Βιβλίον V.

Ὁρισμοί.

1. Μέρος εἶναι μέγεθος μεγέθους τὸ μικρότερον τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεγαλύτερον.

2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

3. Λόγος δύο ὁμογενῶν μεγεθῶν εἶναι ἡ κατὰ πηλικότητα ποιά τις σχέσις.

4. Μεγέθη λέγονται, ὅτι ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχωσιν ἀλλήλων.

5. Μεγέθη λέγονται, ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθῶσι καταλλήλως.

6. Τὰ δὲ μεγέθη τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον ἂς καλῶνται ἀνάλογα.

7. Ὅταν δὲ ἐκ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου δὲν ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τότε τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον λέγεται, ὅτι ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8. Ἐλαχίστη δὲ ἀναλογία εἶναι ἡ περιέχουσα τρεῖς ὅρους.

9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον εὑρίσκεται εἰς διπλάσιον λόγον ἢ (τὸ πρῶτον) πρὸς τὸ δεύτερον.

10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν (συνεχεῖ) ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον εὑρίσκεται εἰς τριπλάσιον λόγον ἢ (τὸ πρῶτον) πρὸς τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἀναλόγως τῆς ὑπαρχούσης ἀναλογίας.

11. Ὁμόλογα μεγέθη λέγονται τὰ μὲν ἡγούμενα πρὸς τὰ ἡγούμενα, τὰ δὲ ἑπόμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα.

12. Ἐναλλὰξ λόγος εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

13. Ἀνάπαλιν λόγος εἶναι λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

14. Σύνθεσις λόγου εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

15. Διαίρεσις λόγου εἶναι λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16. Ἀναστροφὴ λόγου εἶναι λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

17. Δι' ἴσου λόγος εἶναι, ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταῦτα, λαμβάνωνται δὲ πάντα ἀνὰ δύο καὶ εὑρίσκωνται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ἡ σχέσις τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη εἶναι ἴση πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

18. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία εἶναι, ὅταν, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, νὰ γίνηται ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον τῶν πρώτων μεγεθῶν ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον τῶν δευτέρων μεγεθῶν, ὡς δὲ εἶναι εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως νὰ εἶναι εἰς τὰ δεύτερα ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

1.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον πρὸς ἕκαστον ὁσωνδήποτε μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ, ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ ἀρχικὰ μεγέθη· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ τοῦ ἀθροίσματος Ε+Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μεγέθη ὑπάρχουσιν εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Ε, ἄλλα τόσα ὑπάρχουσιν εἰς τὸ ΓΔ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ε μεγέθη, τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ μεγέθη τὰ ΓΘ, ΘΔ· τότε τὸ πλῆθος τῶν μεγεθῶν ΑΗ, ΗΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΓΘ, ΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΓΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΗ+ΓΘ = Ε+Ζ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἴσον τὸ ΗΒ πρὸς τὸ Ε καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΒ+ΘΔ= Ε+Ζ· ὅσα ἄρα περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Ε, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ, ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα Ε+Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ τοῦ ἀθροίσματος Ε+Ζ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν πρῶτον μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον εἶναι τετάρτου, ὑπάρχῃ δὲ καὶ πέμπτον ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ ἕκτον τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ ΑΒ, ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ Γ, καὶ τρίτον τὸ ΔΕ, ἰσάκις πολλαπλάσιον τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ τοῦ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τοῦ Γ καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΔΕ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὅσα περιέχονται εἰς τὸ ΒΗ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΕΘ, ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὅσα ἄρα ὑπάρχουσιν εἰς ὅλον τὸ ΑΗ ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς ὅλον τὸ ΔΘ ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὁσαπλάσιον ἄρα εἶναι τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. Καὶ ἄρα τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ, θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τοῦ Γ, ὡς θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ, τοῦ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον τετάρτου, ὑπάρχῃ δὲ καὶ πέμπτον ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ ἕκτον τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου θά εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ ἕκτου θὰ εἶναι τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῶσι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν ληφθέντων, ἕκαστον θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσι τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ἄρα ὅσα ἴσα πρὸς τὸ Α περιέχονται εἰς τὸ ΕΖ, ἄλλα τόσα ἴσα πρὸς τὸ Γ περιέχονται εἰς τὸ ΗΘ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Α μεγέθη τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ τὰ ΗΛ, ΛΘ· ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ πρὸς τὸ Α, τὸ δὲ ΗΛ πρὸς τὸ Γ, ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, εἶναι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΕΖ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ Β καὶ τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΗΘ εἶναι τοῦ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον δευτέρου καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῶσι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν ληφθέντων, ἕκαστον θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμόν, ἐὰν ληφθῶσι καταλλήλως.

Διότι ἂς ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν Ε εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἄρα τὸ Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ (θεώρ. 3). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ Μ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν ΑΓ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Κ τοῦ Μ, θὰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, ἐὰν δὲ ἐλλείπῃ, θὰ ἐλλείπῃ (ὁρισμὸς 5). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Κ, Λ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Ε, Ζ, τὰ δὲ Μ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Η, Θ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμόν, ἐὰν ληφθῶσι καταλλήλως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον μεγέθους, ὅπως εἶναι ἀφαιρεθὲν μέρος τοῦ ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἀφαιρεθὲν μέρος τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσον εἶναι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Διότι ἔστω τὸ μέγεθος ΑΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ μεγέθους ΓΔ, ὅπως τὸ ἀφαιρούμενον ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἀφαιρουμένου ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΕΒ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου ΖΔ, τόσον ὅσον εἶναι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Διότι ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἄρα τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ (θεώρ. 1). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι τὸ ΑΕ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἄρα τὸ ΗΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΓΖ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΗΓ πρὸς τὸ ΔΖ, ἄρα τὸ ΑΕ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἄρα τὸ ΕΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΕΒ θὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου ΖΔ, τόσον ὅσον εἶναι ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον μεγέθους, ὅπως εἶναι μέρος τοῦ ἑνὸς μεγέθους πρὸς μέρος τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τοῦ ὑπολοίπου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσον εἶναι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο μεγέθη εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια δύο μεγεθῶν καὶ ἀφαιρεθέντα μερικὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν.

Διότι ἔστωσαν τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν δύο μεγεθῶν Ε, Ζ καὶ τὰ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ ἂς εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν τῶν Ε,Ζ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ ΗΒ, ΘΔ θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς τὰ Ε,Ζ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν.

Διότι ἂς εἶναι πρότερον τὸ ΗΒ ἴσον πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ ΓΚ ἴσον πρὸς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν ΗΒ πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΚΓ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ (θεώρ. 2). Ἔχει δὲ ληφθῇ τὸ ΑΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἄρα τὸ ΚΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΚΘ, ΓΔ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Ζ, ἄρα τὸ ΚΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΓΘ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΘΔ. Ἀλλὰ τὸ Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΓ· ἄρα καὶ τὸ ΘΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ. Ὥστε ἐὰν τὸ ΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε, καὶ τὸ ΘΔ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι, καὶ ἐὰν τὸ ΗΒ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια δύο μεγεθῶν καὶ ἀφαιρεθῶσι μερικὰ μεγέθη, ὥστε τὰ ἀφαιρεθέντα νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἢ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἢ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, τυχὸν δὲ ἄλλο μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἕκαστον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἂς ληφθῇ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, τὸ δὲ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β, ἄρα καὶ τὸ Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε. Τὸ δὲ Ζ εἶναι ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον (τοῦ Γ). Ἐὰν ἄρα τὸ Δ ὑπερέχῃ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Δ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὸ δὲ Ζ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Γ· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ (ὁρισ. 5).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ Γ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β (εἰς τὸ κείμενον Heiberg εἶναι Ε ἀντὶ Γ, προφανῶς ἐκ τυπ. λάθους).

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι τὸ Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ε· ἔχει δὲ ληφθῇ ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον (τοῦ Γ) τὸ Ζ· ἐὰν ἄρα τὸ Ζ ὑπερέχῃ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὸ μὲν Ζ πολλαπλάσιον τοῦ Γ, τὰ δὲ Δ,Ε, ἄλλα τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β (ὁρισ. 5).

Ἄρα τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν μερικὰ μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, καὶ ἀντιστρόφως θὰ εἶναι ἀνάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ μεγαλύτερον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΑΒ, ἄλλο δὲ τυχὸν μέγεθος, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, ἂς ληφθῇ τὸ ΒΕ ἴσον πρὸς τὸ Γ· τὸ μικρότερον ὅμως ἐκ τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ ποτὲ μεγαλύτερον τοῦ Δ (ἀξίωμα συνεχείας, V. ὁρισ. 4). Ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ μικρότερον τοῦ ΕΒ, καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ΖΗ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἓν περισσότερον (δηλ. νὰ ληφθῇ τοῦ Δ τὸ τετραπλάσιον, πενταπλάσιον ἑξαπλάσιον κλπ.), μέχρις ὅτου τὸ λαμβανόμενον γίνῃ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ πολλαπλάσιον μεγαλύτερον τοῦ Κ. Ἂς ληφθῇ, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ πολλαπλάσιον μεγαλύτερον τοῦ Κ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Κ εἶναι τὸ πρῶτον μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ Ν, ἄρα τὸ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΖΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἄρα τὸ ΖΗ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ (θεώρ. 1). Εἶναι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἄρα τὸ ΖΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἄρα τὰ ΖΘ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, εἶναι δὲ τὸ ΕΒ ἴσον πρὸς τὸ Γ, ἄρα τὸ ΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Κ. Τὸ δὲ Κ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ· ἄρα οὔτε τὸ ΗΘ εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Τὸ δὲ ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ· ἄρα ὅλον τὸ ΖΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, Μ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Δ, Μ ἰσοῦται πρὸς τὸ Ν, διότι τὸ Μ εἶναι τριπλάσιον τοῦ Δ, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν Μ, Δ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ Δ, εἶναι δὲ καὶ τὸ Ν τετραπλάσιον τοῦ Δ· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν Μ, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Μ, Δ· ἄρα τὸ ΖΘ ὑπερέχει τοῦ Ν, τὸ δὲ Κ δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν. Καὶ εἶναι τὰ μὲν ΖΘ, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ, τὸ δὲ Ν ἄλλο τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ Δ· ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ (ὁρισμ. 7).

Λέγω ἀκόμη, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, θὰ ἀποδείξωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ μὲν Ν ὑπερέχει τοῦ Κ, τὸ δὲ Ν δὲν ὑπερέχει τοῦ ΖΘ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν Ν πολλαπλάσιον τοῦ Δ, τὰ δὲ ΖΘ, Κ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ· ἄρα τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Γ ἢ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ (ὁρισμ. 7).

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΕ μεγαλύτερον τοῦ ΕΒ. Τὸ μικρότερον ὅμως, τὸ ΕΒ, πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ ποτὲ μεγαλύτερον τοῦ Δ (ἀξίωμα συνεχείας, ὁρισ. 4). Ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον ἂς γίνῃ καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ,τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, Γ· καὶ ἂς ληφθῇ ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, τὸ πρῶτον δὲ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Μ. Εἶναι δὲ τὸ ΗΘ μεγαλύτερον τοῦ Δ· ἄρα ὅλον τὸ ΖΘ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, Μ, δηλ. τοῦ Ν. Τὸ δὲ Κ δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν, ἐπειδὴ καὶ τὸ ΖΗ ὂν μεγαλύτερον τοῦ ΗΘ, δηλ. τοῦ Κ, δὲν ὑπερέχει τοῦ Ν. Καὶ ἀκολουθοῦντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς πρὸς τὰ ἀνωτέρω τελειώνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Ἄρα τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι μεταξύ των ἴσα· καὶ ἐκεῖνα πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ αὐτὸ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα.

Διότι ἂς ἔχῃ ἕκαστον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον, δὲν θὰ εἶχεν ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ Γ (θ. 3)· ἔχει δέ· ἄρα τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Ἂς ἔχῃ τώρα τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, δὲν θὰ εἶχε τὸ Γ πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον (θ. 3)· ἔχει δέ· ἄρα τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β.

Ἄρα τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι μεταξύ των ἴσα· καὶ ἐκεῖνα πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ αὐτὸ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐκ τῶν μεγεθῶν, ἅτινα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον λόγον· τὸ μέγεθος δὲ πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον.

Διότι ἂς ἔχῃ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Β.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Β ἢ μικρότερον. Ἴσον ὅμως δὲν εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β· διότι τότε ἕκαστον τῶν Α, Β θὰ εἶχε τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ Γ (θ. 7). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα δὲν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον τὸ Α τοῦ Β· διότι τότε τὸ Α θὰ εἶχε μικρότερον λόγον πρὸς τὸ Γ ἢ τὸ Β πρὸς τὸ Γ (θ. 8). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Α δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ Β. Ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· ἄρα τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Β.

Ἂς ἔχῃ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι τὸ Β εἶναι μικρότερον τοῦ Α.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴσον ἢ μεγαλύτερον. Ἴσον ὅμως δὲν εἶναι τὸ Β πρὸς τὸ Α· διότι τότε τὸ Γ θὰ εἶχε πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον (θ. 7). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Α δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον τὸ Β τοῦ Α· διότι τότε τὸ Γ θὰ εἶχε πρὸς τὸ Β μικρότερον λόγον ἢ πρὸς τὸ Α (θ. 8). Ἀλλὰ δὲν ἔχει· ἄρα τὸ Β δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Α. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἄρα τὸ Β εἶναι μικρότερον τοῦ Α.

Ἐκ τῶν μεγεθῶν ἄρα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλύτερον λόγον· τὸ μέγεθος δὲ πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Οἱ λόγοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι καὶ μεταξύ των οἱ αὐτοί.

Διότι ἔστωσαν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β εἶναι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ, ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ἀλλὰ ἐὰν ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, θὰ ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ ἐὰν ἦτο ἴσον, θὰ ἦτο ἴσον, καὶ ἐὰν ἦτο μικρότερον, θὰ ἦτο μικρότερον· ὥστε καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Ε, τὰ δὲ Λ, Ν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Ζ· ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ (κατὰ τὸν ὁρισμ. 5).

Οἱ λόγοι ἄρα, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι καὶ μεταξύ των οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

Ἔστωσαν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα Α + Γ + Ε πρὸς τὸ ἄθροισμα Β + Δ + Ζ.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ὥστε καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα Η + Θ + Κ τοῦ ἀθροίσματος Λ + Μ + Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Καὶ εἶναι τὸ μὲν Η τοῦ Α, τὸ δὲ ἄθροισμα Η + Θ + Κ τοῦ ἀθροίσματος Α + Γ + Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, διότι, ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα τόσα ἀκόμη, ὥστε ἕκαστον τῶν πρώτων μεγεθῶν νὰ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν δευτέρων μεγεθῶν ἀντιστοίχως, ὁσαπλάσιον εἶναι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μεγεθῶν (θ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ Λ τοῦ Β καὶ τὸ ἄθροισμα Λ + Μ + Ν τοῦ ἀθροίσματος Β + Δ + Ζ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ἄθροισμα Α + Γ + Ε πρὸς τὸ ἄθροισμα Β + Δ + Ζ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, ἂς ἔχῃ δὲ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Ζ θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι μερικὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ Γ ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ Δ, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ Ε δὲν ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ Ζ (ὁρισμ. 7), ἂς ληφθῶσι, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η νὰ ὑπερέχῃ τοῦ Κ, τὸ δὲ Θ νὰ μὴ ὑπερέχῃ τοῦ Λ· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν εἶναι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, ἐὰν ἄρα τὸ Μ ὑπερέχῃ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισ. 5). Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ἄρα ὑπερέχει καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ δὲν ὑπερέχει τοῦ Λ· καὶ εἶναι τὰ μὲν Μ, Θ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Ε, τὰ δὲ Ν, Λ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Ζ· ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, θὰ ἔχῃ καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μεγαλύτερον λόγον ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἂν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον θὰ εἶναι μικρότερον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, ἂς εἶναι δὲ τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι ἄλλο τυχὸν μέγεθος, ἄρα τὸ Α ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Β ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β (θεώρ. 8). Εἶναι δὲ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἄρα καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον (θεώρ. 10)· ἄρα τὸ Δ εἶναι μικρότερον τοῦ Β· ὥστε τὸ Β εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Δ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἂν τὸ Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Β πρὸς τὸ Δ, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον τὸ Α τοῦ Γ, θὰ εἶναι μικρότερον καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἂν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἂν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τὰ μέρη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν, ἀφοῦ ληφθῶσι καταλλήλως.

Διότι ἔστω ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ὡς τὸ Γ εἶναι πρὸς τὸ Ζ, οὕτως εἶναι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ἄρα ὅσα μεγέθη περιέχονται εἰς τὸ ΑΒ, ἴσα πρὸς τὸ Γ, ἄλλα τόσα περιέχονται εἰς τὸ ΔΕ, ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ἂς διαιρεθῇ τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των, εἶναι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα μεταξύ των, ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ (θεώρ. 7). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (θεώρ. 12)· εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ Γ, τὸ δὲ ΔΚ πρὸς τὸ Ζ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἄρα τὰ μέρη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον μεταξύ των, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν, ἀφοῦ ληφθῶσι καταλλήλως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ ἐναλλὰξ θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ λαμβανόμενα θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Διότι ἃς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ,Δ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη ἔχουσι μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν (θεώρ. 15), εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ (θεώρ. 11). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Η, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 15). Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 11). Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον (θεώρ. 14). Ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὰ δὲ Η, Θ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Δ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ ἐναλλὰξ θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ διαιρεθέντα θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

Ἔστω ἐν ἀναλογίᾳ τὰ προστεθέντα μεγέθη ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.[1]

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, τυχόντα, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΘ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, τὸ ΗΘ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ (θεώρ. 1). Εἶναι δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· τὸ ΗΚ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΛΜ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, τὸ ΛΜ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ (θεώρ. 1). Ἦτο δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ, καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· τὸ ΗΚ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΒ, ΓΔ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΘΚ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, εἶναι δὲ καὶ τὸ ΚΞ ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ τὸ ἄθροισμα ΘΞ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ἄθροισμα ΜΠ τοῦ ΖΔ (θεώρ. 2). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, ἐὰν ἄρα ὑπερέχῃ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (ὁρισμ. 5). Ἂς ὑπερέχῃ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΘΚ, καὶ τὸ ΗΘ ἄρα ὑπερέχει τοῦ ΚΞ. Ἀλλὰ ἐὰν ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, θὰ ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ ΜΝ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΞ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ ΛΜ πρὸς τὸ ΝΠ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον. Καὶ εἶναι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ΑΕ, ΓΖ, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ (ὁρισ. 5).

Ἐὰν ἄρα προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ προστεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν.

---

1. Εἰς τὴν ἔκδοσιν Heiberg δὲν ὑπάρχει σχῆμα. Τοῦτο ἐτέθη ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κειμένου.

Ἔστω ἐν ἀναλογίᾳ διῃρημένα μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θ' ἀποτελῇ ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, θὰ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς μικρότερόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεγαλύτερον.

Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, ὑπάρχουσι προστεθέντα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 17)· ὥστε καὶ διαιρεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ἔχει ληφθῇ δὲ καὶ ἐξ ὑποθέσεως, ὅτι ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ μεγαλύτερον τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· θὰ εἶναι ἄρα μεγαλύτερον καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ (θεώρ. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς μικρότερον τοῦ ΖΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον· ἄρα πρὸς αὐτὸ (δηλ. εἶναι $AB : BE = \Gamma\Delta : Z\Delta$).

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, καὶ προστεθέντα θ' ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν εἶναι ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Διότι ἔστω ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΖΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, θὰ εἶναι καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ προστεθέντα μεγέθη ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, θ' ἀποτελῶσι καὶ διῃρημένα ἀναλογίαν, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ (θεώρ. 17), καὶ ἐναλλὰξ (θεώρ. 16) ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἔχει ληφθῇ ἐξ ὑποθέσεως ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΖΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ὅλον πρὸς ὅλον εἶναι ὡς ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ὡς ὅλον πρὸς ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, ἄρα προστεθέντα μεγέθη εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ εἶναι ἡ ἀναλογία αὕτη κατ' ἀναστροφὴν (ὁρισ. 16)].

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν προστεθέντα μεγέθη ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν, θὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν καὶ κατ' ἀναστροφήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Δ, Ε, Ζ, καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, κατὰ τὸν σχηματισμὸν δὲ ἀναλογίας μὲ λῆψιν τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων ἔστω τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι τυχὸν ἄλλο μέγεθος, τὸ δὲ μεγαλύτερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ μικρότερον (θεώρ. 8), ἄρα τὸ Α ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ Β ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ ἀνάπαλιν (θεώρ. 7, πόρ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε (ἀνάπαλιν, διότι ἔχει ληφθῆ $Β : Γ = Ε : Ζ$)· ἄρα καὶ τὸ Δ πρὸς Ε ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Ἐκ δὲ τῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αὐτό, μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον μεγαλύτερον λόγον (θεώρ. 10). Ἄρα τὸ Δ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἔστω δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι' ἴσου δὲ ἔστω τὸ Α μεγαλύτερον τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ, τὸ δὲ Β εἶναι ἄλλο τυχὸν μέγεθος, ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Β (θεώρ. 8). Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ (θεώρ. 7, πόρ.) Ἄρα καὶ τὸ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκεῖνο εἶναι μικρότερον (θεώρ. 10)· ἄρα τὸ Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ Δ· ἄρα τὸ Δ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Ζ. Καθ'ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον τὸ Α πρὸς τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσον καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τρίτου, καὶ τὸ τέταρτον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἕκτου, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ τὰ Δ, Ε, Ζ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Διότι ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἀκόμη τῶν Γ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐλήφθησαν τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ (θεώρ. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ Η, Κ, Μ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Θ, Λ, Ν καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα δι' ἴσου ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Μ, θὰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, θὰ εἶναι μικρότερον (θεώρ. 20). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια. Ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ (ὁρισμ. 5).

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ καὶ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ δὲ ἀναλογία αὐτῶν εἶναι τεταραγμένη, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, τὰ Δ, Ε, Ζ, καὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμενα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἔστω δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, ἤτοι ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἂς ληφθῶσι τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ Η, Θ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ (θεώρ. 15). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἄρα καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε (θεώρ. 16). Καὶ ἐπειδὴ τὰ Θ, Κ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Β, Δ, τὰ δὲ μέρη τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε (θεώρ. 11). Πάλιν ἐπειδὴ τὰ Λ, Μ εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Γ, Ε, ἄρα εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 15). Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 11), καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ (θεώρ. 16). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τρία μεγέθη τὰ Η, Θ, Λ καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτὰ τὰ Κ, Μ, Ν, λαμβανόμενα ἀνὰ δύο εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ ἀναλογία αὐτῶν εἶναι τεταραγμένη (ὁρ. 18), ἄρα δι' ἴσου (δηλ. συμφώνως πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν λόγων) ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσον, εἶναι ἴσον, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερον, εἶναι μικρότερον (θεώρ. 21). Καὶ εἶναι τὰ μὲν Η, Κ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν Α, Δ, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. Εἶναι ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ (ὁρ. 5).

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ ἡ ἀναλογία αὐτῶν τεταραγμένη, καὶ δι' ἴσου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου πρὸς τέταρτον.

Διότι ἂς ἔχῃ πρῶτον τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἂς ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα κατ' ἀνάπαλιν λόγον θὰ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ (θεώρ. 7, πόρ.). 'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, ἄρα δι' ἴσου θὰ εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ διῃρημένα μεγέθη εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐν ἀναλογίᾳ (θεώρ. 18)· ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. Εἶναι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ (θεώρ. 22).

'Εὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ πέμπτου πρὸς δεύτερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ ἕκτου πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

'Εὰν τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΒ σὺν Ζ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ σὺν Ε.

Διότι ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὸ Ε ἴσον τὸ ΑΗ, πρὸς δὲ τὸ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

'Επειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν Ε πρὸς τὸ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ πρὸς τὸ ΓΘ, ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ἀφαιρεθὲν ΑΗ πρὸς τὸ ἀφαιρεθὲν ΓΘ (θεώρ. 19), ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον ΗΒ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον ΘΔ θὰ εἶναι ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Εἶναι δὲ τὸ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ· ἄρα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσον τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ Ε, τὸ δὲ ΓΘ πρὸς τὸ Ζ, ἄρα τὸ ἄθροισμα ΑΗ σὺν Ζ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ΓΘ σὺν Ε. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ὅλα εἶναι ἄνισα, ἐὰν ἄρα, ἐν ᾧ τὰ ΗΒ, ΘΔ εἶναι ἄνισα καὶ τὸ ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον, προστεθῇ εἰς μὲν τὸ ΗΒ τὸ ἄθροισμα ΑΗ σὺν Ζ, εἰς δὲ τὸ ΘΔ προστεθῇ τὸ ἄθροισμα ΓΘ σὺν Ε, συνάγεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΑΒ σὺν Ζ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ σὺν Β (Ι. κοιναὶ ἐν. 4).

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.