Βιβλίον XI.

Ὁρισμοί.

1. Στερεὸν εἶναι τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος.

2. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

3. Εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐν τῷ (θεωρουμένῳ) ἐπιπέδῳ καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.

4. Ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων αἱ κείμεναι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἄλλο.

5. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον εἶναι, ὅταν ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου εὑρισκομένου πέρατος τῆς εὐθείας ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος, καὶ ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ἀχθείσης.

6. Κλίσις ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἀγομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

7. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ὁμοίως κεκλιμένον καὶ ἄλλο πρὸς ἄλλο, ὅταν αἱ γωνίαι κλίσεως εἶναι ἴσαι.

8. Παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι τὰ ἀσύμπτωτα.

9. Ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων, ἴσων τὸ πλῆθος, περιεχόμενα.

10. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος καὶ τὸ μέγεθος.

11. Στερεὰ γωνία εἶναι ἡ κλίσις πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς περισσοτέρων τῶν δύο εὐθειῶν γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἄλλως· στερεὰ γωνία εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐχουσῶν κοινὴν κορυφήν.

12. Πυραμὶς εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων ἀρχομένων ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ καταληγόντων εἰς ἓν σημεῖον.

13. Πρίσμα εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων δύο ἀπέναντι κείμενα εἶναι ἴσα, ὅμοια καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

14. Σφαῖρα εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ἡμικύκλιον στραφὲν περὶ

τὴν διάμετρον αὐτοῦ μένουσαν ἀκίνητον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

15. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

16. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

17. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη κατὰ τὰ δύο μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

18. Κῶνος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν μένουσαν ἀκίνητον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον. Καὶ ἂν μὲν ἡ μένουσα ἀκίνητος κάθετος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, τὴν ἐκτελοῦσαν τὴν περιστροφήν, ὁ κῶνος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος, ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μεγαλυτέρα, ὀξυγώνιος.

19. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ τρίγωνον.

20. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς περιστρεφομένης εὐθείας.

21. Κύλινδρος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον περιστραφὲν περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, μένουσαν ἀκίνητον, ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

22. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

23. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ γραφόμενοι ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι κειμένων καὶ περιστρεφομένων πλευρῶν.

24. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων καὶ οἱ ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι ἀνάλογοι.

25. Κύβος εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

26. Ὀκτάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

27. Εἰκοσάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

28. Δωδεκάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων.

1.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω, ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Τῆς ΑΒ θὰ ὑπάρχῃ συνεχὴς εὐθεῖα κειμένη ἐπ' εὐθείας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι κοινὸν τμῆμα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδή, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράψωμεν κύκλον, θὰ ἀντιστοιχῶσιν εἰς τὰς διαμέτρους ἄνισα τόξα.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εἶναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΒ, ΖΗ καὶ αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διότι ἐὰν τοῦ τριγώνου ΕΓΒ εἶναι μέρος ἢ τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου, θὰ εἶναι καὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι ἐπὶ ἄλλου. Ἐὰν δὲ τοῦ τριγώνου ΕΓΒ τὸ μέρος ΖΓΒΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου, θὰ εἶναι καὶ τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, μέρος δέ τι εἰς ἄλλο· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (θ. 1). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὸ ἐπίπεδον δέ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ τρίγωνον ΕΓΒ, εἰς τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἑκάστη τῶν ΕΓ, ΕΒ, καὶ εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον εὑρίσκονται καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ, (θ. 1). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ γραμμὴ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΒ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ εἰς τὸ Β εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΔΕΒ (Ι αἴτ. 1), εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ εὐθεῖα ΔΖΒ. Θὰ ὑπάρχωσι τότε τῶν εὐθειῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ θὰ περιέχωσιν αὗται ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἄτοπον (Ι αἴτ. 9). Δὲν εἶναι ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Β πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

Διότι ἂς ὑψωθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὰς τεμνομένας κατὰ τὸ σημεῖον Ε εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ε τυχοῦσα ἡ ΗΕΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἀκόμη ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΔ καὶ ΓΕ = ΕΒ καὶ γωνία ΑΕΔ ἴση πρὸς γωνίαν ΓΕΒ, καὶ ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΔ = πρὸς τρίγωνον ΓΕΒ (Ι. 4). Ὥστε καὶ ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΕΘ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας βαίνουσιν αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· θὰ ἔχωσιν ἄρα ἴσας καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως (Ι. 26). Ἄρα ΗΕ = ΕΘ καὶ ΑΗ = ΒΘ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΒ καὶ ἡ ΖΕ εἶναι κοινὴ (τῶν τριγώνων ΑΕΖ, ΒΕΖ) καὶ κάθετος, ἡ βάσις ἄρα ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΔ = ΓΒ, εἶναι δὲ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο εὐθεῖαι ΖΑ, ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἐδείχθη ἡ βάσις ΖΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΑΔ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΒΓ (Ι. 8). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΑΗ = ΒΘ, ἀλλὰ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο, τὰς ΖΒ, ΒΘ. Καὶ ἐδείχθη γωνία ΖΑΗ = ΖΒΘ· ἡ βάσις ἄρα ΖΗ = πρὸς βάσιν ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΗΕ = ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΗΕ, ΕΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ· ἡ γωνία ἄρα ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕΖ. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΕΖ, ΘΕΖ εἶναι ὀρθή. Ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διὰ τοῦ Ε τυχόντως ἀχθεῖσαν ΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Εὐθεῖα δὲ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν σχηματίζῃ ὀρθὰς γωνίας πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Β· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖνται, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἡ δὲ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ ἂς προεκβληθῇ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὁριζόμενον ἐπίπεδον· εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦτο θὰ σχηματίσῃ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κοινὴν τομήν, εὐθεῖαν γραμμὴν (θ. 3). Ἂς σχηματίσῃ τὴν ΒΖ. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΑΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ὥστε ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Καθ' ὑπόθεσιν δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή· ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εὑρίσκεται ἄρα ἡ ΒΓ ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν τὰ σημεῖα ἀφῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τὰ Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἡ ΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, θὰ εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ εὑρισκομένη ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΓΔΒ, ΓΔΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΑΔ = ΒΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ (Ι. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς αὐτῶν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 5). Εἰς ὃ δὲ ἐπίπεδον κεῖνται αἱ ΔΒ, ΔΑ κεῖται καὶ ἡ ΑΒ· διότι πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (θ. 2). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ Ε, Ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μὲ τὰς παραλλήλους.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖται, καὶ ὅτι κεῖται ἐκτὸς τούτου ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τῶν (ΑΒ, ΓΔ) κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν (θ. 3). Ἔστω τὴν ΕΖ· αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι ΕΗΖ, ΕΖ θὰ περιέχωσιν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ δὲν θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου· θὰ κεῖται ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

8.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΑΒ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ἄλλη ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 7). Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ, αἱ γωνίαι ἄρα ΑΒΔ, ΓΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (Ι. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΔ· καὶ ἡ ΓΔΒ ἄρα εἶναι ὀρθή· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΒ· διότι ἑκατέρα εἶναι ὀρθή· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ (τοῦ τριγώνου ΑΒΔ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (τριγ. ΒΔΕ). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΒΕ = ΑΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ. Καὶ ἡ βάσις αὐτῶν ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΒ · ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΔΑ (θ. 4). Ἡ ΕΔ ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΑ. Εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΑ κεῖται ἡ ΔΓ, ἐπειδὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον

ΒΔΑ κεῖνται αἱ ΑΒ, ΒΔ, εἰς τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΑΒ, ΒΔ κεῖται καὶ ἡ ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τομῆς δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕ, ΔΒ· ὥστε ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΗΘ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΕΖ, ΑΒ, ἡ δὲ ΗΚ ἂς ἀχθῇ πάλιν κάθετος (ἐπὶ τὴν ΕΖ) κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕ, ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ, ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ (θ. 4). Καὶ εἶναι ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ (θ. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι (θ. 6). Ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας.

Διότι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἂς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἂς μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΒΑ = ΒΓ = ΕΔ = ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ (I. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Αἱ δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μὲ τὴν εὐθεῖαν εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (Θ. 9)· ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου σημεῖον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ἡ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ (I. 12). Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΔΕ (I. 11), κειμένη εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (I. 31).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΔΑ, ΔΕ, ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔΑ (Θ. 4). Καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδόν τι, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Θ. 8)· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἄρα εἶναι κάθετος ἡ ΗΘ καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ· ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΗ· εἶναι δὲ ἡ ΑΖ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ. Ἐὰν δὲ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (θ. 4)· ἡ ΖΑ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΗΘ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΕΔ, ΗΘ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἀπὸ δοθέντος ἄρα σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἤχθη εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἐκ σημείου κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον τὸ Α· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α νὰ ὑψωθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἄς θεωρηθῇ σημεῖόν τι Β ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ἄς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ΑΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐπὶ τὸ δοθὲν ἄρα ἐπίπεδον ὑψώθη κάθετος ἐκ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ σημείου τοῦ Α, ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α ἄς ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἄς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΑΓ· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Α (θ. 3). Ἔστω τὴν ΔΑΕ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ὀρθή· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον.

Δὲν θὰ ὑψωθῶσιν ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστω εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ κάθετος ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι,προεκτεινόμενα θὰ συναντηθῶσιν. Ἂς συναντηθῶσιν· ἡ κοινὴ τομή των βεβαίως θὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (θ. 3)· ἔστω ἡ ΗΘ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΒΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖ, ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΚ κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ, τὸ ὁποῖον προεξετάθη· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΚ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΒΑΚ εἶναι ὀρθή. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι ΑΒΚ, ΒΑΚ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα προεκτεινόμενα τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΓΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλα.

Τὰ ἐπίπεδα ἄρα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας τὰς ΔΕ, ΕΖ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΔΕ , ΔΖ προεκτεινόμενα δὲν θὰ συναντηθῶσι.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΗ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ, ΕΖ καὶ ἂς τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ διὰ τοῦ Η πρὸς μὲν τὴν ΕΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΘ, πρὸς δὲ τὴν ΕΖ ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, ΕΖ, (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ, ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΒΗΘ, ΒΗΚ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ, αἱ γωνίαι ἄρα ΗΒΑ, ΒΗΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (Ι. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΗΘ· εἶναι ἄρα ὀρθὴ καὶ ἡ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΛ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΗΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΗΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας τὰς ΒΑ, ΒΓ, ἡ ΗΒ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΒΓ. [Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ κάθετος ἡ ΗΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΒΓ]. Τὰ δὲ ἐπίπεδα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα (θ. 14)· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, αἱ ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η. Ἂς προεκβληθῶσιν πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ καὶ ἂς συναντηθῶσι πρῶτον κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖΚ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, καὶ πάντα ἄρα τὰ σημεῖα τῆς ΕΖΚ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, (θ. 1). Ἓν δὲ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΕΖΚ εἶναι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ Κ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμενα θὰ συναντηθῶσι. Δὲν συναντῶνται ὅμως, διότι ὑπετέθησαν παράλληλα· δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η δὲν θὰ συναντηθῶσιν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ προεκβαλλόμεναι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ μὴ συναντώμεναι εἶναι παράλληλοι. Ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ καὶ ἂς συναντᾷ ἡ ΑΔ τὸ ἐπίπεδον ΚΛ κατὰ τὸ σημεῖον Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΞ, ΞΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΚΛ, ΜΝ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΗΘ, ΚΛ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ εἶναι παράλληλοι. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΕΞ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΑΞ : ΞΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἡ ΞΖ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, εἶναι ΑΞ : ΞΔ = ΓΖ : ΖΔ (VI. 2). Ἐδείχθη δὲ ΑΞ : ΞΔ = ΑΕ : ΕΒ· ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἂς διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ καὶ τοῦ δοθέντος ἡ ΓΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΖΗ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 3)· ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΕ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ ὀρθή· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ (Ι. 28). Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (θ. 8). Καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι κείμεναι εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο (ὁρ. 4). Καὶ ἐδείχθη ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων τὴν ΓΕ, κειμένη εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον τὸ ΔΕ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα ΔΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ ΕΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν, καὶ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς τῆς ΑΔ ἤχθη κάθετος ἡ ΔΕ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ εἶναι ὑψωμέναι δύο κάθετοι κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 13). Οὐδεμία ἄρα ἄλλη κάθετος δύναται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Ἐὰν στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι δύο τυχοῦσαι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης. Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴσαι, ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ μὲ πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΑΒ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΑΕ = ΑΔ$, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἀχθεῖσα ἡ ΒΕΓ ἂς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ $ΔΑ = ΑΕ$, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ (τριγώνου) ἴσαι πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ· ἡ βάσις ἄρα ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ $ΒΔ + ΔΓ > ΒΓ$ (I. 20), ἐξ ὧν ἡ ΔΒ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ τῆς λοιπῆς τῆς ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα. Καὶ ἐπειδὴ $ΔΑ = ΑΕ$, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις $ΔΓ >$ βάσεως ΕΓ, ἡ γωνία ἄρα ΔΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΑΓ (I. 25). Ἐδείχθη δὲ καὶ $ΔΑΒ = ΒΑΕ$· ἄρα $ΔΑΒ + ΔΑΓ > ΒΑΓ$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων τυχουσῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα $ΒΑΓ + ΓΑΔ + ΔΑΒ$ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Β στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο τυχοῦσαι ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς (θ. 20)· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΑ + ΑΒΔ 〉 ΓΒΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ μὲν ΒΓΑ + ΑΓΔ 〉 ΒΓΔ, αἱ δὲ ΓΔΑ + ΑΔΒ 〉 ΓΔΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι ΓΒΑ + ΑΒΔ + ΒΓΑ + ΑΓΔ +ΓΔΑ + ΑΔΒ 〉 τῶν τριῶν ΓΒΔ + ΒΓΔ + ΓΔΒ. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς ΓΒΔ + ΒΔΓ + ΒΓΔ = 2 ὀρθαὶ (Ι. 32)· αἱ ἓξ ἄρα ΓΒΑ + ΑΒΔ + ΒΓΑ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΑΔΒ 〉 2 ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἐννέα ἄρα γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ ΓΒΑ + ΑΓΒ + ΒΑΓ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΓΑΔ + ΑΔΒ + ΔΒΑ + ΒΑΔ = 6 ὀρθάς, ἐξ ὧν αἱ ΑΒΓ + ΒΓΑ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΑΔΒ + ΔΒΑ 〉 2 ὀρθῶν· αἱ λοιπαὶ ἄρα τρεῖς αἱ ΒΑΓ + ΓΑΔ + ΔΑΒ αἱ περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

Πᾶσα ἄρα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰς ἴσας εὐθείας, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, αἱ μὲν ΑΒΓ + ΔΕΖ 〉 ΗΘΚ, αἱ δὲ ΔΕΖ + ΗΘΚ 〉 ΑΒΓ, καὶ ἀκόμη αἱ ΗΘΚ + ΑΒΓ 〉 ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ = ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τουτέστιν ὅτι δύο ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ οἱαιδήποτε εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀφοῦ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ γίνονται ἴσαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΚ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον αὐτῆς Θ ἂς κατασκευασθῇ γωνία ΚΘΛ = ΑΒΓ· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΛ ἴση πρὸς μίαν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΗΛ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΚΘ, ΘΛ καὶ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία = ΚΘΛ, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒΓ + ΗΘΚ $>$ ΔΕΖ, εἶναι δὲ ΑΒΓ = ΚΘΛ, ἄρα ΗΘΛ $>$ ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ γωνία ΗΘΛ $>$ ΔΕΖ, ἡ βάσις ἄρα ΗΛ $>$ τῆς βάσεως ΔΖ (I. 24). Ἀλλὰ ΗΚ + ΚΛ $>$ ΗΛ (I. 20). Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΗΚ + ΚΛ $>$ ΔΖ. Εἶναι δὲ ΚΛ = ΑΓ· ἄρα ΑΓ + ΗΚ $>$ ΔΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν ΑΓ + ΔΖ $>$ ΗΚ, καὶ ἀκόμη αἱ ΔΖ + ΗΚ $>$ ΑΓ. Εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία· πρέπει ὅμως αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, καὶ ἀκόμη αἱ τρεῖς νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· πρέπει ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία.

Ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον (θ. 22). Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἡ μὲν ΑΓ = ΛΜ, ἡ δὲ ΔΖ = ΜΝ, καὶ ἀκόμη ἡ ΗΚ = ΝΛ, καὶ ἂς γραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΛΜΝ κύκλος ὁ ΛΜΝ (IV. 5), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ $>$ τῆς ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ΑΒ $\leqq$ ΛΞ. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ = ΒΓ, ἡ δὲ ΞΛ = ΞΜ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΛΞ, ΞΜ· καὶ ἡ βάσις ΑΓ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΛΜ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΛΞΜ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ = ΜΞΝ, καὶ ἀκόμη ἡ ΗΘΚ = ΝΞΛ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς τὰς ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς. Ἐλήφθησαν δὲ μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ ΑΒ ἄρα δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μικροτέρα· καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΞΟ, ΒΓ = ΞΠ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΒΓ, εἶναι καὶ ΞΟ = ΞΠ· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΛΟ = ΠΜ. Ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΠ (VI. 2) καὶ τὸ τρίγ. ΛΜΞ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΟΠΞ (I. 29)· εἶναι ἄρα ΞΛ : ΛΜ = ΞΟ : ΟΠ (VI. 4)· ἐναλλὰξ ΛΞ : ΞΟ = ΛΜ : ΟΠ (VI. 16). Εἶναι δὲ ΛΞ $>$ ΞΟ· ἄρα καὶ ΛΜ $>$ ΟΠ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι ΛΜ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΑΓ $>$ ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΠ καὶ ἡ βάσις ΑΓ $>$ βάσεως ΟΠ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ $>$ τῆς γωνίας ΟΞΠ (I. 25). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΞΝ, ἡ δὲ ΗΘΚ τῆς ΝΞΛ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν τριῶν ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ. Ἀλλὰ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ ἐλήφθησαν μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἴσαι· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ΑΒ $<$ ΛΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ἴση· εἶναι ἄρα ΑΒ $>$ ΛΞ. Ἂς ὑψωθῇ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ σημείου Ξ ἡ ΞΡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ (θ. 12) καὶ ἔστω $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΡΞ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ, εἶναι ἄρα ἡ ΡΞ κάθετος καὶ πρὸς ἑκάστην τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ΛΞ = ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΞΡ, ἡ βάσις ἄρα ΡΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΡΜ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΡΛ, ΡΜ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 = ΛΞ^2 + ΞΡ^2$. Εἶναι δὲ $ΛΞ^2 + ΞΡ^2 = ΛΡ^2$ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΛΞΡ εἶναι ὀρθή· ἄρα $ΑΒ^2 = ΡΛ^2$· ἄρα ΑΒ = ΡΛ. Ἀλλὰ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἑκατέρα δὲ τῶν ΡΜ, ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΛ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐλήφθη ἡ βάσις ΛΜ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, ἡ γωνία ἄρα ΛΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΜΡΝ = ΔΕΖ, ἡ δὲ ΛΡΝ = ΗΘΚ.

'Εκ τριῶν ἄρα ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δοθείσας τρεῖς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, κατεσκευάσθη ἡ μὲ κορυφὴν τὸ Ρ στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λ ῆ μ μ α.

Πῶς δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$ ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς· ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ > ΛΞ$ καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἂς ἐναρμοσθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΑΒ (IV. 1), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΒ. 'Επειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ, ἡ ΑΓΒ ἄρα εἶναι ὀρθὴ (III. 31). "Αρα $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ (I. 47)."Ωστε $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = ΓΒ^2$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΛΞ$. "Αρα $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΓΒ^2$. 'Εὰν λοιπὸν λάβωμεν $ΞΡ = ΓΒ$, θὰ εἶναι $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$· ὅπερ προέκειτο νὰ ποιηθῇ.

24.

'Εὰν στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ στερεὸν ΓΔΘΗ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΒΗ, ΓΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). 'Η ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι. 'Η ΒΓ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. 'Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

"Ας ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΘ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων οὐχὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· θὰ περιέχωσιν ἄρα ἴσας γωνίας (θ. 15)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΓ, ΓΖ (I. 34), καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (I. 4). Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΗ, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΑΕ = ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Διότι ἃς τμηθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕΖΦ πρὸς τὴν βάσιν ΕΘΓΖ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒΖΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΗΓΔ.

Διότι ἃς προεκβληθῇ ἡ ΑΘ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, καὶ ἃς ληφθῶσι πρὸς μὲν τὴν ΑΕ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΑΚ, ΚΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΘ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΘΜ, ΜΝ καὶ ἃς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ καὶ τὰ στερεὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ ἀκόμη τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἐπίσης, καὶ ἀκόμη τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν στερεῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι ἴσα πρὸς τρία ἐπίπεδα (ἀντιστοίχως). Ἀλλὰ τὰ τρία εἶναι ἴσα πρὸς τὰς τρεῖς ἀπέναντι βάσεις (θ. 24)· τὰ τρία ἄρα στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (ὁρ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ὅσας ἄρα φορὰς ἡ βάσις ΛΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΑΖ, τόσας φορὰς καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ εἶναι τοῦ στερεοῦ ΑΥ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὅσας φορὰς ἡ βάσις ΝΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΘ, τόσας εἶναι καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ τοῦ στερεοῦ ΘΥ. Καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΛΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΖ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΝΖ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Διότι, ἐνῷ ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν βάσεις αἱ ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεὰ τὰ ΑΥ, ΥΘ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βάσεως ΑΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΑΥ καὶ ἡ βάσις ΛΖ καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ, τῆς δὲ βάσεως ΘΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΘΥ καὶ ἡ βάσις ΝΖ καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΖΝ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴση, ἴσον, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΛΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΛΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΥΘ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ σημείου ἐπ' αὐτῆς ὡς κορυφῆς νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Δ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ· πρέπει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου ὡς κορυφῆς τοῦ Α νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ ἂς τέμνῃ αὐτὴ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΕΔΓ ἴση ἡ ΒΑΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΔΗ ἴση ἡ ΒΑΚ (I. 23), καὶ ἂς ληφθῇ ΑΚ = ΔΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΛ (θ. 12), καὶ ἂς ληφθῇ ΚΘ = ΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία Α ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Δ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ.

Διότι ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3)· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΖΗΔ, ΖΗΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΘΚΑ, ΘΚΒ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΚΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΕ ἀντιστοίχως, καὶ περιέχουσι γωνίας ἴσας, ἡ βάσις ἄρα ΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΕ (I. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΘΒ = ΖΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΑΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΗ, ΗΖ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΔ (I. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΑΒ = ΔΕ· δύο λοιπὸν αἱ ΘΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΔΕ. Καὶ ἡ βάσις ἄρα ΘΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἡ γωνία ἄρα ΒΑΘ = ΕΔΖ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΘΑΛ = ΖΔΓ [διότι ἐὰν ληφθῇ ΑΛ = ΔΓ καὶ ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΒΑΛ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΕΔΓ, ἐξ ὧν ἐλήφθη ΒΑΚ = ΕΔΗ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΓ. Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· δύο λοιπὸν αἱ ΛΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΗ, ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἡ βάσις ἄρα ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΓ καὶ ἡ βάσις ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΛ = ΖΓΔ]· Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΑΛ = ΕΔΓ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α κατεσκευάσθη στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

27.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· πρέπει ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΔ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Γ, ὥστε ἡ μὲν ΒΑΘ = ΕΓΖ, ἡ δὲ ΒΑΚ = ΕΓΗ, ἡ δὲ ΚΑΘ = ΗΓΖ (θ. 26)· καὶ ἂς γίνῃ ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ καὶ ΗΓ : ΓΖ = ΚΑ : ΑΘ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) ΕΓ : ΓΖ = ΒΑ : ΑΘ (V. 22). Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒ καὶ τὸ στερεὸν ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ, καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΗΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ καὶ ἀκόμη τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΛ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΑΛ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἀνεγράφη στερεὸν τὸ ΑΛ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

28.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων, θὰ τμηθῇ τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου δίχα.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ.

Διότι ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΓΗΖ = τρ. ΓΖΒ, τὸ δὲ ΑΔΕ = ΔΕΘ (I. 34), εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΑ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒ· διότι κεῖται ἀπέναντι· τὸ δὲ ΗΕ = ΓΘ (θ. 24), καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων καὶ κατὰ τὸ πλῆθος καὶ κατὰ τὸ μέγεθος (ὁρ. 10). Ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν ΑΒ ἐτμήθη δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἔστω ὅτι καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΔΘ, ΕΚ (I. 34)· ὥστε καὶ ΔΘ = ΕΚ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΕΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΘΚ. Ὥστε καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΒΚ (I. 4), τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΔΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΝ (I. 36). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΛΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΜΛΝ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΓΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ, τὸ δὲ ΓΗ = ΒΝ· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24)· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τὸ κοινὸν στερεόν, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ νὰ μὴ ἀπολήγωσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀκόμη ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. Τὸ στερεὸν λοιπὸν ΓΜ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΖΔΘΜ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ· διότι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΟ, ΔΡ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΗΕΚΝ· διότι καὶ πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΗΠ, ΝΡ (θ. 29). Ὥστε καὶ τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

Ἔστωσαν πρῶτον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ ἀκμαὶ αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΡΤ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς εὐθείας ΓΡ καὶ μὲ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ρ ὡς κορυφὴν ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΤΡΥ = ΑΛΒ (Ι. 23), καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, πρὸς δὲ τὴν ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ καὶ ἡ βάσις ΡΧ καὶ τὸ στερεὸν ΨΥ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΛ, ΛΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΧ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΛ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ΑΛ = ΡΤ καὶ ΛΜ = ΡΣ καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ΛΕ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΣΥ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΕ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΨΥ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία ἐπίσης πρὸς ἄλλα τρία ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΨΥ (ὁρ. 10). Ἂς προεκταθῶσιν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΩ παράλληλος ἡ ͵αΤϡ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ͵α, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΩΨ, ΡΙ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΨΩ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΩG, ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΨΥ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΥΦ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σς, Σō, Ψς, ΨΦ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΩΧ, ςΦ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΨΥ = στερεὸν ΑΕ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ στερεὸν ΨΩ = στερεὸν ΑΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΡΥΧΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΩΤ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς

ΡΤ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΡΤ, ΩΧ (Ι. 35)· ἀλλὰ ΡΥΧΤ = ΓΔ, ἐπειδὴ ΡΥΧΔ = ΑΒ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΩΤ = ΓΔ. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ : ΔΤ (V. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΖ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, ὡς τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΡΙ (θ. 25). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΩΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΨ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι βάσις ΩΤ : βάσιν ΤΔ = στερεὸν ΩΨ : στερεὸν ΡΙ. Ἀλλα ΓΔ : ΔΤ = ΩΤ : ΔΤ· καὶ συνεπῶς ΓΖ : ΡΙ = ΩΨ : ΡΙ. Ἑκάτερον ἄρα τῶν στερεῶν ΓΖ, ΩΨ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΡΙ· ἴσον ἄρα εἶναι τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΩΨ (V. 9). Ἀλλ' ἐδείχθη ΩΨ = ΑΕ· ἄρα ΑΕ = ΓΖ.

Ἔστω δεύτερον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ, ΓΔ· λέγω πάλιν, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ. Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ ἂς τέμνωσι τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΚΦ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΠΙ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Ἀλλὰ τὸ μὲν στερεὸν ΚΦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΕ, τὸ δὲ ΠΙ πρὸς τὸ ΓΖ· διότι εἶναι ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας (θ. 30). Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

32.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτω τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΕ (Ι. 45), καὶ ἀπὸ τῆς βάσεως μὲν τῆς ΖΘ ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΓΔ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΗΚ. Ὅθεν εἶναι ἴσον τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΚ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 31). Καὶ ἐπειδὴ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΔΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΓΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΔΘ (θ. 25). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΕ, τὸ δὲ στερεὸν ΗΚ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτως τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

33.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ὁ λόγος τοῦ στερεοῦ ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $ΑΕ^3 : ΓΖ^3$.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ ἂς ληφθῇ ΕΚ = ΓΖ, ΕΛ = ΖΝ, ΕΜ = ΖΡ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛ καὶ τὸ στερεὸν ΚΟ.

Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΝ, ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΚΕΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΝ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΕΗ = ΓΖΝ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΚΛ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΜ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ [παραλληλόγραμμον] ΓΡ καὶ ἀκόμη τὸ ΕΟ = ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΚΟ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντί των (θ. 24)· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΚΟ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΓΔ. Ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΚ, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν παραλληλογράμμων ΗΚ, ΚΛ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΑΒ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΕΞ, ΛΠ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ΑΕ : ΓΖ = ΕΗ : ΖΝ = ΕΘ : ΖΡ (ὁρ. 9, VI ὁρ. 1), εἶναι δὲ καὶ ΓΖ = ΕΚ, ΖΝ = ΕΛ, ΖΡ = ΕΜ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΚ = ΗΕ : ΕΛ = ΘΕ : ΕΜ. Ἀλλὰ ΑΕ : ΕΚ = παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ, καὶ ΗΕ : ΕΛ = ΗΚ : ΚΛ, καὶ ΘΕ : ΕΜ = ΠΕ : ΚΜ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ = ΗΚ : ΚΛ = ΠΕ : ΚΜ. Ἀλλὰ ΑΗ : ΗΚ = στερεὸν ΑΒ : στερεὸν ΕΞ, καὶ ΗΚ : ΚΛ = στερεὸν ΞΕ : στερεὸν ΠΛ, καὶ ΠΕ : ΚΜ = στερεὸν ΠΛ : στερεὸν ΚΟ (θ. 32)· καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τέταρτον ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον (V. ὁρ. 10)· ἄρα ΑΒ : ΚΟ = $ΑΒ^3$: $ΕΞ^3$. Ἀλλὰ ΑΒ : ΕΞ = παραλληλόγρ. ΑΗ : παραλληλόγρ. ΗΚ = εὐθεῖα ΑΕ : εὐθεῖα ΕΚ· ὥστε ΑΒ : ΚΟ = $ΑΕ^3$: $ΕΚ^3$. Εἶναι δὲ τὸ μὲν στερεὸν ΚΟ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΚ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς ὁμολόγου αὐτοῦ πλευρᾶς ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΓΖ.

Τὰ ὅμοια ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν πρώτην πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν δευτέραν, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν τετάρτην ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν.

34.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ.

(1). Διότι ἔστωσαν πρῶτον αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ βάσις ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ΓΜ = ΑΗ. Διότι τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (θ. 32); [διότι ἐὰν αἱ βάσεις ΕΘ, ΝΠ εἶναι ἴσαι, τὰ ὕψη ὅμως ΑΗ, ΓΜ ἄνισα, οὐδὲ τὸ στερεὸν ΑΒ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἐλήφθη δὲ ἴσον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισον τὸ ὕψος ΓΜ πρὸς τὸ ὕψος ΑΗ· ἴσον ἄρα]. Καὶ θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς ΑΗ, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(2). Τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴση ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ἄρα ΓΜ > ΑΗ [διότι ἐὰν δὲν εἶναι, οὔτε τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἴσα· ἐλήφθησαν δὲ ἴσα]. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ΓΤ = ΑΗ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΑΒ = στερεὸν ΓΔ, ἔξω δὲ εἶναι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον (V. 7), εἶναι ἄρα ὡς τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις ΜΠ πρὸς τὴν βάσιν ΤΠ (θ. 25) καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Εἶναι δὲ ΓΤ = ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(3). Πάλιν τώρα ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν πάλιν αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Καὶ ἂν μὲν ΕΘ = ΝΠ, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι ἄρα ἴσον καὶ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

(4). Ἂς μὴ εἶναι τώρα ἡ βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ· καὶ τὸ ὕψος ἄρα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τοῦ στερεοῦ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Ἂς ληφθῇ πάλιν ΓΤ = ΑΗ καὶ ἂς συμπληρωθῇ ὁμοίως τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, εἶναι δὲ ΑΗ = ΓΤ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ ΓΜ : ΓΤ οὕτως καὶ ἡ βάσις ΜΠ πρὸς τὴν βάσιν ΠΤ (VI. 1) καὶ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 25). Καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἔχει πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα στερεὸν ΑΒ = στερεὸν ΓΔ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

(5). Ἂς μὴ εἶναι τώρα αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΕΘ, ΝΠ κάθετοι καὶ ἂς τέμνωσιν αὗται τὰ ἐπίπεδα κατὰ τὰ σημεῖα Σ, Τ, Υ, Φ καὶ Χ, Ψ, Ω, Σ ἀντιστοίχως, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΖΦ, ΞΩ· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ.

Ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ = ΒΤ (θ. 29 — 30)· διότι εἶναι καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ στερεὸν ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΨ· διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν ἀπολήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη]. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ (2ον μέρος τοῦ θεωρήματος). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΚ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΘ, ἡ δὲ βάσις ΞΡ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τὰ δὲ ὕψη τῶν στερεῶν ΔΨ, ΒΤ καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ εἶναι τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(6). Πάλιν ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτω τὸς ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι, ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΚ, ἡ δὲ ΝΠ πρὸς τὴν ΞΡ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Εἶναι δὲ τὰ ὕψη τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΒΤ, ΔΨ τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΒΤ, ΔΨ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν [τὰ δὲ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα· τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Τὸ δὲ στερεὸν ΔΨ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΓ [διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀπὸ τῶν κορυφῶν δὲ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων τῶν γωνιῶν σχηματί-

ζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, ληφθῶσι δὲ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τούτων ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐπιπέδων ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τῶν κορυφῶν τῶν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αὗται μετὰ τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν θὰ σχηματίζωσι γωνίας ἴσας.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Α, Δ ἂς ἀχθῶσιν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων αἱ ΑΗ, ΔΜ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν $ΜΔΕ = ΗΑΒ$, τὴν δὲ $ΜΔΖ = ΗΑΓ$, καὶ ἂς ληφθῶσι ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Η, Μ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΑΓ, ΕΔΖ κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΗΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἂς ληφθῇ $ΑΘ = ΔΜ$, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΛ. Ἡ δὲ ΗΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ (Θ. 8). Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. Ἐπειδὴ $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΑ^2$ (Ι. 47), καὶ $ΚΑ^2 = ΚΓ^2 + ΓΑ^2$, θὰ εἶναι ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΓ^2 + ΓΑ^2$. Εἶναι δὲ $ΘΚ^2 + ΚΓ^2 = ΘΓ^2$· ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΓ^2 + ΓΑ^2$. Ἡ γωνία ἄρα ΘΓΑ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΖΜ εἶναι ὀρθή. Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΜ. Εἶναι δὲ καὶ $ΘΑΓ = ΜΔΖ$. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν $ΘΑ = ΜΔ$· θὰ ἔχωσι ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως (Ι. 26). Ἄρα $ΑΓ = ΔΖ$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ $ΑΒ = ΔΕ$ [ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΜΕ. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΘ^2 = ΑΚ^2 + ΚΘ^2$, καὶ $ΑΚ^2 = ΑΒ^2 + ΒΚ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΑΘ^2$. Ἀλλὰ $ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΒΘ^2$· διότι ἡ γωνία ΘΚΒ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ ἡ ΘΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἄρα $ΑΘ^2 = ΑΒ^2 + ΒΘ^2$· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΘ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΕΜ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία $ΒΑΘ = ΕΔΜ$· ἐξ ὑποθέσεως· καὶ εἶναι ἡ $ΑΘ = ΔΜ$· ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ = ΔΕ$]. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΓ = ΔΖ$ καὶ $ΑΒ = ΔΕ$, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΓΑ, ΑΒ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία $ΓΑΒ = ΖΔΕ$· ἡ βάσις ἄρα ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ καὶ τὸ τρίγωνον (ΑΒΓ) ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον (ΔΕΖ) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (Ι. 4)· Ἡ γωνία ἄρα $ΑΓΒ = ΔΖΕ$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΓΚ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΔΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΕΖΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $\Gamma BK = ZEN$. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν $B\Gamma = EZ$· θὰ ἔχωσιν ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Εἶναι ἄρα ἡ $\Gamma K = ZN$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $A\Gamma = \Delta Z$· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΓ, ΓΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΖΝ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας. Ἡ βάσις ἄρα $AK =$ βάσιν ΔΝ. Καὶ ἐπειδὴ $A\Theta = \Delta M$ εἶναι καὶ $A\Theta^2 = \Delta M^2$. Ἀλλὰ $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$· διότι ἡ γωνία ΑΚΘ εἶναι ὀρθή· καὶ $\Delta M^2 = \Delta N^2 + NM^2$· διότι ἡ ΔΝΜ εἶναι ὀρθή· ἄρα $AK^2 + K\Theta^2 = \Delta N^2 + NM^2$, ἐξ ὧν $AK^2 = \Delta N^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $K\Theta^2 = NM^2$· ἄρα $\Theta K = MN$. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΘΑ, ΑΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΔ, ΔΝ ἀντιστοίχως, καὶ ἐδείχθη βάσις $\Theta K =$ βάσιν ΜΝ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προτάσεως· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀχθῶσι δὲ πρὸς τὰς κορυφάς των πλάγιαι ἴσαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων περιέχουσαι δὲ γωνίας ἴσας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ ἤτοι $A : B = B : \Gamma$· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν $A \times B \times \Gamma$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ B^3, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἂς ληφθῇ στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἑκάστη μὲν τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ ἴση πρὸς τὴν Β καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΚ, πρὸς δὲ τὴν Α ἴση ἡ ΛΜ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Λ ἴση στερεὰ γωνία πρὸς τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ε, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ ἂς ληφθῇ ΛΞ = Β καὶ ΛΝ = Γ. Καὶ ἐπειδὴ Α : Β = Β : Γ, εἶναι δὲ Α = ΛΜ καὶ Β = ΛΞ = ΕΔ, ἡ δὲ Γ = ΛΝ, εἶναι ἄρα ΛΜ : ΕΖ = ΔΕ : ΛΝ. Ὅθεν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι αἱ ΔΕΖ, ΝΛΜ εἶναι ἴσαι καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναχωροῦσιν ἀκμαὶ ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων των αἱ ΛΞ, ΕΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ κάθετοι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ξ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι (θ. 35, πόρ.)· ὥστε τὰ στερεὰ ΛΘ, ΕΚ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΘΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΚ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν στερεὸν ΛΘ = στερεὸν Α × Β × Γ, τὸ δὲ ΕΚ = στερεὸν B^3· τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον Α × Β × Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἰσόπλευρον μὲν B^3, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προηγούμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ.

Διότι ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΚΑ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΛΓ, ἄρα ΚΑ : ΛΓ = $(ΑΒ : ΓΔ)^3$ (θ. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ΜΕ : ΝΗ = $(ΕΖ : ΗΘ)^3$. Καὶ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ. Καὶ ὡς ἄρα ΑΚ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΛΓ = στερεὸν ΜΕ : στερεὸν ΝΗ· λέγω, ὅτι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

Διότι, ἐπειδὴ πάλιν τὸ ΚΑ : ΛΓ = (ΑΒ : ΓΔ)^3 (θ. 33), εἶναι δὲ καὶ ΜΕ : ΝΗ = (ΕΖ : ΗΘ)^3, καὶ εἶναι ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Διότι ἂς τέμνωνται τοῦ κύβου ΑΖ αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τῶν ΓΖ, ΑΘ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἂς διέρχωνται τὰ ἐπίπεδα ΚΝ, ΞΡ, ἔστω δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΥΣ, διαγώνιος δὲ τοῦ κύβου ΑΖ ἡ ΔΗ. Λέγω, ὅτι ΥΤ = ΤΣ καὶ ΔΤ = ΤΗ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΞ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΔΞΥ, ΥΟΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (Ι. 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΞ = ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ = ΥΟ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΔΥ = ΥΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΞΥ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΥΕ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (Ι. 4)· ἡ γωνία ἄρα ΞΥΔ = ΟΥΕ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον βεβαίως ἡ ΔΥΕ εἶναι εὐθεῖα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΣΗ εἶναι εὐθεῖα, καὶ ἡ ΒΣ = ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ (θ. 9). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ (Ι. 33). Ἡ μὲν ἄρα γωνία ΕΔΤ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΤ· διότι εἶναι ἐναλλάξ· ἡ δὲ ΔΤΥ = ΗΤΣ (Ι. 15). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ, ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΥ = ΗΣ· διότι αὗται εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν ΔΕ, ΒΗ· ὅθεν θὰ ἔχωσι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Ἄρα ἡ μὲν ΔΤ = ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ = ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἃς ἔχῃ βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ, τὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΗΘΚ, ἔστω δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜΝ.

Διότι ἃς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΑΞ, ΗΟ. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (0. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΗΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν στερεοῦ ΑΞ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ δὲ στερεοῦ ΗΟ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ· τὸ πρίσμα ἄρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ.

Ἐὰν ἄρα δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.