Βιβλίον VII.

Ὁρισμοί.

1. Μονὰς εἶναι καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

2. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

3. Μέρος εἶναι ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ μικρότερος τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸν μεγαλύτερον.

4. Μέρη δέ, ὅταν δὲν καταμετρῇ.

5. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

6. Ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος διὰ δύο.

7. Περιττὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος διὰ δύο ἢ ὁ διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ κατὰ μονάδα.

8. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

9. Ἀρτιάκις δὲ περιττὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περιττὸν ἀριθμόν.

[10. Περισσάκις ἄρτιος εἶναι ὁ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν].

11. Περισσάκις δὲ περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περιττὸν ἀριθμόν.

12. Πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετρούμενος μόνον ὑπὸ τῆς μονάδος.

13. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μὲ μόνην τὴν μονάδα ὡς κοινὸν μέτρον μετρούμενοι.

14. Σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετρούμενος ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος.

15. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μὲ ἀριθμόν τινα ὡς κοινὸν μέτρον μετρούμενοι.

16. Ἀριθμὸς λέγεται, ὅτι πολλαπλασιάζει ἀριθμόν, ὅταν, ὅσαι μονάδες ὑπάρχουσιν εἰς αὐτόν, τόσας φορὰς συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ προκύψῃ ἀριθμός τις.

17. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους δώσωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ προκύπτων καλεῖται ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

18. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους δώ-

σωσιν ἀριθμόν τινα, ὁ προκύπτων καλεῖται στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιασθέντες πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

19. Τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

20. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμὸς περιεχόμενος.

21. Ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

22. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους.

23. Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη αὐτοῦ.

1.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι ἀριθμοί, ἀνθυφαιρῆται δὲ πάντοτε ὁ μικρότερος ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν ὁ λειπόμενος οὐδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἔστωσαν δύο ἄνισοι ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ὅτι ἀνθυφαιρουμένου[1] πάντοτε τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ὁ λειπόμενος οὐδέποτε καταμετρεῖ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τουτέστιν ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ μόνον ἡ μονάς.

Διότι, ἐὰν οἱ ΑΒ, ΓΔ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρεῖ, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ μετρῶν τὸν ΒΖ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ μετρῶν τὸν ΔΗ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ μετρῶν τὸν ΖΘ ἂς δίδῃ ὑπόλοιπον μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ, ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΖ, ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΒΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΑΖ. Ὁ δὲ ΑΖ μετρεῖ τὸν ΔΗ· ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΔΗ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΓΗ. Ὁ δὲ ΓΗ μετρεῖ τὸν ΖΘ· ἄρα καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΖΘ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, τὴν μονάδα ΑΘ, ἐν ᾧ εἶναι ἀριθμὸς (ὁρ. 2)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα δὲν θὰ μετρήσῃ ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ· ἄρα οἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. Ἡ φράσις «ἀνθυφαιρουμένου κλπ.» ἔχει τὴν ἑξῆς ἔννοιαν συναγομένην ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος: διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἔστω ὑπόλοιπόν τι. Διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην καὶ ἔστω ἄλλο ὑπόλοιπον. Διὰ τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον κ.ο.κ.

2.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον (ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης).

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. Πρέπει τῶν ΑΒ, ΓΔ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ ΓΔ μετρῇ τὸν ΑΒ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ἄρα ὁ ΓΔ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΓΔ, ΑΒ. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον· διότι οὐδεὶς μεγαλύτερος τοῦ ΓΔ θὰ μετρήσῃ τὸν ΓΔ.

Ἐὰν δὲ δὲν μετρῇ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου πάντοτε τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν ἀριθμῶν ΑΒ, ΓΔ θὰ ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις, ὁ ὁποῖος θὰ μετρήσῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Διότι μονὰς δὲν θὰ ὑπολειφθῇ· ἐὰν δὲ ὑπολειφθῇ μονάς, οἱ ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ δὲν ἐλήφθη εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα θὰ ὑπολειφθῇ ἀριθμός τις, ὁ ὁποῖος θὰ μετρήσῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ μετρῶν τὸν ΒΕ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ μετρῶν τὸν ΔΖ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον μικρότερον ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ ἂς μετρῇ (ἀκριβῶς) τὸν ΑΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ΓΖ μετρεῖ τὸν ΑΕ, ὁ δὲ ΑΕ μετρεῖ τὸν ΔΖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν ΔΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ ὅλον τὸν ΓΔ. Ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΕ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα μετρεῖ τὸν ΒΕ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΓΔ. Ὁ ΓΖ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι ἐὰν ὁ ΓΖ δὲν εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΓΔ, ὁ δὲ ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΕ, καὶ ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν ΒΕ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΑΕ. Ὁ δὲ ΑΕ μετρεῖ τὸν ΔΖ· καὶ ὁ Η ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν ΔΖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· θὰ μετρήσῃ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ· ἄρα ὁ ΓΖ εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς μετρῇ δύο ἀριθμούς, θὰ μετρῇ καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α,Β,Γ.

Διότι ἂς ληφθῇ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 2)· ὁ Δ ἢ μετρεῖ τὸν Γ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Πρῶτον ἂς τὸν μετρῇ· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ἄρα ὁ Δ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ· λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Δ. Ἂς τοὺς μετρήσῃ, καὶ ἔστω ὁ Ε. Ἐπειδὴ λοιπόν ὁ Ε μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β (πόρ. 2ου θ.)· τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα δὲν θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Δ· ἄρα ὁ Δ εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ.

Ἔστω τώρα, ὅτι ὁ Δ δὲν μετρεῖ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρήσῃ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ὁ μετρῶν ὅμως τοὺς Α, Β, Γ θὰ μετρῇ καὶ τοὺς Α, Β καὶ θὰ μετρῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β τὸν Δ (πόρ. 2ου θεωρ.)· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ἄρα τοὺς Δ, Γ θὰ μετρήσῃ ἀριθμός τις· ἄρα οἱ Δ, Γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ὁ Ε (θεώρ. 2). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, ὁ δὲ Δ μετρεῖ τοὺς Α, Β, καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ὁ Ε ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Ε τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ, θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Ε. Ἂς τοὺς μετρήσῃ, καὶ ἔστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, θὰ μετρῇ καὶ τοὺς Α, Β· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β (πόρ. 2ου θεωρ.). Τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Δ· ἄρα ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Δ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τοὺς Δ, Γ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Δ, Γ. Τὸ δὲ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Δ, Γ εἶναι ὁ Ε· ἄρα ὁ Ζ μετρεῖ τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἀριθμός τις μεγαλύτερος τοῦ Ε δὲν θὰ μετρήσῃ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ· ὁ Ε ἄρα εἶναι μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Πᾶς μικρότερος ἀριθμὸς παντὸς μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἢ εἶναι μέρος ἢ εἶναι μέρη.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, ΒΓ καὶ ἔστω μικρότερος ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ ΒΓ ἢ εἶναι μέρος τοῦ Α ἢ μέρη.

Διότι οἱ Α, ΒΓ ἢ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν ὁ ΒΓ διαιρεθῇ εἰς τὰς μονάδας αὐτοῦ, ἑκάστη μονὰς τοῦ ΒΓ θὰ εἶναι μέρος τι τοῦ Α· ὥστε ὁ ΒΓ εἶναι μέρη τοῦ Α.

Ἂς μὴ εἶναι τώρα οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε ὁ ΒΓ ἢ μετρεῖ τὸν Α ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ ΒΓ μετρῇ τὸν Α, ὁ ΒΓ εἶναι μέρος τοῦ Α. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ληφθῇ τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 2) καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ΒΓ εἰς τοὺς πρὸς τὸν Δ ἴσους τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, ὁ Δ εἶναι μέρος τοῦ Α· εἶναι δὲ ὁ Δ ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ εἶναι μέρος τοῦ Α· ὥστε ὁ ΒΓ εἶναι μέρη τοῦ Α.

Πᾶς ἄρα μικρότερος ἀριθμὸς παντὸς μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἢ εἶναι μέρος ἢ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμα (τῶν μικροτέρων) θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἀθροίσματος (τῶν μεγαλυτέρων), τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ΒΓ καὶ ἄλλος ὁ Δ ἄλλου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Δ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΒΓ, ΕΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος τοῦ ΒΓ εἶναι ὁ Α, τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΕΖ εἶναι ὁ Δ, ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ εἶναι εἰς τὸν ΒΓ ἴσοι πρὸς τὸν Α, ἄλλοι τόσοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Α τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν ΒΗ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ ΕΘ πρὸς τὸν Δ, ἄρα καὶ ΒΗ+ΕΘ εἶναι ἴσον πρὸς Α+Δ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ΗΓ+ΘΖ εἶναι ἴσον πρὸς Α+Δ. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Α εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, ἄλλοι τόσοι ἴσοι πρὸς τὸ ἄθροισμα Α+Δ εἶναι καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα ΒΓ+ΕΖ. Ὁσαπλάσιος ἄρα εἶναι ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΒΓ+ΕΖ τοῦ ἀθροίσματος Α+Δ. Ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα Α+Δ τοῦ ἀθροίσματος ΒΓ+ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη ἄλλου, καὶ τὸ ἄθροισμα (τῶν μικροτέρων) θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἀθροίσματος (τῶν μεγαλυτέρων), τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρη ἀριθμοῦ τοῦ Γ καὶ ἄλλος ὁ ΔΕ ἄλλου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Γ, Ζ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅσα μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μέρη τοῦ Γ εἶναι εἰς τὸν ΑΒ, τόσα μέρη τοῦ Ζ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΔΕ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ Ζ τὰ ΔΘ, ΘΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΗ+ΔΘ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ (θεώρ. 5). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΒ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΒ+ΘΕ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ. Ὅσα μέρη ἄρα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΔΕ τοῦ ἀθροίσματος Γ+Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ, ὅσον εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρος τοῦ ΓΔ, ὅσον εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς ΑΕ, τοῦ ἀφαιρεθέντος ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὁ ΕΒ, τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ΖΔ, εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ, ὅ,τι μέρος ἄρα εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ (θεώρ. 5). Ὅ,τι δὲ μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐλήφθη καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τοῦ ΓΔ· ἄρα ὁ ΗΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ κοινὸς ὁ ΓΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν

ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, εἶναι δὲ ἴσος ὁ ΗΓ πρὸς τὸν ΖΔ, ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ, ὅσα εἶναι ὁ ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Διότι ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς ΑΒ εἶναι τόσα μέρη τοῦ ΓΔ, ὅσα ὁ ἀφαιρεθεὶς ΑΕ τοῦ ἀφαιρεθέντος ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ΗΘ ἴσος πρὸς τὸν ΑΒ. Ὅσα ἄρα μέρη εἶναι ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΔ τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ ΓΖ τὰ ΑΛ, ΛΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μεγαλύτερος δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, ἄρα καὶ ὁ ΗΚ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΑΛ. Ἂς ληφθῇ ὁ ΗΜ ἴσος πρὸς τὸν ΑΛ. Ἄρα ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΜΚ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7). Πάλιν ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΕΛ τοῦ ΓΖ, εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, ἄρα καὶ ὁ ΘΚ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΕΛ. Ἂς ληφθῇ ὁ ΚΝ ἴσος πρὸς τὸν ΕΛ. Ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ὁ ΝΘ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον ὅλος ὁ ΚΘ εἶναι ὅλου τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7). Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΜΚ, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΜΚ + ΝΘ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ΔΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΓΔ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα ΜΚ + ΝΘ ἴσον πρὸς τὸν ΕΒ[1], ὁ δὲ ΘΗ ἴσος πρὸς τὸν ΒΑ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. Διότι ΗΜ+ΜΚ+ΚΝ+ΝΘ=ΑΛ+ΛΕ+ΕΒ καὶ ΗΜ=ΑΛ, ΚΝ=ΕΛ.

9.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρος ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἄλλου, καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη θὰ εἶναι καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ΒΓ, καὶ ἄλλος ὁ Δ ἄλλου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Α εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, τόσοι ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Α τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ προφανῶς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ΒΗ, ΗΓ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΘ, ΘΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ, ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ· ὥστε καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι τὸ ἄθροισμα τὸ ΒΓ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ΕΖ (θεώρ. 5 καὶ 6). Εἶναι δὲ ὁ μὲν ΒΗ ἴσος πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ ΕΘ πρὸς τὸν Δ· ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι μέρη ἀριθμοῦ καὶ ἄλλος εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη ἄλλου, καὶ ἐναλλὰξ ὅσα μέρη ἢ μέρος εἶναι ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος θὰ εἶναι καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς ΑΒ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ Γ, καὶ ἄλλος ὁ ΔΕ ἄλλου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὅσα μέρη ἢ μέρος εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ ὅσα μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μέρη τοῦ Γ εἶναι εἰς τὸν ΑΒ, τόσα μέρη τοῦ Ζ εἶναι καὶ εἰς τὸν ΔΕ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ μέρη τοῦ Γ τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ μέρη τοῦ Ζ τὰ ΔΘ, ΘΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος εἶναι ὁ

ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ (θεώρ. 9). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ· ὥστε καὶ ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ· καὶ ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ· ἀλλ' ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, καὶ ἄρα ὅσα μέρη εἶναι ἢ μέρος ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, τὰ αὐτὰ μέρη ἢ τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν εἶναι ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὅτι ὡς εἶναι ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΖΔ εἶναι ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ, ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ (ὁρ. 21). Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὁ ΕΒ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ (θεώρ. 7 καὶ 8). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ· (ὁρ. 21)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ὁ εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Β, Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Δ (ὁρ. 21). Καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν Α, Γ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Β, Δ θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅσα ὁ Α τοῦ Β (θεώρ. 6 καὶ 7). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Β, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὅ,τι ἄρα μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Γ τοῦ Δ (ὁρ. 21). Ἐναλλὰξ ἄρα ὅ,τι μέρος ἢ μέρη εἶναι ὁ Α τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι καὶ ὁ Β τοῦ Δ (θεώρ. 10). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι ἴσοι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτοὺς καὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμενοι ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι ἴσοι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτοὺς λαμβανόμενοι δὲ ἀνὰ δύο ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγον οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 13). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ (θεώρ. 13). Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς μετρῇ ἰσάκις ἄλλον τινὰ ἀριθμόν, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς θὰ μετρήσῃ τὸν τρίτον ἀριθμὸν καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

Διότι ἂς μετρῇ ἡ μονὰς Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς ὁ Δ ἂς μετρῇ ἰσάκις ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν ΒΓ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσαι ἄρα μονάδες εἶναι εἰς τὸν ΒΓ, τόσοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τὸν Δ εἶναι εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς μονάδας αὐτοῦ τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν Δ τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ, ἄρα θὰ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΕΚ, οὕτως ἡ μονὰς ΗΘ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΚΛ καὶ ἡ μονὰς ΘΓ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΛΖ. Θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους (θεώρ. 12)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς ΒΗ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΕΚ, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μονὰς ΒΗ πρὸς τὴν μονάδα Α, ὁ δὲ ἀριθμὸς ΕΚ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Α πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Ἄρα ἡ μονὰς Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι γινόμενα ἀριθμούς τινας, τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ γινόμενον τὸν Γ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ἂς δίδῃ γινόμενον τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει γινόμενον τὸν Γ, ἄρα ὁ Β μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἐναλλὰξ ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ ἰσάκις τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Γ (θεώρ. 15). Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει γινόμενον τὸν Δ, ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν Β κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκις δὲ ἡ μονὰς Ε ἐμέτρει τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Α τὸν Γ (κατὰ τὰ ἀνωτέρω : ἐναλλάξ....)· ἄρα ὁ Α μετρεῖ ἰσάκις ἕκαστον τῶν Γ, Δ. Ἄρα ὁ Γ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς δίδῃ γινόμενά τινα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες.

Διότι ὁ ἀριθμὸς Α πολλαπλασιάσας τοὺς Β, Γ ἂς δίδῃ τοὺς Δ, Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάζων τὸν Β δίδει τὸν Δ, ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ζ τὸν ἀριθμὸν Α κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ζ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Α καὶ ὁ Β τὸν Δ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ζ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ (όρ. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ἡ μονὰς Ζ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Α, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 13)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα δίδωσι γινόμενα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν οἱ πολλαπλασιάσαντες.

Διότι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα τὸν Γ ἂς δίδωσι τοὺς Δ, Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει τὸν Δ (θεώρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Ε. Ἀριθμὸς λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β δίδει τοὺς Δ, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 17)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ,τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον· καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Ζ.

Διότι ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Η, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Ε, ὑπάρχει ἀριθμὸς ὁ Α , ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἔδωσε τοὺς Η, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Η, ἀλλὰ καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ἔδωσε τὸν Ζ, ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, οἱ ὁποῖοι πολλαπλασιάσαντες ἀριθμόν τινα τὸν Γ ἔδωσαν τοὺς Β, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ (θεώρ. 18). Ἀλλ' εἶναι καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὁ Η ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν Ε, Ζ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα εἶναι ἴσος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ (V. 9).

Ἔστω πάλιν ἴσος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευή, ἐπειδὴ ὁ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Ζ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17), ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (θεώρ. 18). Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον.

Διότι ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Διότι ὁ ΓΔ δὲν εἶναι μέρη τοῦ Α. Ἐὰν ὅμως εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα εἶναι τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Β, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁ ΓΔ τοῦ Α (θεώρ. 13, ὁρ. 21). Ὅσα ἄρα μέρη τοῦ Α εἶναι εἰς τὸν ΓΔ, τόσα μέρη τοῦ Β εἶναι καὶ εἰς τὸν ΕΖ. Ἂς διαιρεθῇ ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ μέρη τοῦ Α τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ μέρη τοῦ Β τὰ ΕΘ, ΘΖ· τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ΓΗ, ΗΔ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ΕΘ, ΘΖ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΕΘ, ΘΖ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ. Θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (θεώρ. 12). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς ΓΔ, ΕΖ, ἐν ᾧ εἶναι μικρότεροι αὐτῶν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλήφθησαν ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Ἄρα ὁ ΓΔ δὲν εἶναι μέρη τοῦ Α· ἄρα εἶναι μέρος (θεώρ. 4). Καὶ ὁ ΕΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ΓΔ τοῦ Α (θεώρ. 13, ὁρ. 21)· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχωσιν ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Α, Β εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β. Ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἄρα ἰσάκις ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Δ τὸν Β. Ὁσάκις λοιπὸν ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Καὶ ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁ Ε καὶ τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας (θεώρ. 15). Ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον (ὁρ. 13). Ἄρα δὲν ὑπάρχουσιν ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Α, Β εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τον αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Β, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε.

Ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (ὁρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Β. Ἀριθμὸς λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε δίδει τοὺς Α, Β· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (θεώρ. 17)· ἄρα οἱ Δ, Ε εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, ἐν ᾧ εἶναι μικρότεροι αὐτῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β ἀριθμός τις. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α ἂς μετρῇ ἀριθμός τις ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν οἱ Γ, Β δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς Γ, Β ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Δ. Ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ, ὁ δὲ Γ μετρεῖ τὸν Α, καὶ ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Α. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Γ, Β ἀριθμός τις. Οἱ Γ, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν εἶναι πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος.

Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν οἱ Γ, Δ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς Γ, Δ ἀριθμός τις. Ἂς τοὺς μετρῇ καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸν δὲ Γ μετρεῖ ἀριθμός τις ὁ Ε, ἄρα οἱ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 23). Ὁσάκις λοιπὸν ὁ Ε μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας (θεώρ. 15). Ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ (ὁρ. 15). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Δ· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Ε, Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Β. Ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 19). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Ε εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (θεώρ. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς ἰσάκις, ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τοὺς Β, Γ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν μετρεῖ ἄρα τοὺς ἀριθμοὺς Γ, Δ ἀριθμός τις. Οἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρὸς τὸν ἄλλον πρῶτος.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἃς δίδῃ τὸν Γ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἃς ληφθῇ ὁ Δ ἴσος πρὸς τὸν Α. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ ὁ Α ἴσος πρὸς τὸν Δ, ἄρα καὶ οἱ Δ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἕκαστος ἄρα τῶν Δ, Α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Β· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Δ, Α θὰ εἶναι πρὸς τὸν Β ἀριθμὸς πρῶτος (θεώρ. 24). Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Δ, Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς Γ. Οἱ Γ, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον, καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν Γ, Δ πρῶτοι, καὶ ὁ μὲν Α πολλαπλασιασας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Ε , ὁ δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Α, Β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ, καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Γ (θεώρ. 24). Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Α, Β εἶναι ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ οἱ Ε, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἕκαστος ἄρα τῶν Γ, Δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Ε. Καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Γ, Δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Ε. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Γ,Δ εἶναι ὁ Ζ. Ἄρα οἱ Ε, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἕκαστος πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ ἀριθμόν τινα, τὰ γινόμενα ταῦτα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλασιάσαντες τὰ προκύψαντα γινόμενα δίδουσιν ἀριθμούς τινας, καὶ ἐκεῖνοι θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [καὶ πάντοτε περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Γ, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Γ ἂς δίδῃ τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Ε, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ οἱ Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α,Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Γ, ἄρα οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ Γ, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἄρα οἱ Γ, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Πάλιν, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἄρα οἱ Α, Ε εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 25). Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε, ἀμφότεροι πρὸς ἕκαστον εἶναι πρῶτοι, καὶ τὸ γινόμενον ἄρα τῶν Α, Γ πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Ε θὰ εἶναι πρῶτος (θεώρ. 26). Καὶ εἶναι τὸ μὲν γινόμενον τῶν Α, Γ ὁ Δ, τὸ δὲ γινόμενον τῶν Β, Ε ὁ Ζ. Ἄρα οἱ Δ, Ζ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν πρῶτος· καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμά των πρὸς οἱονδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἂς σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁ ΑΓ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτος.

Διότι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ΓΑ, ΑΒ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς ἀριθμοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ τις αὐτοὺς καὶ ἔστω ὁ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τοὺς ΓΑ, ΑΒ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΑΒ, ΒΓ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΓΑ, ΑΒ· ἄρα οἱ ΓΑ, ΑΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα ὁ ΓΑ εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἔστωσαν πάλιν, οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ τις αὐτοὺς καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ μετρεῖ ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἄρα θὰ μετρῇ καὶ ὅλον τὸν ΓΑ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τοὺς ΓΑ, ΑΒ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα ἀριθμός τις τοὺς ἀριθμοὺς ΑΒ, ΒΓ. Ἄρα οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς πάντα ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον δὲν μετρεῖ, εἶναι πρῶτος.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι οἱ Β, Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι, ἐὰν οἱ Β, Α δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ μετρῇ αὐτοὺς ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτοὺς ὁ Γ. Ἐπειδὴ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α δὲν μετρεῖ τὸν Β, ἄρα ὁ Γ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Α. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ, καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, ἐν ᾧ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τοὺς Β, Α ἀριθμός τις· ἄρα οἱ Α, Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσιν ἀριθμόν τινα, τὸ γινόμενον δὲ τούτων μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος, οὗτος θὰ μετρῇ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς.

Διότι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἂς δίδωσι τὸν Γ, τὸν δὲ Γ ἂς μετρῇ ἀριθμός τις πρῶτος ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ μετρεῖ ἕνα ἐκ τῶν Α, Β.

Διότι, ἂς μὴ μετρῇ τὸν Α· καὶ ὁ Δ εἶναι πρῶτος· οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 29). Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Γ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β δίδει τὸν Γ. Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Α, Β. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε (θεωρ. 19). Οἱ δὲ Δ, Α εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (θεώρ. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν δὲν μετρῇ τὸν Β, θὰ μετρῇ τὸν Α. Ὁ Δ ἄρα μετρεῖ ἕνα ἐκ τῶν Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι σύνθετος ἀριθμός, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτὸν καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Β εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Ἂς μετρῇ αὐτὸν καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Β, ὁ δὲ Β μετρεῖ τὸν Α, καὶ ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Α. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ Γ εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις. Κατὰ τὸν συλλογισμὸν τοῦτον θὰ ληφθῇ τέλος ἀριθμός τις πρῶτος, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ (τὸν Α). Διότι, ἐὰν δὲν ληφθῇ, θὰ μετρῶσι τὸν Α ἄπειροι ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου· ὅπερ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα θὰ ληφθῇ πρῶτός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ μετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὅστις θὰ μετρῇ καὶ τὸν Α.

Πᾶς ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32.

Πᾶς ἀριθμὸς ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ὁ Α εἶναι πρῶτος, τὸ ἐπιταχθὲν θὰ εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ εἶναι σύνθετος, θὰ μετρῇ αὐτὸν ἀριθμός τις πρῶτος (θεώρ. 31).

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς ἢ εἶναι πρῶτος ἢ μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Δοθέντων ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ ἢ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι οἱ μικρότεροι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (θεώρ. 21).

Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ (θεώρ. 3), καὶ ὅσας φορὰς ὁ Δ μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς ἕκαστον τῶν Ε, Ζ, Η. Καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας (θεώρ. 15). Οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα μετροῦσι τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ (ὁρ. 21). Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐὰν οἱ Ε, Ζ, Η δὲν εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, θὰ ὑπάρχωσι μικρότεροι ἀριθμοὶ τῶν Ε,Ζ,Η εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α καὶ ἕκαστος τῶν Κ, Λ ἕκαστον τῶν Β,Γ. Ὅσας δὲ φορὰς ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἂς εἶναι εἰς τὸν Μ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Κ, Λ μετρεῖ ἕκαστον τῶν Β,Γ κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας, καὶ ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Θ μονάδας (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὁ Μ μετρεῖ καὶ ἕκαστον τῶν Β, Γ κατὰ τὰς εἰς ἕκαστον τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Θ μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Μ μονάδας, ὁ Θ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν Α (ὁρ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α. Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Ε, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Θ, Μ (θεώρ. 19). Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ Ε τοῦ Θ· ἄρα καὶ ὁ Μ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ Δ (θεώρ. 13, καὶ V. 14). Καὶ μετρεῖ (ὁ Μ) τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ὁ Δ ἐλήφθη ὡς τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Ε, Ζ, Η εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ. Οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσιν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι.

Διότι οἱ Α, Β ἢ θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ ὄχι. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἂς δίδῃ τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Α δίδει τὸν Γ (θεώρ. 16). Οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Γ (ὁρ. 16). Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ἂς μετρῶσι τὸν Δ. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· ἄρα ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Δ (ὁρ. 16). Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Α, Ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε (θεώρ. 19). Οἱ δὲ Α, Β εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 21)· ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ε ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Β, Ε δίδει τοὺς Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17). Μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον (ὁρ. 21)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν μετροῦσιν ἄρα οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β.

Ἂς μὴ εἶναι τώρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β οἱ Ζ, Ε (θεώρ. 33)· ἄρα εἶναι ἴσος ὁ $A \times E$ πρὸς τὸν $B \times Z$ (θεώρ. 19). Καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Γ· οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Γ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστος (ὁ Γ, ἐκ τῶν μετρουμένων ὑπὸ τῶν Α, Β). Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ. Ἂς μετρῶσι τὸν Δ. Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Α μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Η, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Δ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Θ. Ἄρα ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Δ (ὁρ. 16). Ἄρα τὸ γινόμενον τῶν Α, Η εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν Β, Θ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (θεώρ. 19). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· οἱ δὲ Ζ, Ε εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (θεώρ. 20)· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Ε, Η δίδει τοὺς Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 17). Ὁ δὲ Ε μετρεῖ τὸν Η· καὶ ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Δ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον (ὁρ. 21)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Διότι ἂς μετρῶσιν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Ε μετρεῖ τὸν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν ὁ Ε δὲν μετρῇ τὸν ΓΔ, ὁ Ε μετρῶν τὸν ΔΖ ἂς ἀφίνῃ ὑπόλοιπον τὸν $ΓΖ < Ε$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β μετροῦσι τὸν Ε, ὁ δὲ Ε μετρεῖ τὸν ΔΖ, καὶ οἱ Α,Β ἄρα θὰ μετρῶσι τὸν ΔΖ. Μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· ἄρα θὰ μετρῶσι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸν ΓΖ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ Ε· ὅπερ ἀδύνατον. Ὄχι ἄρα ὁ Ε δὲν μετρεῖ τὸν ΓΔ· ἄρα τὸν μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι (τὸ ἐ.κ.π.).

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοί, οἱ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον μετροῦσι.

Διότι ἂς ληφθῇ ὁ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ (θεώρ. 34). Τότε ὁ Γ ἢ μετρεῖ ἢ δὲν μετρεῖ τὸν Δ. Πρότερον ἂς τὸν μετρῇ· μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ, ἄρα μετροῦσι τὸν Δ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὁ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, οἱ Α, Β, Γ θὰ μετρῶσιν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Δ. Ἂς μετρῶσι τὸν Ε. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ε, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος θὰ μετρήσῃ τὸν Ε (θεώρ. 35). Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος εἶναι ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον ἀριθμὸν μετροῦσι τὸν Δ.

Ἂς μὴ μετρῇ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Ε (θεώρ. 34). Ἐπειδὴ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ε. Λέγω τώρα, ὅτι οὗτος εἶναι καὶ ὁ ἐλάχιστος. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ μετρῶσι οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Ε. Ἂς μετρῶσι τὸν Ζ. Ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸν Ζ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος θὰ μετρήσῃ τὸν Ζ (θεώρ. 35). Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος εἶναι Δ· ὁ Δ ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ζ· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Ζ (θεώρ. 35). Ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Γ, Δ μετρούμενος εἶναι ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσωσιν ἄρα οἱ Α, Β, Γ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ Ε. Ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν μετρεῖται ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν ἀριθμὸς μετρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ, ὁ μετρούμενος θὰ ἔχῃ μέρος ὁμώνυμον πρὸς τὸν μετροῦντα.

Διότι ἂς μετρῆται ὁ ἀριθμὸς Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β· λέγω, ὅτι ὁ Α ἔχει ὁμώνυμον μέρος πρὸς τὸν Β.

Διότι ὅσας φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Γ. Ἐπειδὴ ὁ Β μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Δ τὸν ἀριθμὸν Γ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Γ καὶ ὁ Β τὸν Α. Ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις μετρεῖ ἡ μονὰς Δ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Γ τὸν Α (θεώρ. 15)· ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Β, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Β εἶναι μέρος ὁμώνυμον πρὸς αὐτόν· καὶ ὁ Γ ἄρα εἶναι τοῦ Α ὁμώνυμον μέρος πρὸς τὸν Β. Ὥστε ὁ Α ἔχει μέρος τὸν Γ, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁμώνυμος πρὸς τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἔχῃ ὁ,τιδήποτε μέρος, θὰ μετρῆται ὑπὸ ὁμωνύμου πρὸς τὸ μέρος ἀριθμοῦ.

Διότι ἂς ἔχῃ ὁ ἀριθμὸς Α ὁτιδήποτε μέρος τὸν Β, καὶ ἔστω ὁ ἀριθμὸς Γ ὁμώνυμος πρὸς τὸ μέρος Β· λέγω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Α.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ Β εἶναι μέρος τοῦ Α ὁμώνυμον πρὸς τὸν Γ, εἶναι δὲ καὶ ἡ μονὰς μέρος τοῦ Γ ὁμώνυμον πρὸς αὐτόν, ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς Δ τοῦ ἀριθμοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Γ καὶ ὁ Β τὸν Α. Ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ μονὰς Δ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ ὁ Γ τὸν Α (θεώρ. 15)· ὁ Γ ἄρα μετρεῖ τὸν Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλάχιστος ὢν θὰ περιέχῃ τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλάχιστος ὢν θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ.

Διότι ἔστωσαν ὁμώνυμοι πρὸς τὰ μέρη Α, Β, Γ ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε, Ζ καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὁ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ὁ Η.

Ὁ Η ἄρα ἔχει ὁμώνυμα μέρη πρὸς τοὺς Δ, Ε, Ζ (θεώρ. 37). Πρὸς δὲ τοὺς Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη εἶναι τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα περιέχει τὰ μέρη Α, Β, Γ. Λέγω τώρα, ὅτι τὰ περιέχει καὶ ἐλάχιστος ὤν. Διότι, ἐὰν δὲν τὰ περιέχῃ, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ Η, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ. Ἔστω ὁ Θ. Ἐπειδὴ ὁ Θ περιέχει τὰ μέρη Α, Β, Γ, ὁ Θ ἄρα θὰ μετρῆται ὑπὸ ὁμωνύμων πρὸς τὰ μέρη Α, Β, Γ ἀριθμῶν (θεώρ. 38). Πρὸς δὲ τὰ μέρη Α, Β, Γ ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα μετρεῖται ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ. Καὶ εἶναι μικρότερος τοῦ Η· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἄρα ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ Η, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὰ μέρη Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.