 47). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ. Ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ, καὶ ἡ ΖΚ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΖ, ΖΚ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΚ· καὶ ἡ βάσις ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΚ· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΖΓ (I. 8)· ἡ δὲ ΒΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚΓ (I. 32)· ἄρα ἡ μὲν ΒΖΓ εἶναι διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΒΚΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΓΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΖΛ, ἡ δὲ ΔΛΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΔ (III. 27). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΖΓ διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΔΖΓ διπλασία τῆς ΛΖΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΖΓ· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΓΚ ἴση πρὸς τὴν ΖΓΛ. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν πλευρὰν αὐτῶν τὴν ΖΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς πρὸς τὰς ὑπολοίπους ἴσας καὶ τὴν ὑπόλοιπον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὑπόλοιπον (I. 26)· ἄρα ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἡ δὲ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι διπλασία τῆς ΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚ εἶναι διπλασία τῆς ΒΚ. Καὶ εἶναι ἡ ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΓ· ἄρα καὶ ἡ ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚ, ΚΛ· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη, ὅτι τῆς μὲν ΖΚΓ εἶναι διπλασία ἡ ΘΚΛ, τῆς δὲ ΖΛΓ εἶναι διπλασία ἡ ΚΛΜ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΛ, ΚΛΜ· ἄρα αἱ πέντε γωνίαι αἱ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον καὶ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιεγράφη ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Διότι, ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΖ, ΔΖ· καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΓΖ, ΔΖ, ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΓ, ΓΖ· καὶ ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ (Ι. 4), καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (Ι. 4) καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΔΕ εἶναι διπλασία τῆς ΓΔΖ, εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΓΔΕ πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ πρὸς τὴν ΓΒΖ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΑ, ΖΕ. Ἂς ἀχθοῦν τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΘΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΓΖ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΖΘΓ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΖΚΓ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς ὑπολοίπους πλευράς· ἄρα ἡ κάθετος ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον ΖΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΘ, ΖΚ· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ, Λ, Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν δὲν θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ θὰ τέμνῃ αὐτάς, θὰ συμβῇ, ὥστε ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου νὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (III. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ· ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

14.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν αἱ εὐθεῖαι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Β, Α, Ε αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον (IV. 13), ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΖΓΔ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΔΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΓΔΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΔΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΔ (I. 6). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΓ, ΖΔ· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος. Ἂς περιγραφῇ καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, περιεγράφη κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

15.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ ἡ ΑΔ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Δ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΕΗ, ΓΗ, ἂς προεκταθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Β, Ζ καὶ ἂς ἀχθοῦν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἴση ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΗΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΓΘ, ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΗΔ εἶναι ἰσόπλευρον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αὐτοῦ αἱ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἐπειδὴ βεβαίως αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων εἶναι μεταξύ των ἴσαι (Ι. 5)· καὶ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (Ι. 32)· ἄρα ἡ γωνία ΕΗΔ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΗΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΗ σταθεῖσα ἐπὶ τὴν ΕΒ σχηματίζει τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΕΗΓ, ΓΗΒ ἴσας μὲ δύο ὀρθάς (Ι. 13), ἕπεται, ὅτι ἡ ἀπομένουσα ΓΗΒ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν πρὸς αὐτὰς αἱ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ (Ι. 15). Ἄρα αἱ ἓξ γωνίαι αἱ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ, εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (ΙΙΙ. 26). Ἄρα τὰ ἓξ τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ὑπὸ δὲ τὰ ἴσα τόξα βαίνουν ἴσαι εὐθεῖαι (ΙΙΙ. 29)· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΖΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΔ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΑΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΖΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒΑ· καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΖΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΖΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒΑ βαίνει ἡ γωνία ΑΖΕ· ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ (ΙΙΙ. 27). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἀνὰ μία, εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκάστην τῶν γωνιῶν ΑΖΕ, ΖΕΔ· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσογώνιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἔχει ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως ἐπράξαμεν εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν διὰ τῶν (νοουμένων ἓξ) σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου φέρωμεν ἐφαπτομένας, θὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἀποδεικνυομένου τούτου, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνο (IV. 12). Καὶ ἀκόμη, καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ἀπεδείχθη καὶ διὰ τὸ πεντάγωνον, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

16.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου ἡ ΑΓ (IV. 2), πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ (IV. 11)· ἄρα ἐκ τῶν δεκαπέντε ἴσων τμημάτων ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελῆται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, πέντε μὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κύκλου, τρία δὲ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ κύκλου· εἰς τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΒΓ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τῶν ἴσων τμημάτων δύο. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον τὸ τόξον ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (III. 30)· ἄρα ἕκαστον τῶν τόξων ΒΕ, ΕΓ εἶναι τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Ἐὰν ἄρα, ἀφοῦ φέρωμεν τὰς ΒΕ, ΕΓ, ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ συνεχῶς ἴσας εὐθείας πρὸς ταύτας (IV. 1), θὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου (τῶν 15) φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, θὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον (IV. 12). Προσέτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων ἀποδείξεων, ὅπως ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν καὶ νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν δεκαπεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.