Βιβλίον XII

1.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΖΗΘ καὶ τὰ εἰς αὐτοὺς ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι $ΒΜ^2 : ΗΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ = ΗΖΛ, καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΕ = ΗΖ : ΖΛ (VI. ὁρ. 1). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΕ = ΗΖΛ, τὰς δὲ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ (VI. 6). Ἡ γωνία ἄρα ΑΕΒ = ΖΛΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΒ = ΑΜΒ· διότι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (III. 27)· ἡ δὲ ΖΛΗ = ΖΝΗ· ἄρα καὶ ἡ ΑΜΒ = ΖΝΗ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΑΜ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΗΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπήν. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΜ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΝ. Εἶναι ἄρα ΒΜ : ΗΝ = ΒΑ : ΗΖ (VI. 4). Ἀλλὰ $(ΒΜ : ΗΝ)^2 = ΒΜ^2 : ΗΝ^2$, καὶ $(ΒΑ : ΗΖ)^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ (VI. 20)· καὶ ὡς ἄρα $ΒΜ^2 : ΗΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ $= ΒΔ^2 : ΖΘ^2$.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ $= ΒΔ^2 : ΖΘ^2$, θὰ εἶναι ὡς τὸ $ΒΔ^2$ πρὸς τὸ $ΖΘ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς μικρότερον ἢ πρὸς μεγαλύτερον χωρίον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Σ. Καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἐγγεγραμμένον ὅμως τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ὁ κύκλος εἶναι μικρότερος· ὥστε τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτό, ἐπειδή, ἐὰν διὰ τῶν σημείων Κ, Λ, Μ, Ν φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερον τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος τμήματος τοῦ κύκλου. Τέμνοντες λοιπὸν τὰ ὑπολειπόμενα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ πράττοντες τοῦτο ἐπ' ἄπειρον, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Διότι ἐδείχθη εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι ἂν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ἀπομένοντος ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος, καὶ τοῦτο γίνηται ἐπ' ἄπειρον, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους. Ἂς ὑπολειφθῶσι λοιπὸν καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Τὸ ἀπομένον ἄρα πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χωρίου Σ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· εἶναι ἄρα $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (θ. 1). Ἀλλὰ καὶ $ΒΔ^2$:

$Z\Theta^2$ = κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Σ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος πρὸς τὸ χωρίον Σ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν πολύγωνον, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κύκλος ΑΒΓΔ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· καὶ τὸ χωρίον ἄρα Σ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς $B\Delta^2$ πρὸς $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ $Z\Theta^2$ πρὸς $B\Delta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ εἶναι ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Σ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς τὸ $Z\Theta^2$ πρὸς τὸ ΔB^2, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ (V. 7, πόρ.). Ἀλλ' ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (κατωτ. λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $Z\Theta^2$ πρὸς τὸ $B\Delta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς τὸ $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς τὸ $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ.

Οἱ κύκλοι ἄρα εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω τώρα, ὅτι τοῦ χωρίου Σ ὄντος μεγαλυτέρου τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Διότι ἂς γίνῃ ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Τ εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ, ἐναλλὰξ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ χωρίον Τ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ χωρίον Σ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· καὶ ὁ κύκλος ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χωρίου Τ (V. 14). Ὥστε εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην ἐχούσας τριγώνους βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσας πρὸς ἀλλήλας πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο ἴσα πρίσματα· καὶ ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Διότι ἂς τμηθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ = ΔΘ, ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ (VI. 2). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ ΘΕΒΚ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΘΚ = ΕΒ (I. 34). Ἀλλὰ ΕΒ = ΕΑ· ἄρα καὶ ΑΕ = ΘΚ. Εἶναι δὲ καὶ ΑΘ = ΘΔ· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΑ, ΑΘ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΚΘ, ΘΔ· καὶ εἶναι ἡ γωνία ΕΑΘ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΔ, (I. 29)· ἡ βάσις ἄρα ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΔ (I. 4). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΕΘ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΛΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων καὶ μὴ εὑρισκομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσιν γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἡ γωνία ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας τὰς ΚΔ, ΔΛ, καὶ ἡ γωνία ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ, ἡ βάσις ἄρα ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΔΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ εἶναι ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. ὁρ. 10). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἡ ΘΚ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ

(I. 29) καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΔΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ (VI. ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΚΛ, τὸ δὲ ΑΔΓ πρὸς τὸ ΔΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, αἱ ὁποῖαι δὲν εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΛ. Καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΓ = ΚΘ : ΘΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ (VI. 6). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. ὁρ. 9). Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ [ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ]. Ἑκατέρα ἄρα τῶν πυραμίδων ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ εἶναι ὁμοία πρὸς ὅλην τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΒΖ = ΖΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΖΓ (I. 41). Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ (τριγωνικά), καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ (XI. 39). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων ἀφ' ἑνὸς ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, ἀφ' ἑτέρου ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, εἶναι μεγαλύτερον ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ, ἐπειδὴ καὶ ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΚ, τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων. Ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Τὰ εἰρημένα ἄρα δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ.

Ἡ ὅλη ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, διῃρέθη καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας [καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἄλλης πυραμίδος, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΞ = ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ = ΛΓ (θ. 3), ἡ ΛΞ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, εἶναι ἄρα ΒΓ : ΓΞ = ΕΖ : ΖΦ. Καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΓΞ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (VI. 22)· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (V. 16). Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ (κατωτέρω λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΟΜ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ (XI. 39, V. 7 καὶ θ. 3). Καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ ΟΜ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν αἱ πυραμίδες ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ διαιρεθῶσι καὶ εἰς δύο πρίσματα καὶ εἰς δύο πυραμίδας, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΟΜΝΗ πρὸς τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΣΤΥΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ· διότι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΞΓ, ΡΦΖ ἀντιστοίχως. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα, Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διαιρέσωμεν καὶ εἰς δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διότι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ἂς νοηθῶσιν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πυραμίδες ἐλήφθησαν ἰσοϋψεῖς. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ, θὰ τμηθῶσιν εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους (XI. 17). Καὶ ἔχει τμηθῇ ἡ ΗΓ δίχα κατὰ τὸ Ν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ τμηθῇ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ δίχα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΤΥ. Καὶ εἶναι ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ· εἶναι ἄρα ἴσαι καὶ αἱ ἀπὸ τῶν τριγώνων ΟΜΝ, ΣΤΥ κάθετοι ἐπὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ. Τὰ πρίσματα ἄρα, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ τρίγωνα ΛΞΓ, ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἰσοϋψῆ. Ὥστε καὶ τὰ ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΛΞΓ πρὸς τὴν βάσιν ΡΦΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ἢ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ στερεὸν ἢ πρὸς μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Χ καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· ὅθεν τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος (θ. 3). Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτουσαι πυραμίδες ἂς διαιρεθῶσιν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἂς γίνεται πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῶσι πυραμίδες τινὲς ἀπὸ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ τοῦ στερεοῦ Χ (Χ. 1). Ἂς ὑπολειφθῶσι καὶ ἔστωσαν π.χ. αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· τὰ ὑπόλοιπα ἄρα πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ στερεοῦ Χ. Ἂς διαιρεθῇ καὶ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (θ. 4). Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ· καὶ ὡς ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα αὐτῆς, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ τῶν πρισμάτων της· εἶναι ἄρα μεγαλύτερον καὶ τὸ στερεὸν Χ τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὔτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (λῆμμα 2 θεωρήμ.) καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι πολυγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Μ, Ν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (θ. 5)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Δι' ἴσου ἄρα (V. 22) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως πάλιν (V. 18) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘΚΛ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΚΛΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ, οὕτως ἦτο ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔΕΜ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ (V. 22). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἦτο καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Πᾶν πρῖσμα ἔχον βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Ἔστω πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΔ (I. 34)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ. Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΖΓΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΒΕ. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ· διῃρέθη ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, ἐδείχθη ὅτι εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτὴν [ἐπειδὴ καὶ ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχῃ ἄλλο εὐθύγραμμον σχῆμα (ἐκτὸς δηλ. τοῦ τριγώνου), τοιοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπέναντι τῆς βάσεως, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπέναντι τούτων ἐπίπεδα, τρίγωνα, καὶ εἶναι ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, ἡ δὲ ΗΒΓ πρὸς τὴν ΘΕΖ, ἡ δὲ ΑΒΗ πρὸς τὴν ΔΕΘ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν ΒΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΡ, τὸ δὲ ΒΚ πρὸς τὸ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι πρὸς τὰ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι (XI. 24). Τὰ στερεα ἄρα ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος. Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (XI. 33). Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ ὃν λόγον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ στερεοῦ, διότι καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὅθεν εἶναι ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διότι ἐὰν διαιρεθῶσιν αὗται εἰς πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους, ἐπειδὴ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων διαιροῦνται εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, θὰ εἶναι ὡς μία μερικὴ πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον (τῆς πρώτης πυραμίδος) πρὸς ἄλλην μερικὴν πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τρίγωνον (τῆς ἄλλης πυραμίδος), οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς μιᾶς) τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς ἄλλης), τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. Ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς εἶναι πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8)· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα εἶναι πρὸς τὴν ἔχουσαν ὁμοίαν βάσιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸν κύβον.

9.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι.

Διότι ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω ὅτι τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, καὶ εἶναι τῆς μὲν πυραμίδος ΑΒΓΗ ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ, τῆς δὲ πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, εἶναι ἄρα τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν (XI. 34)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (I. 34). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Τῶν πυραμίδων ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλ' ἂς εἶναι τώρα αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ἀλλ' ὡς εἶναι ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ. Τὰ στερεὰ δὲ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα (XI. 34). Τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον ΒΗΜΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΘΠΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ, τοῦ δὲ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου. Ἔστω πρότερον μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅθεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (XII. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Ὅθεν τὸ ἀνυψούμενον πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδὴ καὶ ἂν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ εἶναι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψούμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄρα ἀνυψωθὲν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ εἶναι ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· τὸ πρίσμα ἄρα τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ὡς ἐδείξαμεν προηγουμένως (XII. 2). Ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψώσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον, ἑκάστου τῶν ἀνυψωθέντων εἶναι τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα, τὰ ἡμίση· καὶ εἶναι τὰ τμήματα τοῦ κυλίνδρου μικρότερα τῶν ἀνυψωθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικῶν τμημάτων. Τέμνοντες τώρα τὰ ὑπόλοιπα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον κυλινδρικὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου (X. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον (Θ. 7. πόρ.)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ κώνου, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ κυλίνδρου. Ἂς ἀναγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· τὸ τετράγωνον ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (Θ. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδή, ὡς ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἐὰν περὶ τὸν κύκλον περιγράψωμεν τετράγωνον, θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ τὸ ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀνυψώσωμεν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, τὰ ὁποῖα καὶ καλοῦνται πρίσματα, θὰ εἶναι τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἥμισυ τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς αἱ βάσεις (XI. 32). Ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνυψωθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καὶ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου ἡ πυραμὶς ἡ ἀνυψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι ἐμπεριέχει αὐτόν. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πυραμίδες ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα ἔχουσαν τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου (Χ. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον· τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου· ὁ κύλινδρος ἄρα εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι ἢ μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ ἢ μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ καθ' ὃ εἶναι μικρότερον τὸ στερεὸν Ξ τοῦ κώνου ΕΝ πρὸς ἐκεῖνο ἔστω ἴσον τὸ στερεὸν Ψ· ὁ κῶνος ἄρα ΕΝ εἶναι ἴσος πρὸς τὰ στερεὰ Ξ σὺν Ψ. Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ τετράγωνον ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου (Θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀνυψώσῶμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς περιγραφείσης· διότι εἶναι αὗται πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (Θ. 6)· εἶναι δὲ ὁ κῶνος μικρότερος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. Ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος (Θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος κώνου. Ὅθεν τέμνοντες τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ Ψ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνυψωθῇ ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὡς δὲ τὸ $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Ὡς δὲ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, ὡς δὲ τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦ ΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν. Καὶ ὡς ἄρα ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδα. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κῶνος ΑΛ τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν εἶναι οὐδὲ ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἀλλ' ὡς τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ἑκάτερος κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος ἑκατέρου κώνου ἀντιστοίχως (0. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς πρὸς τοὺς κώνους κύλινδροι.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ, θὰ εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὡς οἱ κύβοι (τῶν διαμέτρων). Ἂς εἶναι πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ (IV. 6)· τὸ τετράγωνον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τώρα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. Καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον ἀποτμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ πολυγώνου ΑΤΒΥΓΦΔΧ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα (τριγώνων), τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΤΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΤ, ΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ἄξων ΚΛ πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ (XI. ὁρισ. 24). Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΒΚΛ, ΖΜΝ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΝ (VI. 16). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ αὗται εἶναι πλευραὶ ἴσων γωνιῶν τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Κ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι ἡ γωνία ΒΚΤ, τὸ αὐτὸ μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Μ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι καὶ ἡ γωνία ΖΜΟ· ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΟ. Πάλιν ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ, πρὸς τὴν ΜΝ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ πρὸς τὴν ΟΜ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ΤΚΛ, ΟΜΝ· διότι αὗται εἶναι ὀρθαί· αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΛΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΝΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΚΤ.

ΖΜΟ εἶναι ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ (V. 22). Πάλιν ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΤΚ, ΝΟΜ, εἶναι ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. Τῶν τριγώνων ἄρα ΛΤΒ, ΝΟΖ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΛΤΒ, ΝΟΖ εἶναι ἰσογώνια (VI. 5)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοια (VI. ορισ. 1). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΚΤ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΖΜΟ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· διότι περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἴσων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων (XI. ὁρισμ. 9). Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι βάσεις τριγώνους εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (Θ. 8.). Ἡ πυραμὶς ἄρα ΒΚΤΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ εἶναι ὡς ὁ κύβος, τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον φέροντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τοὺς κώνους ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν (ἀντιστοίχων) πυραμίδων, πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΒΚ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΖΜ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ πυραμὶς ΒΚΤΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὑπετέθη δὲ καὶ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἔχων λόγον πρὸς τὸ στερεὸν Ξ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· διότι τὴν ἐμπεριέχει. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΛΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ. Ἀνάπαλιν ἄρα, (V. 7. πόρ.), τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ (θ. 2 λῆμ.). Καὶ ὁ κῶνος ἄρα ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Ὁ κῶνος ἄρα ΑΒΓΔΛ ἔχει πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ εἶναι ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ὁ κύλινδρος ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως πρὸς τὸν κῶνον καὶ ἰσοϋψὴς πρὸς αὐτὸν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου. Καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ὅμοιοι ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὴ εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Διότι ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΑΔ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΗΘ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Κ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ὁ ἄξων ΕΖ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν μέχρι τῶν σημείων Λ, Μ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ἴσοι ἄξονες πρὸς τὸν ἄξονα ΕΚ οἱ ΕΝ, ΝΛ, πρὸς δὲ τὸν ΖΚ ὁσοιδήποτε ἴσοι οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ ἂς νοηθῇ ὁ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΛΜ κύλινδρος ὁ ΟΧ, τοῦ ὁποίου βάσεις εἶναι οἱ κύκλοι ΟΠ, ΦΧ. Καὶ διὰ τῶν σημείων Ν, Ξ ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου ΟΧ καὶ ἔστωσαν τομαὶ τούτων οἱ περὶ τὰ κέντρα Ν, Ξ κύκλοι. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι· καὶ οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ κύλινδροι ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος, ὅσας φορὰς ἄρα εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΕΚ, τόσας φορὰς θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅσας φορὰς εἶναι ὁ ἄξων ΜΚ τοῦ ἄξονος ΚΖ, τόσας φορὰς εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΧΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ ἄξων ΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄξονα ΚΜ, θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΧ, ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλύτερος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, θὰ εἶναι μικρότερος. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ἄξονος ΕΚ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΒΗ, καὶ ὁ ἄξων ΛΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ, τοῦ δὲ ἄξονος ΚΖ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ καὶ ὁ ἄξων ΚΜ καὶ ὁ κύλινδρος ΗΧ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΚΜ, ὑπερέχει καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΧ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσος, εἶναι ἴσος, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, εἶναι μικρότερος. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη.

Διότι ἔστωσαν οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν κύκλων ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ.

Διότι ἂς ἐκβληθῇ ὁ ἄξων ΚΛ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ ἂς νοηθῇ περὶ τὸν ἄξονα ΛΝ ὁ κύλινδρος ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· εἶναι ἄρα ἴσοι καὶ οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΖΜ ἔχει τμηθῇ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ (θ. 13). Εἶναι δὲ ἴσος ὁ μὲν κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΒ, ὁ δὲ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ. Ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ (θ. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἱ ὁποῖοι εἶναι καὶ ὕψη τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ ἂς συμπληρωθῶσιν οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΟ. Λέγω, ὅτι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ.

Διότι τὸ ὕψος ΛΚ ἢ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ΜΝ ἢ ὄχι. Ἔστω πρότερον ἴσον. Εἶναι δὲ καὶ ὁ κύλινδρος ΑΞ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11)· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ. Ὥστε εἶναι καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος, ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι τὸ ὕψος ΛΚ ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ, ἀλλ' ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΜΝ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὕψους ΜΝ τὸ ΠΝ ἴσον πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Π ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΕΟ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΤΥΣ παραλλήλου πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων ΕΖΗΘ, ΡΟ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ ἂς νοηθῇ κύλινδρος ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΑΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλυνδρον ΕΣ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· διότι οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΣ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτω τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ· διότι ὁ κύλινδρος ΕΟ ἐτμήθη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα (θ. 13). Εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΠΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Τῶν κυλίνδρων ἄρα ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· λέγω, ὅτι ὁ κύλινδρος ΛΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ· διότι εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ (θ. 13)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ. Ἴσος ἄρα ὁ κύλινδρος ΛΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ὑπαρχόντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Διότι ἃς ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου Κ ἡ εὐθεῖα ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Η ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ ἡ ΗΑ καὶ ἃς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Τέμνοντες τώρα τὸ τόξον ΒΑΔ δίχα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ ἀφήσωμεν κατά τινα στιγμὴν τόξον μικρότερον τοῦ ΑΔ (Χ. 1). Ἂς ἀφήσωμεν καὶ ἔστω τὸ ΛΔ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΛΜ καὶ ἃς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ ΛΔ, ΔΝ· τὸ τόξον ΛΔ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΝ (ΙΙΙ. 3, Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΛΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἡ ΛΝ ἄρα δὲν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον οἱ ΛΔ, ΔΝ δὲν ἐφάπτονται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐὰν τώρα ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ εὐθείας ἴσας πρὸς τὴν ΛΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ταύτην, θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς νοηθῶσιν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς τμηθῶσιν αἱ σφαῖραι δι' ἐπιπέδου τινος διὰ τοῦ κέντρου· αἱ τομαὶ θὰ εἶναι κύκλοι, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ σφαῖρα προέρχεται ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου, τῆς διαμέτρου μενούσης ἀκινήτου· ὥστε καὶ εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον θὰ σχηματίσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου, δηλ. καὶ τοῦ κύκλου διάμετρος, εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν ἀγομένων εὐθειῶν. Ἔστω λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, εἰς δὲ τὴν μικροτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΖΗΘ,καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο διάμετροι αὐτῶν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ ἀφοῦ ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι κύκλοι οἱ ΒΓΔΕ, ΖΗΘ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΖΗΘ, τοῦ ὁποίου πλευραὶ ἔστωσαν εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΑ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ ἡ ΑΞ καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἂς διέρχωνται ἐπίπεδα· ἕνεκα τῶν προηγουμένως λεχθέντων θὰ σχηματίσωσι ταῦτα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ἂς σχηματίσωσι, τῶν ὁποίων ἡμικύκλια ἔστωσαν τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπὶ τῶν διαμέτρων ΒΔ, ΚΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΞΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΞΑ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ (XI. 18)· ὥστε καὶ τὰ ἡμικύκλια ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἡμικύκλια ΒΕΔ, ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ (III. ὁρ. 1)· εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ τὰ τεταρτημόρια ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ. Ὅσαι ἄρα πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ, τόσαι εἶναι καὶ εἰς τὰ τεταρτημόρια ΒΞ, ΚΞ ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. Ἂς ἐγγραφῶσι καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ· αὗται θὰ πέσωσι ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Ἂς πέσωσι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΧΦ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα ἡμικύκλια τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐλήφθησαν ἴσαι χορδαὶ αἱ ΒΟ, ΚΣ (III. 28), καὶ εἶναι κάθετοι αἱ ΟΦ, ΣΧ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν ΟΦ πρὸς τὴν ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ πρὸς τὴν ΚΧ (III. 27, I. 26). Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΚΑ. Καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΦΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΧΑ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΛ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΛ· ἡ ΧΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (VI. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν

ΟΦ, ΣΧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἡ ΟΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΧ (XI. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· ἄρα καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (I. 30). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΚΒΟΣ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν ληφθῶσι τυχόντα σημεῖα, ἡ τὰ σημεῖα συνδέουσα εὐθεῖα εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους (XI. 7). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάτερον τῶν τετραπλεύρων ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐπίπεδον. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ εἰς ἓν ἐπίπεδον. Ἐὰν τώρα νοήσωμεν ἀπὸ τῶν σημείων Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ἠγμένας εὐθείας ἐπὶ τὸ Α θὰ σχηματισθῇ μεταξὺ τῶν τόξων ΒΞ, ΚΞ στερεόν τι σχῆμα πολύεδρον συγκείμενον ἐκ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τετράπλευρα ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ κατασκευάσωμεν τὰ αὐτὰ ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ΒΚ καὶ ἐπίσης ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, θὰ σχηματισθῇ σχῆμά τι πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν περιεχόμενον ὑπὸ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ καὶ τὰ ὁμοταγῆ πρὸς αὐτὰ (ὁμοίως διατεταγμένα), κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι ὁ κύκλος ΖΗΘ.

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ καὶ ἂς συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Ψ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΨΒ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΨ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου (XI. ὁρισ. 3). Ἡ ΑΨ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ εἶναι καὶ τὸ AB^2 ἴσον πρὸς τὸ AK^2. Καὶ εἶναι $AB^2 = A\Psi^2 + \Psi B^2$ διότι ἡ γωνία Ψ εἶναι ὀρθὴ (I. 47)· καὶ $AK^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. Ἄρα $A\Psi^2 + \Psi B^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. Ἃς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $A\Psi^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $B\Psi^2$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΨK^2· ἡ ΒΨ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΨΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ψ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΨΒ, ΨΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΧΦ, εἶναι δὲ ἴση ἡ ΧΦ πρὸς τὴν ΣΟ, ἡ ΚΒ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΚΒ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ εἶναι ἴσαι καὶ μικροτέρα ἡ ΟΣ καὶ ἡ ΒΨ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸ KB^2 ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2\,B\Psi^2$. Ἃς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΚΩ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $B\Delta < 2\ \Delta\Omega$, καὶ εἶναι $B\Delta : \Delta\Omega = \Delta B \times B\Omega : \Delta\Omega \times \Omega B$, ἀφοῦ ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΩ τετράγωνον καὶ συμπληρωθῇ τὸ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ἄρα $\Delta B \times B\Omega < 2\ \Delta\Omega \times \Omega B$. Καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΔ, εἶναι τὸ μὲν $\Delta B \times B\Omega = BK^2$, τὸ δὲ $\Delta\Omega \times \Omega B = K\Omega^2$ (III. 31, VI. 8 πόρ.)· εἶναι ἄρα $KB^2 < 2\ K\Omega^2$. Ἀλλὰ $KB^2 > 2\ B\Psi^2$· εἶναι ἄρα $K\Omega^2 > B\Psi^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΑ, εἶναι $BA^2 = AK^2$. Καὶ εἶναι $BA^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, καὶ $KA^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$ (I. 47)· ἄρα $B\Psi^2 + \Psi A^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$, ἐξ ὧν τὸ $K\Omega^2 > B\Psi^2$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΩA^2 εἶναι μικρότερον τοῦ ΨA^2. Εἶναι ἄρα ἡ $A\Psi > A\Omega$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ $A\Psi > AH$. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν βάσιν τοῦ πολυέδρου, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μικροτέρας σφαίρας· ὥστε τὸ πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐν ᾧ ἄρα ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι, ἐνεγράφη εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἄλλην σφαῖραν ἐγγραφῇ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς

τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΒΓΔΕ, τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῶσι τὰ στερεὰ εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς (ὁμοίας κατὰ τὴν τάξιν) πυραμίδας, αἱ πυραμίδες θὰ εἶναι ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8. πόρ.)· ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς ΛΒ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς ἐκ τῶν πυραμίδων τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ σφαίρας πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΛΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Λ σφαίρας πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΛΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας, τουτέστιν ἡ διάμετρος ΒΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἂς νοηθῶσι σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἂς ἔχῃ πρότερον πρὸς μικροτέραν τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς νοηθῇ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ ὁμόκεντρος πρὸς τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (θ. 17), ἂς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ· τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 17, πόρ.). Ἔχει δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ, οὕτως τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ σφαῖρα

ΗΘΚ πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ πολυέδρου (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ ἔχει λόγον πρὸς μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλυτέραν τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα (V. 7, πόρ.) ἡ σφαῖρα ΛΜΝ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΕΖ πρὸς τὴν διάμετρον ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ σφαῖρα ΛΜΝ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ, οὕτως ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕΖ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ. 2, λῆμμα). Καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικροτέραν. Ἡ σφαῖρα ἄρα ΑΒΓ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.