ΒΙΒΛΙΟΝ X

Ὁρισμοί

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον.

2. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι εἶναι ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν μετρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου, ἀσύμμετροι δὲ (δυνάμει), ὅταν διὰ τὰ τετράγωνα αὐτῶν δὲν ὑπάρχῃ χωρίον ὡς κοινὸν μέτρον.

3. Τούτων τεθέντων ἀποδεικνύεται, ὅτι πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. Ἂς καλῆται λοιπὸν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ πρὸς ταύτην σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς ταύτην ἂς καλῶνται ἄλογοι.

4. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς προτεθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητόν, καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο σχήματα ῥητά, τὰ δὲ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν, ἐὰν μὲν τὰ σχήματα εἶναι τετράγωνα ἄλογοι, ἐὰν δὲ ὑπάρχωσιν ἄλλα εὐθύγραμμα αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς ταῦτα τετραγώνων.

1

Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγέθους Γ.

Διότι τὸ Γ πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ κάποτε μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ. Ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεγαλύτερον καὶ ἂς διαιρεθῇ τὸ ΔΕ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ μεγέθη τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ καὶ τοῦτο ἂς γίνηται πάντοτε μέχρις ὅτου αἱ διαιρέσεις τοῦ ΑΒ γίνωσιν ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαιρέσεις τοῦ ΔΕ.

Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ διαιρέσεις ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαιρέσεις ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΕ>ΑΒ, καὶ ἀφηρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΗΔ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΘΑ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΔ>ΘΑ καὶ ἀφηρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΘΑ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΑΚ. Εἶναι δὲ ΔΖ=Γ. Ἄρα καὶ τὸ Γ > ΑΚ. Μικρότερον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ. Ἀπομένει ἄρα ἀπὸ τοῦ μεγέθους ΑΒ τὸ μέγεθος ΑΚ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ὅταν τ' ἀφαιρούμενα εἶναι ἡμίση.

2

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀνθυφαιρεῖται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ἑκάστοτε δὲ ὑπόλοιπον οὐδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἂς εἶναι τὰ μεγέθη ΑΒ < ΓΔ καὶ ἂς ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τὸ ἑκάστοτε ὑπόλοιπον οὐδέποτε νὰ καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρήσῃ καὶ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΖΔ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ < ΑΒ, τὸ δὲ ΓΖ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΒΗ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ < ΓΖ, καὶ ἂς γίνεται τοῦτο πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε. Ἂς γίνῃ, καὶ ἔστω τὸ ὑπόλοιπον ΑΗ < Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΖ, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ ΖΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ μετρεῖ τὸ ΒΗ· καὶ τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὸ ΒΗ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ μέγεθός τι· ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

3

Δοθέντων δύο συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ΑΒ < ΓΔ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι, τὸ μέγεθος ΑΒ ἢ μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ μετρῇ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι τὸ ΑΒ δὲν μετρεῖται ὑπὸ μεγαλυτέρου τοῦ ΑΒ μεγέθους.

Ἀλλ' ἂς μὴ μετρῇ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. Καὶ ἐὰν ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ὑπόλοιπόν τι θὰ μετρήσῃ κάποτε τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διότι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΕΔ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον ΕΓ $<$ ΑΒ, τὸ δὲ ΕΓ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΖΒ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΖ $<$ ΕΓ, τὸ δὲ ΑΖ ἂς μετρῇ τὸ ΓΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΓΕ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ, ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ἄρα τὸ ΑΖ θὰ μετρήσῃ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΕ· ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· ἄρα μετρεῖ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχῃ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ, τὸ ὁποῖον θὰ μετρῇ τὰ ΑΒ, ΓΔ. Ἔστω τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ, μετρεῖ τὸ ΕΔ, καὶ τὸ Η ἄρα μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα τὸ Η θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ· ἄρα καὶ τὸ Η μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ καὶ θὰ μετρήσῃ καὶ τὴν διαφορὰν ΑΖ, τὸ μεγαλύτερον θὰ μετρήσῃ τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Δοθέντων ἄρα δύο συμμέτρων μεγεθῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ εὑρέθη τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ δύο μεγέθη θὰ μετρῇ καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

4

Δοθέντων τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ· πρέπει τῶν Α, Β, Γ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Διότι, ἂς ληφθῇ δύο τῶν Α, Β τὸ μ. κ. μ. καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ Δ ἢ μετρεῖ τὸ Γ ἢ δὲν τὸ μετρεῖ. Πρῶτον ἂς τὸ μετρῇ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὸ Γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Δ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον· διότι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Δ δὲν μετρεῖ τὰ Α, Β.

Ἂς μὴ μετρῇ τώρα τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον, ὅτι τὰ Γ, Δ εἶναι σύμμετρα. Διότι, ἐπειδὴ τὰ Α, Β, Γ εἶναι σύμμετρα, θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι, ἐκεῖνο δηλαδή, τὸ ὁποῖον θὰ μετρήσῃ καὶ τὰ Α, Β· ὥστε θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β τὸ Δ (θεώρ. 3 πόρ.). Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος θὰ μετρήσῃ τὰ Γ, Δ· ἄρα τὰ Γ, Δ εἶναι σύμμετρα. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν καὶ ἔστω τὸ Ε (θεώρ. 3). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ Δ, ἀλλὰ τὸ Δ μετρεῖ τὰ Α, Β, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὰ Α, Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Ε ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ μέγεθός τι Ζ > Ε. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ζ μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ, ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὰ Α, Β καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β (θεώρ. 3 πόρ.). Τὸ δὲ μ. κ. μ. τῶν Α, Β εἶναι τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸ Δ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὰ Γ, Δ· ἄρα θὰ μετρῇ τὸ Ζ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Γ, Δ. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ Ε, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Ε· τὸ Ε ἄρα εἶναι τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ, ἐὰν δὲν μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, εἶναι αὐτὸ τὸ Δ.

Δοθέντων ἄρα τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν εὑρέθη τὸ μ. κ. μ. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ τρία μεγέθη, θὰ μετρῇ καὶ τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ληφθῇ καὶ τὸ μ. κ. μ. ἐπὶ περισσοτέρων μεγεθῶν, καὶ τὸ πόρισμα θὰ ἰσχύῃ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Γ· καὶ ὅσας φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Δ, ὅσας δὲ φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ τὸ μέγεθος Γ τὸ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· (VII. ὁρ. 21)· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Ε καὶ τὸ Γ τὸ Β· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε (VII. ὁρισ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε.

Τὰ σύμμετρα ἄρα μεγέθη τὰ Α, Β ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6

Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἂς ἔχωσι τὰ μεγέθη Α, Β λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ εἰς τόσα ἴσα μέρη ἂς διαιρεθῇ τὸ Α καὶ ἔστω πρὸς ἓν τούτων ἴσον τὸ Γ· ὅσας δὲ μονάδας ἔχει ὁ Ε ἐκ τόσων μεγεθῶν ἴσων πρὸς τὸ Γ ἂς σύγκειται τὸ μέγεθος Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Α, ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ Γ τοῦ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ (VII. ὁρ. 21). Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν ἀριθμὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Ε, τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Ζ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (V. 22). Ἀλλὰ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. Τὸ Α ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν Β, Ζ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα τὸ Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ (V.9). Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλ' ὅμως μετρεῖ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β. Σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π ό ρ ι σ μ α

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, εἶναι δυνατὸν νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε, οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Ἐὰν δὲ καὶ τῶν εὐθειῶν Α, Ζ ληφθῇ μέση ἀνάλογος, ὡς ἡ Β, θὰ εἶναι $A : Z = A^2 : B^2$, δηλ. ὡς ἡ πρώτη ἀνάλογος πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, (VI. 20. πορ. 2. V. ὁρ. 9). Ἀλλὰ $A : Z = \Delta : E$. Ἔγινεν ἄρα καὶ $\Delta : E = A^2 : B^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν τὸ Α ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ Α θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, (θεώρ. 6). Ἀλλὰ δὲν εἶναι. Δὲν ἔχει ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἀσύμμετρα ἄρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς:

8

Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον, πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, δύο μεγέθη τὰ Α, Β ἂς μὴ ἔχωσι λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. (θεώρ. 5). Ἀλλὰ δὲν ἔχει. Εἶναι ἄρα τὰ μεγέθη Α, Β ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

9

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους. Τὰ δὲ τετράγωνα ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὰ τετράγωνα τὰ μὴ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

Διότι, ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Β ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β ἔχει λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἂς ἔχῃ τὸν λόγον $Α : Β = Γ : Δ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, ἀλλὰ $(Α : Β)^2 = Α^2 : Β^2$· διότι τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (VI. 20, πόρ.)· καὶ $(Γ : Δ)^2 = Γ^2 : Δ^2$· διότι μεταξὺ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἔχει λόγον εἰς τὸ τετράγωνον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν (VII. 11)· εἶναι ἄρα $Α^2 : Β^2 = Γ^2 : Δ^2$.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω $Α^2 : Β^2 = Γ^2 : Δ^2$ λέγω, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Α^2 : Β^2 = Γ^2 : Δ^2$, ἀλλὰ $Α^2 : Β^2 = (Α : Β)^2$, καὶ $Γ^2 : Δ^2 = (Γ : Δ)^2$ εἶναι ἄρα $Α : Β$ ὡς ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ Α μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μήκει ἀσύμμετρος ἡ Α πρὸς τὴν Β· λέγω, ὅτι $Α^2 : Β^2$ δὲν ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν $Α^2 : Β^2 =$ λόγος, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ Α θὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β· ἀλλὰ δὲν εἶναι· δὲν ἔχει ἄρα τὸ $Α^2 : Β^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν, ἃς μὴ ἔχῃ τὸ $Α^2 : Β^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι πρὸς τὴν Β μήκει ἀσύμμετρος.

Διότι, ἐὰν ἡ A εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν B, τὸ $A^2 : B^2$ θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀλλὰ δὲν ἔχει· δὲν εἶναι ἄρα ἡ A μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν B.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ μήκει [ἐκτὸς ἐὰν τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, εἶναι σύμμετρα. Ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι οὐ μόνον μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι εἶναι μήκει σύμμετρα ὅσα τετράγωνα ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ ὅτι εἶναι σύμμετρα τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα δὲν ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μὲν τετράγωνα εἶναι δυνάμει σύμμετρα, οὐχὶ ὅμως καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετρα, τὰ δὲ δυνάμει οὐχὶ πάντως καὶ μήκει, ἐκτὸς ἐὰν ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει, διότι αἱ δυνάμει σύμμετροι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ὥστε αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι, δυνάμει νὰ εἶναι ἢ ἀσύμμετροι ἢ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· διότι ἐὰν εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ δυνάμει· ἐλήφθησαν δὲ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον· αἱ δυνάμει ἄρα ἀσύμμετροι εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι].

Λῆμμα

Εἰς τὰ βιβλία τῶν ἀριθμητικῶν ἀπεδείχθη, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. οἱ μὴ ἔχοντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, δὲν ἔχουσι λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐὰν ἔχωσι θὰ εἶναι ὅμοιοι· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Οἱ μὴ ὅμοιοι ἄρα ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

10

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· πρέπει νὰ εὑρεθῶσι πρὸς τὴν Α δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Διότι, ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοί, οἱ Β, Γ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, δηλ. μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ ἂς γίνῃ $Β : Γ = Α^2 : Δ^2$· διότι τοῦτο τὸ ἐμάθομεν· (θεώρ. 6, πόρ.)· σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Δ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Β πρὸς τὸν Γ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ ἄρα $Α^2$ πρὸς $Δ^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι ἡ Α πρὸς τὴν Δ (θεώρ. 9). Ἂς ληφθῇ τῶν Α, Δ ἡ μέση ἀνάλογος ἡ Ε· εἶναι ἄρα $Α : Δ = Α^2 : Ε^2$, (V. ὁρ. 9). Ἡ δὲ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Δ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι καὶ τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Ε^2$· ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι καὶ ἡ Α πρὸς τὴν Ε δυνάμει.

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν Α εὑρέθησαν δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, μήκει δὲ καὶ δυνάμει ἡ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι πρὸς τὸ δεύτερον σύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι σύμμετρον· καὶ ἂν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον, πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ πρὸς τὸ Β ἔστω σύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ σύμμετρον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θεώρ. 5). Καὶ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· τὸ Γ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ Α ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ ἀσύμμετρον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ εἶναι

$A : B = \Gamma : \Delta$· οὔτε τὸ Γ ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Δ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

12

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος σύμμετρα εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα.

Διότι ἔστω ἕκαστον τῶν Α, Β σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἄς εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἄς εἶναι $\Gamma : B = Z : H$. Καὶ ἐνῷ ἐδόθησαν ὁσοιδήποτε λόγοι καὶ ὡς ὁ $\Delta : E$ καὶ ὡς ὁ $Z : H$ ἄς ληφθῶσιν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς τοὺς δοθέντας, ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Θ, Κ, Λ, (VIII. 4)· ὥστε νὰ εἶναι $\Delta : E = \Theta : K$ καὶ $Z : H = K : \Lambda$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, ἀλλὰ $\Delta : E = \Theta : K$, εἶναι ἄρα $A : \Gamma = \Theta : K$ (V. 11). Πάλιν, ἐπειδὴ $\Gamma : B = Z : H$, ἀλλὰ $Z : H = K : \Lambda$ εἶναι ἄρα $\Gamma : B = K : \Lambda$. Εἶναι δὲ $A : \Gamma = \Theta : K$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A : B = \Theta : \Lambda$, (V. 22). Τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Θ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Λ· εἶναι ἄρα τὸ Α σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Τὰ σύμμετρα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ ἓν δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι πρὸς μέγεθός τι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ ἀσύμμετρον.

Ἔστω δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν τὸ Α ἔστω πρὸς ἄλλο τι τὸ Γ ἀσύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο τὸ Β εἶναι πρὸς τὸ Γ ἀσύμμετρον.

Διότι, ἐὰν τὸ Β εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Α ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ (θεώρ. 12). Ἀλλ' ἐλήφθη ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ B ἄρα δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας.

Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ AB, Γ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ AB· πρέπει νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς AB τοῦ τετραγώνου τῆς Γ.

Ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AΔB καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς αὐτὸ ἡ AΔ ἴση πρὸς τὴν Γ, (IV. 1), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔB. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία AΔB εἶναι ὀρθή, (III. 31), καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς AΔ δηλ. τῆς Γ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔB (I. 47).

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται ὅταν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AΔ, ΔB, καὶ ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν. Ἂς κατασκευασθῇ ὀρθὴ γωνία μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς AΔ, ΔB καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ AB· εἶναι φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ AB δύναται τὰς εὐθείας AΔ, ΔB (δηλ. $AB^2=A\Delta^2+\Delta B^2$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην. Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ A, B, Γ, Δ, ἤτοι $A : B = \Gamma : \Delta$ καὶ $E^2=A^2-B^2$, $Z^2=\Gamma^2-\Delta^2$. Λέγω, ὅτι ἐὰν ἡ A εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν E καὶ ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, καὶ ἐὰν ἡ Α εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A:B=\Gamma:\Delta$ εἶναι ἄρα $A^2:B^2=\Gamma^2:\Delta^2$, (VI. 22). Ἀλλὰ $A^2=B^2+E^2$, $\Gamma^2=\Delta^2+Z^2$. Εἶναι ἄρα $(E^2+B^2):B^2=(\Delta^2+Z^2):\Delta^2$. Καὶ συνεπῶς $E^2:B^2=Z^2:\Delta^2$, (V. 17)· εἶναι ἄρα $E:B=Z:\Delta$, (VI. 22)· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $B:E=\Delta:Z$, (V. 7 πόρ.). Εἶναι δὲ καὶ $A:B=\Gamma:\Delta$. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A:E=\Gamma:Z$, (V. 22). Ἐὰν λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, καὶ ἂν ἡ Α εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, (θ. 11).

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

15

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα προστεθῶσι, καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα δύο μεγεθῶν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὰ δύο μεγέθη θὰ εἶναι σύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι τὰ δύο σύμμετρα μεγέθη ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των τὸ ΑΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Ἄρα τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Ἄρα τὸ ΑΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ, (ὁρ. 1).

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΓ σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ΑΓ, ΑΒ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὸ ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

16

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα προστεθῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς ἕκαστον αὐτῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμά των τὸ ΑΓ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Διότι ἐὰν τὰ ΓΑ, ΑΒ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὴν ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Σύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ· ἐλήφθησαν ὅμως ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μέγεθός τι· ἀσύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΓΑ, ΑΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀσύμμετρα. Τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον πρὸς ἓν τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἔστω πρότερον πρὸς τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρα. Διότι ἐὰν θὰ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ. Εἶναι ἄρα σύμμετρα τὰ ΓΑ, ΓΒ· ἐλήφθησαν δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μέγεθός τι· εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς λαμβανόμενα τμήματα τῆς εὐθείας.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα τὸ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$.

Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος· διότι, ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι τετράγωνον ἡ $ΔΓ = ΓΒ$ καὶ εἶναι τὸ $ΑΔ = ΑΓ \times ΓΔ$ τουτέστι τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

17

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ τὸ παραβληθὲν διαιρῇ αὐτὴν εἰς μήκει σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν)· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν (παραλληλόγραμμον) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς τμήματα μήκει σύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἃς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ παραβληθὲν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΔ \times ΔΓ$, ἔστω δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ. λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Διότι ἃς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἃς ληφθῇ ἡ $ΕΖ=ΔΕ$. Ἡ λοιπὴ ἄρα $ΔΓ=ΒΖ$. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα τις ἡ ΒΓ ἐτμήθη εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, θὰ εἶναι ἄρα $ΒΔ \times ΔΓ + ΕΔ^2 = ΕΓ^2$, (II.5)· καὶ τὰ τετραπλάσια αὐτῶν· ἄρα $4ΒΔ \times ΔΓ + 4ΕΔ^2 = 4ΕΓ^2$. Ἀλλὰ $4ΒΔ \times ΔΓ = Α^2$, $4ΕΔ^2 = ΔΖ^2$· διότι ἡ ΔΖ εἶναι διπλασία τῆς ΔΕ. Τὸ δὲ $4ΕΓ^2 = ΒΓ^2$· διότι ἡ ΒΓ εἶναι πάλιν διπλασία τῆς ΓΕ. Ἄρα $Α^2 + ΔΖ^2 = ΒΓ^2$· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ, τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τὸ $ΔΖ^2$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΓΔ, ΒΖ· διότι $ΓΔ=ΒΖ$. Καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΒΖ, ΓΔ, (θεώρ. 12)· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ· τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἀλλὰ τώρα ἃς εἶναι $\sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ (μήκει) σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἃς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ $Α^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (παραλ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφοράν, $ΒΓ-ΖΔ=ΒΖ+ΔΓ$, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ $ΒΖ+ΔΓ$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6). Ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

18

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν παραλληλ.) αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν). Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$, ἔστω δὲ ἡ ΒΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι $ΖΔ^2=ΒΓ^2-Α^2$. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 16). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΒΖ+ΔΓ$, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΒΖ+ΔΓ$, (θεώρ. 13). Ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ, (θεώρ. 16). Καὶ $ΖΔ^2=ΒΓ^2-Α^2$· ἄρα τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἂς ὑπερέχῃ τώρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ). Εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν (ΒΓ—ΖΔ)=(ΒΖ +ΔΓ), (θεώρ. 16)· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ΒΖ +ΔΓ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 13)· ὥστε καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι (δηλ. καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα) αἱ δὲ εὐθεῖαι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην σύμμετροι, ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶναι μήκει καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις μήκει σύμμετρος, αὕτη λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνά των δηλ. εἶναι σύμμετρα), ἐπειδὴ αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως σύμμετροι καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις σύμμετρος δυνάμει, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος λέγεται τότε ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν μήκει καὶ δυνάμει· ἐὰν δὲ εὐθεῖά τις εἶναι πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν σύμμετρος μὲν δυνάμει, ἀσύμμετρος δὲ μήκει λέγεται καὶ πάλιν ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

19

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ῥητόν.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητὸν (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΓ μήκει σύμμετρος, εἶναι δὲ ΑΒ = ΒΔ, ἡ ΒΔ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι ΒΔ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ, (VI. 1). Τὸ ΔΑ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ τὸ ΔΑ ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

20

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν ῥητήν, ἡ ὁποία πρὸς τὴν εὐθεῖαν, παρ' ἣν παρεβλήθη, εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι ἂς παραβληθῇ πάλιν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων τὸ ῥητὸν ΑΓ παρὰ τὴν ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΑ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΓ ῥητόν· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ. Καὶ εἶναι ΔΑ : ΑΓ = ΔΒ : ΒΓ, (VI. 1). Ἄρα εἶναι σύμμετρος ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, (θεώρ. 11)· εἶναι δὲ ΔΒ = ΒΑ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΒΓ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

21

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν, δυνάμει μόνον συμμέτρων, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι ἐξ ὑποθέσεως ἐλήφθησαν ὡς σύμμετροι μόνον δυνάμει· εἶναι δὲ ἡ ΑΒ=ΒΔ, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι ΔΒ : ΒΓ=ΑΔ : ΑΓ· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι πρὸς τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον, (θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι ῥητόν· ἄλογον ἄρα εἶναι τὸ ΑΓ, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου] εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. Λέγω ὅτι ΖΕ : ΕΗ $=$ ΖΕ^2 : ΖΕ $\times$ ΕΗ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΗΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΖΕ : ΕΗ = ΖΔ : ΔΗ, (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΖΔ = ΖΕ^2$, τὸ δὲ $ΔΗ = ΔΕ \times ΕΗ$ δηλ. $= ΖΕ \times ΕΗ$, εἶναι ἄρα ΖΕ : $ΕΗ = ΖΕ^2 : ΖΕ \times ΕΗ$. Ὁμοίως δὲ καὶ $ΗΕ \times ΕΖ = ΕΖ^2$ δηλ. ΗΔ : ΖΔ = ΗΕ : ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22

Τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μέση παραβαλλόμενον ὡς ὀρθογώνιον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρ' ἣν παράκειται.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ καὶ ἂς παραβληθῇ τὸ τετράγωνον τῆς Α παρὰ τὴν ΒΓ, ἀφοῦ τοῦτο μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ ἔχον πλάτος τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι μέση τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταί, δυνάμει μόνον σύμμετροι (θεώρ. 21). Ἔστω τὸ ἰσοδύναμον τοῦτο ὀρθογώνιον τὸ ΗΖ. Ἰσοδύναμον ὅμως εἶναι καὶ τὸ ΒΔ· ἄρα τὸ ΒΔ = ΗΖ. Εἶναι δὲ καὶ πρὸς αὐτὸ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (VI. 14)· εἶναι ἄρα ΒΓ : ΕΗ = ΕΖ : ΓΔ. Εἶναι ἄρα καὶ $ΒΓ^2 : ΕΗ^2 = ΕΖ^2 : ΓΔ^2$, (VI. 20). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΓΒ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$· ἄρα ἑκάστη αὐτῶν (τῶν ΓΒ, ΕΗ) εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΓΔ^2$, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΕΖ^2$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΔ^2$, (ὅρ. 4)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ΕΗ μήκει ἀσύμμετρος· διότι εἶναι σύμμετροι μόνον δυνάμει καὶ εἶναι $ΕΖ : ΕΗ = ΕΖ^2 : ΖΕ \times ΕΗ$, (λῆμμα τοῦ 21), ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΖΕ \times ΕΗ$ (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$· διότι αὗται (αἱ ΕΖ, ΓΔ) εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΖΕ \times ΕΗ$ εἶναι σύμμετρον τὸ ὀρθογώνιον $ΔΓ \times ΓΒ$· διότι ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶναι ἴσον πρὸς $Α^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΔΓ \times ΓΒ$, (θεώρ. 13). Ὡς δὲ $ΓΔ^2 : ΔΓ \times ΓΒ = ΔΓ : ΓΒ$· (λῆμμα τοῦ 21)· ἄρα ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, (θεώρ. 11). Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

Ἔστω μέση ἡ A, καὶ ἔστω ἡ B σύμμετρος πρὸς τὴν A· λέγω, ὅτι καὶ ἡ B εἶναι μέση.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ A^2 ἔχον πλάτος τὴν ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 22). Πρὸς δὲ τὸ B^2 ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ A εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν B εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ A^2 πρὸς τὸ B^2. Ἀλλὰ τὸ μὲν τὸ $A^2 = ΕΓ$, τὸ δὲ $B^2 = ΓΖ$. Ἄρα τὸ ΕΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ εἶναι $ΕΓ : ΓΖ = ΕΔ : ΔΖ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΔ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΔΖ, (ὁρ. 3) καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. XIII)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΓΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι μέση (θεώρ. 21). Ἡ δυναμένη ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΔ \times ΔΖ$ εἶναι μέση. Καὶ $B^2 = ΓΔ \times ΔΖ$· ἄρα ἡ B εἶναι μέση.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σύμμετρον πρὸς τὸ μέσον χωρίον εἶναι μέσον [διότι τὰ χωρία ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς τετράγωνα αἱ πλευραί, τῶν ὁποίων εἶναι δυνάμει σύμμετροι, ἡ μία τῶν ὁποίων εἶναι μέση· ὥστε καὶ ἡ ἄλλη εἶναι μέση]. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένα, (18 λημ.) ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν μέσων, ὥστε ἡ πρὸς τὴν μέσην μήκει σύμμετρος νὰ λέγεται πρὸς αὐτὴν μέση καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, διότι ἐν γένει, αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν μέσην ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις δυνάμει σύμμετρος, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος, λέγονται αἱ εὐθεῖαι καὶ τότε μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, ἐὰν δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

24

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων ὑπὸ εὐθειῶν μέσων μήκει συμμέτρων εἶναι μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων καὶ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι μέσον.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ $ΑΒ = ΒΔ$, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΑΓ, (θεώρ. 23, πόρ.)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσι ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ τὰ τετράγωνα αὐτῶν τὰ ΑΒ, ΒΕ· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΕ εἶναι μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ πρὸς μὲν τὸ ΑΔ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ ἔχον πλάτος τὴν ΖΘ, πρὸς δὲ τὸ ΑΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΘΜ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ ἔχον πλάτος τὴν ΘΚ, καὶ προσέτι πρὸς τὸ ΒΕ ἴσον ἂς παραβληθῇ ὁμοίως πρὸς τὴν ΚΝ τὸ ΝΛ ἔχον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΔ, ΒΕ εἶναι μέσον καὶ τὸ μὲν $ΑΔ = ΗΘ$, τὸ δὲ $ΒΕ = ΝΛ$, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΗΘ, ΝΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἕκαστον τούτων παρεβλήθη παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΚΛ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΔ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΒΕ, ἄρα καὶ τὸ ΗΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΝΛ. Καὶ εἶναι $ΗΘ : ΝΛ = ΖΘ : ΚΛ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θεώρ. 21). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΘ, ΚΛ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θεώρ. 19). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν $ΔΒ = ΒΑ$, ἡ δὲ $ΞΒ = ΒΓ$, εἶναι ἄρα $ΔΒ : ΒΓ = ΑΒ : ΒΞ$. Ἀλλ' ὡς μὲν $ΔΒ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ$, (VI. 1)· ὡς δὲ $ΑΒ : ΒΞ = ΑΓ : ΓΞ$, (VI. 1)· εἶναι ἄρα $ΔΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΞ$. Εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΑΔ = ΗΘ$, τὸ δὲ $ΑΓ = ΜΚ$ τὸ δὲ $ΓΞ = ΝΛ$· εἶναι ἄρα $ΗΘ : ΜΚ = ΜΚ : ΝΛ$· ἄρα εἶναι καὶ $ΖΘ : ΘΚ = ΘΚ : ΚΛ$, (VI.1)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΖΘ \times ΚΛ = ΘΚ^2$, (VI. 17). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΖΘ \times ΚΛ$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΘΚ^2$· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂν μὲν αὕτη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, εἶναι τὸ ΘΝ ῥητόν, (θεώρ. 19)· ἐὰν δὲ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ αἱ ῥηταὶ ΚΘ, ΘΜ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΘΝ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Τὸ ΘΝ ἄρα εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΘΝ πρὸς τὸ ΑΓ· ἄρα τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

26

Μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ὑπερέχῃ τὸ μέσον ΑΒ τοῦ μέσου τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ ῥητὸν ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ, ἔχον πλάτος τὴν ΕΘ, καὶ ἐκ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΑΓ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΘ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΔΒ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέσον, καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ = ΖΘ$, τὸ δὲ $ΑΓ = ΖΗ$, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΖΘ, ΖΗ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΘ, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 20). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· μήκει ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι $ΕΗ : ΗΘ = ΕΗ^2 : ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον τὸ $ΕΗ^2$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΗ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· διότι καὶ τὰ δύο τετράγωνα εἶναι ῥητά· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 6)· διότι εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$ πρὸς τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 13)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2 + 2ΕΗ \times ΗΘ$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΕΘ^2$, (II. 4) εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$, (θεώρ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· ἄρα τὸ $ΕΘ^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁριθ. 4). Ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ ΕΘ, (ὁρ. 4). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι.

Ἂς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Γ, (VI. 13), καὶ ἂς γίνῃ $Α : Β = Γ : Δ$, (VI. 12).

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $Α \times Β$ δηλ. τὸ $Γ^2$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Γ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, αἱ δὲ Α, Β εἶναι μόνον δυνάμει σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Αἱ μέσαι ἄρα Γ, Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς $Α : Γ = Β : Δ$, (V. 16). Ἀλλὰ $Α : Γ = Γ : Β$· ἄρα καὶ $Γ : Β = Β : Δ$, (V. 11)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $Γ \times Δ = Β^2$. Τὸ δὲ $Β^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $Γ \times Δ$ εἶναι ῥητόν.

Εὑρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι.

Ἂς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Δ, (VI. 13) καὶ ἂς γίνῃ $B : \Gamma = \Delta : E$, (VI. 12).

Ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $A \times B$, δηλ. τὸ Δ^2, (VI. 17) εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Δ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ αἱ Β, Γ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ εἶναι $B : \Gamma = \Delta : E$, ἄρα καὶ αἱ Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ μέση ἡ Δ· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23)· αἱ μέσαι ἄρα Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $(\Delta \times E)$ εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $B : \Gamma = \Delta : E$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $B : \Delta = \Gamma : E$, (V. 16). Ὡς δὲ $B : \Delta = \Delta : A$· καὶ ἄρα $\Delta : A = \Gamma : E$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $A \times \Gamma =$ ὀρθογώνιον $\Delta \times E$, (VI. 16). Εἶναι δὲ τὸ $A \times \Gamma$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $\Delta \times E$.

Εὑρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα (1ον)

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἢ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, ἢ ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ΑΓ εἶναι ἄρτιος, (IX. 24, 26). Ἂς τμηθῇ ὁ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἢ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἢ τετράγωνοι, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Ἄρα $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$, (II. 6). Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον $AB \times B\Gamma$ τετράγωνος ἀριθμός, διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι ἀριθμόν τινα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνος, (IX. 1). Εὑρέθησαν ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον $AB \times B\Gamma$ καὶ ὁ τετράγωνος $\Gamma\Delta^2$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $B\Delta^2$.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσιν ἐξ ἄλλου εὑρεθῇ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $B\Delta^2$ καὶ ὁ $\Gamma\Delta^2$, ὥστε ἡ διαφορά των ἡ $AB \times B\Gamma$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Ὅταν δὲ οὗτοι δὲν εἶναι ἐπίπεδοι, ἔχουσιν εὑρεθῆ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $ΒΔ^2$ καὶ ὁ $ΔΓ^2$ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἡ $ΑΒ \times ΒΓ$ δὲν εἶναι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α (2ον)

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ἔστω ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ$, ὡς εἴπομεν (εἰς τὸ προηγούμενον λῆμμα) καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὁ ΓΑ κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΔ^2 = ΒΔ^2$, (λῆμμα 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ (ἐκ τοῦ πρώτου μέλους) ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· τότε ἄρα θὰ εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 < ΒΔ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Διότι, ἐὰν θὰ εἶναι τετράγωνος ἢ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $ΒΕ^2$ ἢ μικρότερος τοῦ $ΒΕ^2$, οὐχὶ δὲ καὶ μεγαλύτερος, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ καὶ ἔστω διπλάσιος τῆς μονάδος ὁ ΗΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ εἶναι διπλάσιος, ἐξ ὧν ὁ ΑΗ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΔΕ, ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ ΗΓ εἶναι διπλασία τῆς διαφορᾶς ΕΓ· ἄρα ὁ ΗΓ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Ε. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$, (ΙΙ. 6). Ἀλλὰ καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ ἐξ ὑποθέσεως· ὁ ἀριθμὸς ἄρα $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$. Καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ $ΓΕ^2$ συνάγεται $ΑΒ = ΗΒ$· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν $ΒΕ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ μικρότερος εἶναι τοῦ $ΒΕ^2$. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ἴσος πρὸς τὸν $ΒΖ^2$ καὶ ἔστω ὁ ΘΑ διπλάσιος τοῦ ΔΖ. Καὶ πάλιν θὰ συναχθῇ ὅτι ὁ ΘΓ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ ὁ ΓΘ ἔχει διχοτομηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΖΓ^2 = ΒΖ^2$, (ΙΙ. 6). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΖ^2$. Ὥστε καὶ ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΓΖ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ ἴσος πρὸς τὸν μικρότερον τὸν $ΒΕ^2$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσος εἶναι πρὸς αὐτὸν τὸν $ΒΕ^2$. Δὲν εἶναι ἄρα τετράγωνος ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ [Ἐν ᾧ δὲ εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ καὶ κατὰ περισσοτέρους τρόπους, ὅτι οἱ εἰρημμένοι ἀριθμοὶ δὲν ἀποτελοῦσι τετράγωνον, ἂς ἀρκεσθῶμεν εἰς τοὺς ἐκτεθέντας τρόπους, ἵνα μὴ ἐν ᾧ ἡ πραγματεία εἶναι μακρὰ ἐπιμηκύνωμεν αὐτὴν ἔτι περισσότερον]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῇ ῥητή τις ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὁ ΓΕ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἂς γίνῃ $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΑ^2 : ΑΖ^2 = ΔΓ : ΓΕ$, ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὃν λόγον ἔχει ὁ ἀριθμὸς ΔΓ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΓΕ· ἄρα τὸ $ΒΑ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΖ^2$, (θεώρ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΑ^2$, (ὁρ. 4)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΑΖ^2$, (ὁρισ. 4)· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα οὔτε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, (θεώρ. 9)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΑ, ΑΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $ΓΔ : ΔΕ = ΑΒ^2 : ΒΖ^2$ [δηλ. $ΔΓ : (ΔΓ—ΓΕ) = ΒΑ^2 : (ΒΑ^2—ΑΖ^2)$], (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $ΑΒ^2 = ΑΖ^2 + ΖΒ^2$ (III. 31, I. 47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΒ).

Εὑρέθησαν ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῆς ΑΒ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἡ ΒΖ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῇ ἡ ΑΒ ῥητὴ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΓΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἂς γίνῃ $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\Gamma\Delta : \Delta E = AB^2 : BZ^2$, (V. 19) [δηλ. $\Gamma\Delta : (\Gamma\Delta - \Gamma E) = AB^2 : (AB^2 - AZ^2)$]. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$, ἐν ᾧ ἡ ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ΖΒ, ἡ ὁποία εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητόν, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν Α (θεώρ. 29). Καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ ἔστω ἴσον τὸ Γ^2. Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$, (θεώρ. 21)· ἄρα καὶ τὸ Γ^2 εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἡ Γ εἶναι μέση, (θ. 21). Καὶ ἔστω $B^2 = \Gamma \times \Delta$· τὸ δὲ B^2 εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma \times \Delta$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : B = A \times B : B^2$, (θεώρ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ εἶναι ἴσον τὸ Γ^2, πρὸς δὲ τὸ B^2 εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma \times \Delta$, εἶναι ἄρα $A : B = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. Ὡς δὲ $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $A : B = \Gamma : \Delta$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β δυνάμει μόνον σύμμετρος· ἄρα καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος, (θεώρ. 11). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Γ), (θεώρ. 14).

Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ περιέχουσαι ῥητόν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ ἀσυμμέτρου πλευρᾶς, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 30).

32

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον σύμμετρον πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Ἄς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 29), καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A \times B$ ἔστω ἴσον τὸ Δ^2. Ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι μέσον· καὶ ἡ Δ ἄρα εἶναι μέση, (θεώρ. 21). Ἔστω δὲ $B \times \Gamma = \Delta \times E$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A \times B : B \times \Gamma = A : \Gamma$, (θ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ $A \times B = \Delta^2$ καὶ $B \times \Gamma = \Delta \times E$, εἶναι ἄρα $A : \Gamma = \Delta^2 : \Delta \times E$. Ὡς δὲ $\Delta^2 : \Delta \times E = \Delta : E$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $A : \Gamma = \Delta : E$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ σύμμετρος δυνάμει μόνον. Ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι πρὸς τὴν Ε δυνάμει μόνον σύμμετρος (θεώρ. 11). Ἡ δὲ Δ εἶναι μέση· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Δ ἄρα θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Ε κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Δ), (θεώρ. 14). Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $\Delta \times E$ εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ὀρθογ. $B \times \Gamma =$ ὀρθογ. $\Delta \times E$ τὸ δὲ $B \times \Gamma$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21), [διότι αἱ Β, Γ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι], ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $\Delta \times E$.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Καθ' ὅμοιον πάλιν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α).

Λῆμμα

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$, τὸ ὀρθογ. $B\Gamma \times$

$\Gamma\Delta = \Gamma A^2$, καὶ τὸ ὀρθ. $B\Delta \times \Delta\Gamma = A\Delta^2$, καὶ ἀκόμη τὸ ὀρθογ. $B\Gamma \times A\Delta =$ ὀρθογ. $BA \times A\Gamma$.

Καὶ πρῶτον, ὅτι $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$.

Διότι, ἐπειδὴ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἤχθη ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΑΔ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ καὶ μεταξύ των, (VI. 8). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἄρα $\Gamma B : BA = BA : B\Delta$ (VI. 4). Ἄρα $\Gamma B \times B\Delta = AB^2$, (VI 17).

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $B\Gamma \times \Gamma\Delta = A\Gamma^2$.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀχθεῖσα εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἄρα $B\Delta : \Delta A = A\Delta : \Delta\Gamma$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $B\Delta \times \Delta\Gamma =$ πρὸς τὸ ΔA^2, (VI. 17).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$. Διότι, ἐπειδὴ ὡς εἴπομεν, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, (VI 4), εἶναι ἄρα $B\Gamma : \Gamma A = BA : A\Delta$ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων]. Ἄρα τὸ $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$, (VI. 16)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζωσι ῥητὸν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

Ἄς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, (θ. 30), καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν ΒΔ, ΔΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28), καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AE \times EB$, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἂς γραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ΑΖΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΖ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ AB^2 ὑπερέχει τοῦ $B\Gamma^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), πρὸς δὲ τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $B\Gamma^2$, τουτέστι τοῦ $(1/2\ B\Gamma)^2$ παρεβλήθη παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον $AE \times EB$, ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ εἶναι ἀσύμμετρος (μήκει), (θ. 18)· Καὶ εἶναι $AE : EB = BA \times AE : AB \times BE$, εἶναι δὲ τὸ μὲν $BA \times AE = AZ^2$, τὸ δὲ $AB \times BE = BZ^2$, (λῆμμα τοῦ 32). Ἄρα τὸ AZ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ZB^2, (θεώρ. 11)· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ῥητή, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ AB^2· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $AZ^2 + ZB^2$ εἶναι ῥητόν, (I. 47). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὸ ὀρθογώνιον $AE \times EB = EZ^2$, ἐλήφθη δὲ $AE \times EB = EZ^2$, εἶναι ἄρα $ZE = B\Delta$· ἄρα $B\Gamma = 2ZE$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$, (θ. 6). Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$, (θ. 21)· μέσον ἄρα εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$, (θ. 23, πόρ.). Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $AB \times EZ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times ZB$· εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZB$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΖ, ΖΒ σχηματίζουσαι ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, μέσον δὲ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἂς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἔχουσαι ῥητὸν τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον, ὥστε τὸ AB^2 νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $B\Gamma^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), (θ. 31) καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ παραλληλόγραμμον τὸ $AZ \times ZB$ ἴσον πρὸς BE^2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου παραλληλογράμμου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, (θ. 18). Καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $BA \times AZ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times BZ$, (θ. 11). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ὀρθογώνιον $BA \times AZ = A\Delta^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $AB \times BZ = \Delta B^2$ (θ. 32, λῆμμα)· ἄρα τὸ $A\Delta^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔB^2. Καὶ ἐπειδὴ τὸ AB^2 εἶναι μέσον εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2 + \Delta B^2$, (III. 31, I. 47). Καὶ ἐπειδὴ $B\Gamma = 2\Delta Z$, εἶναι ἄρα ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma = 2AB \times Z\Delta$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογ. $AB \times B\Gamma$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογ. $AB \times Z\Delta$ (θ. 6, ὁρ. 4). Τὸ δὲ ὀρθογ. $AB \times Z\Delta =$ ὀρθ. $A\Delta \times \Delta B$, (θ. 32, λῆμμα)· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογ. $A\Delta \times \Delta B$ εἶναι ῥητόν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, καὶ ἀκόμη τοῦτο νὰ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἂς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ AB^2 νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $B\Gamma^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (θ. 32), (τὴν ΑΒ), καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς κατασκευασθῶσιν ὁμοίως πρὸς τὰ ἐπάνω (προηγ. θεώρημα).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δυνάμει, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ AB^2 εἶναι μέσον, εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ὀρθογώνιον $AZ\times ZB=BE^2=\Delta Z^2$, εἶναι ἄρα $BE=\Delta Z$· ἄρα εἶναι $B\Gamma=2\Delta Z$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma=2\,AB\times Z\Delta$. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $AB\times Z\Delta$. Καὶ εἶναι $AB\times Z\Delta=A\Delta\times\Delta B$, (θ. 32, λῆμμα). Ἄρα τὸ ὀρθ. $A\Delta\times\Delta B$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδή, ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΕ μήκει ἀσύμμετρος, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB\times BE$, (θ. 21, λῆμμα, θ. 11). Ἀλλὰ $AB^2=A\Delta^2+\Delta B^2$, (Ι. 47) καὶ $AB\times BE=AB\times Z\Delta=A\Delta\times\Delta B$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $A\Delta\times\Delta B$.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τοῦτο εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ διώνυμος.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι μόνον δυνάμει εἶναι σύμμετροι· καὶ $AB:B\Gamma=AB\times B\Gamma:B\Gamma^2$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $B\Gamma^2$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $AB\times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB\times B\Gamma$, (θ. 6), πρὸς δὲ τὸ $B\Gamma^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $AB^2+B\Gamma^2$· διότι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 15)· ἄρα τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 13). Καὶ διὰ προσθέσεως, $2AB \times B\Gamma + AB^2 + B\Gamma^2$ τουτέστι τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων (διώνυμος)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ τοῦτο ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, $B\Gamma$ τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον ($AB \times B\Gamma$) εἶναι ῥητόν· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$· καὶ διὰ προσθέσεως τούτων τὸ $AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$· διότι αἱ AB, $B\Gamma$ ἐλήφθησαν περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι μέσον, τὸ ἄθροισμά των εἶναι εὐθεῖα ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, $B\Gamma$ περιέχουσαι μέσον· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἃς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔE καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔE πρὸς τὸ $A\Gamma^2$, ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔZ ἔχον πλάτος τὴν ΔH, (I. 44). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$, (II. 4), ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔE πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $E\Theta$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον $\Theta Z = 2AB \times B\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν AB, $B\Gamma$ εἶναι μέση, μέσα ἄρα εἶναι καὶ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$. Ἐλήφθη δὲ μέσον καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$. Καὶ εἶναι $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, ἐν ᾧ $Z\Theta = 2AB \times B\Gamma$. Ἄρα ἕκαστον τῶν $E\Theta$, ΘZ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχουσι παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔE· ἄρα ἑκάστη τῶν $\Delta\Theta$, ΘH εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔE, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ AB εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 6). Ἄρα τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 13). Ἀλλὰ $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$ καὶ $\Theta Z = 2AB \times B\Gamma$. Ἄρα τὸ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ εἶναι πρὸς τὴν ΘΗ μήκει ἀσύμμετρος, (VI, 1 καὶ θεώρ. 11). Ἄρα, αἱ ῥηταὶ ΔΘ, ΘΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ ΔΗ εἶναι ἄλογος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον· ἄρα τὸ χωρίον ΔΖ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ $A\Gamma^2 = \Delta Z$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μείζων.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 6, 23 πόρ.). Τὸ δὲ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα τὸ $2AB \times B\Gamma$ πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ τὸ $AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς $A\Gamma^2$ (II. 4) εἶναι πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ ἀσύμμετρον, (θ. 16) [εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$]· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁρ. 4). Ὥστε καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα, (θ. 34)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον

$2AB \times B\Gamma$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$· ὥστε καὶ τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρον, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $2AB \times B\Gamma$· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ προσέτι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ πληροῦσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἃς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἃς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι μέσον καὶ $=\Delta Z$, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΔΖ. Καὶ ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστι τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$, εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΚ, (VI. 1, καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΔΗ, ΗΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΚ εἶναι ἄλογος, ἡ ὁποία καλεῖται διώνυμος, (θ. 36). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ $A\Gamma^2=\Theta\Delta$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι εὐθεῖαι διαιροῦνται μονοτίμως εἰς τὰς εὐθείας ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὰ ζητούμενα εἴδη, ἀποδεικνύομεν προτάσσοντες τὸ ἑξῆς λημμάτιον.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἃς τμηθῇ εἰς ἄνισα τμήματα πρῶτον κατὰ τὸ σημεῖον Γ καὶ ἔπειτα κατὰ τὸ Δ, ἃς εἶναι δὲ $A\Gamma > \Delta B$· λέγω, ὅτι $A\Gamma^2+\Gamma B^2 > A\Delta^2+\Delta B^2$.

Διότι ἃς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ $A\Gamma > \Delta B$ ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἡ ΔΓ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου τῆς ΓΒ. Εἶναι δὲ $ΑΕ=ΕΒ$· ἄρα ἡ $ΔΕ < ΕΓ$· ἄρα τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ + ΕΓ^2 = ΕΒ^2$, (II. 5), ἀλλ' ὅμως καὶ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2 = ΕΒ^2$, (II, 5), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ + ΕΓ^2 = ΑΔ \times ΔΒ + ΔΕ^2$· ἐκ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι $ΔΕ^2 < ΕΓ^2$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ < ΑΔ \times ΔΒ$. Ὥστε καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ < 2ΑΔ \times ΔΒ$. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον, δηλ. τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > ΑΔ^2 + ΔΒ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42

Ἡ δυώνυμος εὐθεῖα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον εἰς τὰ μονώνυμα.

Ἔστω ἡ δυώνυμος εὐθεῖα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Διοτι ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῆται, καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι. Τότε θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΔ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ θὰ εἶναι $ΑΓ:ΓΒ = ΒΔ:ΔΑ$, καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἔχει διαιρεθῆ κατὰ τὸ Γ εἰς τὰ αὐτὰ τμήματα ὡς καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Οἵα ἄρα διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἡ αὐτὴ διαφορὰ θὰ ὑπάρχῃ καὶ μεταξὺ τοῦ ὀρθογωνίου $2ΑΔ \times ΔΒ$ καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ$, διότι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 + 2ΑΓ \times ΓΒ = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 + 2ΑΔ \times ΔΒ = ΑΒ^2$, (II. 4). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ διαφέρει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ διαφέρει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα, (θ. 21)· ὅπερ ἄτοπον· διότι μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητὸν (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ δυώνυμος εὐθεῖα εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

43

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι

ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ νὰ περιέχωσιν ὀρθογώνιον ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ τὸ αὐτὸ διαφέρει τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (θ. 41, λῆμμα), διαφέρει δὲ κατὰ ῥητὸν τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ διαφέρει τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἄτοπον, (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατὰ διάφορα σημεῖα εἰς τὰ μονώνυμα· ἄρα καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον (θ. 38)· εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ Γ δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, διότι αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι μήκει σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὡς ἀπεδείξαμεν προηγουμένως, (θ. 41 λῆμμα) εἶναι μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ $ΑΒ^2$ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, (Ι. 44) ἀπὸ δὲ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον τὸ ΕΗ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΘΚ = 2ΑΓ \times ΓΒ$, (ΙΙ. 4). Πάλιν τώρα πρὸς τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, τὸ ὁποῖον ἐδείχθη μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΕΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΜΚ = 2ΑΔ \times ΔΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσα, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΕΗ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ. Εἶναι δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21 λῆμμα)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· διότι αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει σύμμετροι. Πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 6). Ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 13). Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΕΗ$ καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ = ΘΚ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ

ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ (VI. 1 καὶ θ.11). Καὶ εἶναι ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη διώνυμος, (θ. 36)· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΝ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ῥηταὶ ΕΜ, ΜΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ θὰ εἶναι ἡ δυώνυμος ΕΝ διῃρημένη κατὰ δύο διάφορα σημεῖα καὶ τὸ Θ καὶ τὸ Μ καὶ δὲν εἶναι ἡ ΕΘ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ, διότι τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2 > ΑΔ^2+ΔΒ^2$. Ἀλλὰ $ΑΔ^2+ΔΒ^2 > 2ΑΔ \times ΔΒ$. Κατὰ μείζονα λόγον ἄρα τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΜΚ. Ὥστε καὶ ἡ ΕΘ > ΜΝ, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

45

Ἡ μείζων διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω ἡ μείζων ΑΒ διῃρημένη κατὰ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι διαφέρει τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2+ΔΒ^2$, τόσον διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 41, λῆμμα), ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι ἀμφότερα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητὸν ἐν' ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26)· ἄρα ἡ μείζων δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

46

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ὁποία δύναταί ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{\Delta B}^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2\mathrm{A\Delta}\times\mathrm{\Delta B}$ ῥητόν. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον $2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}$ τοῦ ὀρθογωνίου $2\mathrm{A\Delta}\times\mathrm{\Delta B}$, τόσον διαφέρει καὶ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{\Delta B}^2$ τοῦ ἀθροίσματος $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$, τὸ δὲ $2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2\mathrm{A\Delta}\times\mathrm{\Delta B}$, ἄρα καὶ τὸ $\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{\Delta B}^2$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$, ἐν ᾧ ἀμφότερα εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26). Ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα. Ἄρα διαιρεῖται κατὰ ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

47

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη δύο μέσα διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ δυναμένη δύο μέσα καὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$ μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}$ μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$, (θ. 41). Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πληροῦσα τ' ἀνωτέρω δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς διαιρεθῇ κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ π.ὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΕΗ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}$ ἰσοδύναμον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2, (ΙΙ. 4). Πάλιν τώρα ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ΕΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Delta}^2+\mathrm{\Delta B}^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὀρθογώνιον $2\mathrm{A\Delta}\times\mathrm{\Delta B}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΜΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΘΕ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma B}^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}$, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΝ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ, (VI. 1, θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΝ εἶναι δυώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι διαιρεῖται καὶ κατὰ τὸ Μ. Καὶ ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ἄρα ἡ δυώνυμος διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ δυναμένη δύο μέσα δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ δυωνύμου διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος εὐθεῖα πρώτη δυώνυμος.

2. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος δευτέρα δυώνυμος.

3. Ἐὰν δὲ οὐδὲν ἐκ τῶν μονωνύμων εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τρίτη δυώνυμος.

4. Ἐὰν πάλιν τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τετάρτη δυώνυμος.

5. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος πέμπτη δυώνυμος.

6. Ἐὰν δὲ οὐδὲν μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος ἕκτη δυώνυμος.

48

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΒ πρὸς μὲν τὸ ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή, (όρ. 3). Καὶ ἂς γίνῃ ΒΑ : ΑΓ $=$ ΕΖ^2 : ΖΗ^2, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος ΕΖ^2 : ΖΗ^2 εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν· ὥστε τὸ ΕΖ^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ^2, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ΒΑ : ΑΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα καὶ ΕΖ^2 : ΖΗ^2 δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ΒΑ : ΑΓ$=$ΕΖ^2 : ΖΗ^2, εἶναι δὲ ΒΑ $>$ ΑΓ, ἄρα εἶναι καὶ ΕΖ$^2 >$ ΖΗ^2, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν ΕΖ^2$=$ΖΗ$^2+$Θ^2. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΑ : ΑΓ$=$ ΕΖ^2 : ΖΗ^2, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι ΑΒ : ΒΓ$=$ΕΖ^2 : Θ^2, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸν ΒΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος $EZ^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ (θ. 9)· ἄρα τὸ EZ^2 ὑπερέχει τοῦ ZH^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

49

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα) καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Ἂς γίνῃ τώρα καὶ $\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ EZ^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZH^2, (θ. 6). Ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ EZ^2 πρὸς τὸ ZH^2 ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἀνάπαλιν εἶναι $BA : A\Gamma = HZ^2 : ZE^2$, (V. 7, πόρ.) εἶναι δὲ $BA > A\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ $HZ^2 > ZE^2$, (V. 14). Ἔστω $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$ καὶ δι' ἀναστροφῆς, (V. 19 πόρ.) $AB : B\Gamma = ZH^2 : \Theta^2$. Ἀλλὰ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ ZH^2 πρὸς τὸ Θ^2 ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Θ κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον τὸ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ μήκει σύμμετρον.

Ἡ ΕΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

50

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλος τις μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ ὁ ὁποῖος πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Ε καὶ ἂς γίνῃ $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $Ε^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ Ε· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $Δ : ΑΒ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $Ε^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἂς γίνῃ πάλιν $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $ΘΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ (θ. 9). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα ὅτι εἶναι καὶ τρίτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Δ : ΑΓ = Ε^2 : ΗΘ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε καὶ τὸ $Ε^2$ πρὸς τὸ $ΗΘ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι πρὸς τὴν ΗΘ μήκει ἀσύμμετρος. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα $ΖΗ^2 > ΗΘ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΖΗ^2 = ΗΘ^2 + Κ^2$. Καὶ κατ' ἀναστροφὴν (V. 19, πόρ.) $ΑΒ : ΒΓ = ΖΗ^2 : Κ^2$. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $Κ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΘ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ οὐδεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

51

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ οὔτε πρὸς τὸν ΒΓ οὔτε πρὸς τὸν ΑΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ εὐθεῖα Δ καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ : ΑΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε $ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ [εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$] ἄρα $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$· ἄρα κατ' ἀναστροφὴν εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΕΖ^2 : Θ^2$. Ὁ δὲ λόγος $ΑΒ : ΒΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $ΕΖ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν Δ μήκει σύμμετρος.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

52

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα), καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖα τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, ἀνάπαλιν εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΖΕ^2$, (V. 7, πόρ.)· ἄρα $ΗΖ^2 > ΖΕ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν ὅτι $ΗΖ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$· κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΗΖ^2 : Θ^2$, (V. 19 πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ $ΖΗ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ $ΖΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΗΖ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

53

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἄλλος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ ὢν τετράγωνος οὔτε ἔχων λόγον πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖα τις ῥητὴ ἡ Ε, καὶ ἂς γίνῃ $Δ : ΑΒ = Ε^2 : ΖΗ^2$ (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $Ε^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Καὶ ἡ Ε εἶναι ῥητή· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ Δ : ΑΒ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $Ε^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἂς γίνῃ πάλιν $ΒΑ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, (θ. 6, πόρ.). Ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$. Ἄρα τὸ $ΘΗ^2$ εἶναι ῥητόν· ἡ ΘΗ ἄρα εἶναι ῥητή· Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος ΒΑ : ΑΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $ΖΗ^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος.

Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, εἶναι δὲ καὶ $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$ δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $\Delta : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $E^2 : H\Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Ἐδείχθη δὲ ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΖΗ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$· καὶ κατ' ἀναστροφὴν $AB : B\Gamma = ZH^2 : K^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $AB : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὔτε ὁ λόγος $ZH^2 : K^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· Ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9)· ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ καμμία ἐξ αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Ε.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΖΘ εἶναι ἕκτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἄρα εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι τετράγωνον καὶ ὅτι τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἀκόμη ὅτι τὸ ΔΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι, ἐπειδὴ $\Delta B = BZ$ καὶ $BE = BH$, ἕπεται $\Delta E = ZH$. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΘ, ΚΓ, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ, (I. 34)· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ εἶναι ἰσόπλευρον· εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ZB : BH = \Delta B : BE$, ἀλλὰ $ZB : BH = AB : \Delta H$, καὶ $\Delta B : BE = \Delta H : B\Gamma$, ἄρα $AB : \Delta H = \Delta H : B\Gamma$, (VI. 1). Ἄρα τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A\Delta : \Delta K = KH : H\Gamma$· διότι εἶναι ἴση ἑκάστη πρὸς ἑκάστην ἀντιστοίχως· καὶ διὰ συνθέσεως (V. 18) εἶναι $AK : K\Delta = K\Gamma : \Gamma H$, ἀλλὰ

ΑΚ : ΚΔ=ΑΓ : ΓΔ, καὶ ΚΓ : ΓΗ=ΔΓ : ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα ΑΓ : ΔΓ=ΔΓ : ΒΓ. Ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ· τὰ ὁποῖα προέκειτο ν' ἀποδειχθῶσι.

54

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος ἂς διαιρεθῇ αὕτη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΒ, (α'. ὁρισ. δευτ. ὁρ.). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΕ, $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΑΕ παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας δηλ. τὸ τέταρτον τοῦ $ΕΖ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μέρη σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΑΕ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ × ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ. Καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ ΖΛ· καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τὸ ΝΠ, (ΙΙ. 14) καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΣΠ· ἄρα τὸ ΣΠ εἶναι τετράγωνον (προηγ· λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ ΑΗ × ΗΕ = $ΕΖ^2$, εἶναι ἄρα ΑΗ : ΕΖ = ΖΕ : ΕΗ (VI. 17)· ἄρα καὶ ΑΘ : ΕΛ=ΕΛ : ΚΗ, (VI. 1)· ἄρα τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ τὸ δὲ ΗΚ = ΝΠ· ἄρα τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Εἶναι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ (προηγ. λῆμμα)· ἄρα ΕΛ = ΜΡ· ὥστε καὶ ΕΛ=ΟΞ (Ι. 43). Εἶναι δὲ καὶ ΑΘ + ΗΚ = ΣΝ + ΝΠ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ=ΣΠ τουτέστι =$ΜΞ^2$· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΜΞ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετροι (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ, (θ. 19) καὶ εἶναι σύμμετρον τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ τὸ δὲ ΗΚ = ΝΠ· ἄρα καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ, τουτέστι τὰ $ΜΝ^2$, $ΝΞ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ, τὸ δὲ ΕΛ = ΜΡ· ἄρα καὶ τὸ ΣΝ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΡ. Ἀλλὰ ΣΝ : ΜΡ = ΟΝ : ΝΡ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΟΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΡ, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΟΝ = ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ = ΝΞ· ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ. Καὶ τὸ $ΜΝ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ καὶ ἕκαστον εἶναι ῥητόν· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δυώνυμος καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

55

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι δευτέρα δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ Ζ καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ ὀρθογ. παραλ. τὸ ΑΗ × ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 17). Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΣΠ· εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων (θεώρ. 53, λῆμμα) ὅτι τὸ μέσον ΜΡ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΣΝ, ΝΠ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΛ, (θ. 54) καὶ ὅτι $ΜΞ^2$=ΑΓ, (θ. 54). Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, εἶναι δὲ ἡ ΕΔ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον. Ἄρα καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι μέσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ [ὥστε αἱ ΜΝ, ΝΞ, εἶναι δυνάμει σύμμετροι], (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ ὅτι εἶναι καὶ μέσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιόν των ($ΜΝ \times ΝΞ$) εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΔΕ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ. Καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, (θ. 14)· τὸ δὲ $ΜΡ = ΜΝ \times ΝΞ$. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

56

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τρίτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2-ΕΔ^2}$, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (γ' δευτ. ὁρ.). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἀποδεικνύεται ὅτι $ΜΞ^2 = ΑΓ$

καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ σύγκειται ἐκ δύο μέσων.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, εἶναι δὲ ἡ ΔΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ΖΕ, ΕΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα τὸ ΕΛ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ ΜΝ×ΝΞ εἶναι μέσον.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

57

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐν ᾧ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (δ' ὁρισ. δεύτ.). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ, καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ×ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΖ²· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18). Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ ὡς προηγουμένως κατασκευή, (θ. 55)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ΜΞ² εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ τὸ ΑΘ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19)· καὶ εἶναι ἴσον πρὸς ΜΝ² + ΝΞ²· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΜΝ² + ΝΞ² εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13), ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΚ, ΕΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΛΕ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον (θ. 21). Καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ ΜΝ×ΝΞ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα ΜΝ² + ΝΞ² ῥητόν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

58

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις (θ. 54)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2 = ΑΓ$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18), ἄρα καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΕ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς τὸ $ΝΞ^2$, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πέμπτη δυώνυμος καὶ τὸ τμῆμα αὐτῆς ΕΔ εἶναι τὸ μικρότερον, ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ε' ὁρ. δεύτ.). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΕ, (θ. 13) [αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι]· ἄρα τὸ ΑΚ τουτέστι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$, εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΚ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $ΜΝ \times ΝΞ$, (θ. 19)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

59

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $\text{ΜΞ}^2 = \text{ΑΓ}$, καὶ ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι πρὸς τὴν ΝΞ δυνάμει ἀσύμμετρος, (θ. 58). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρισ. δεύτ. 6), ἄρα αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ ἄθροισμα $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρ. δεύτ. 6), ἄρα ἡ ΖΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13)· αἱ ΖΕ, ΕΚ, ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ}$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, εἶναι καὶ τὸ ΑΚ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν $\text{ΑΚ} = \text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2$ τὸ δὲ $\text{ΕΛ} = \text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ}$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ}$. Καὶ εἶναι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μέσον, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λ ῆ μ μ α

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀνίσων τμημάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ}$.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει τμηθῇ εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Γ, ἄρα $\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ} + \text{ΓΔ}^2 = \text{ΑΔ}^2$, (II. 5)· ὥστε $\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ} < \text{ΑΔ}^2$· ἄρα $2\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ} < 2\text{ΑΔ}^2$. Ἀλλὰ $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 = 2(\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2)$, (II. 9)· ἄρα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΓ} \times \text{ΓΒ}$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

60

Τὸ τετράγωνον δυωνύμου εὐθείας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ ἂς παραβληθῇ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΔΘ πρὸς δὲ τὸ $ΒΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΚΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ=ΜΖ$ (II. 4). Ἂς τμηθῇ ἡ ΜΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν ΜΛ, ΗΖ παράλληλος ἡ ΝΞ. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΜΞ, ΝΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΒ ἔχει διαιρεθῆ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36)· ἄρα τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ μεταξύ των σύμμετρα, (θ. 15)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν. Καὶ εἶναι $ΑΓ^2+ΓΒ^2=ΔΛ$· ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, εἶναι ἄρα μέσον τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΜΖ, (θ. 21). Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 22). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

Ἐπειδὴ τῶν $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 53 λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ ΜΞ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΔΘ, ΚΛ. Εἶναι ἄρα $ΔΘ : ΜΞ = ΜΞ : ΚΛ$, δηλαδὴ $ΔΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΜΚ$, (VI. 1)· ἄρα $ΔΚ\times ΚΜ = ΜΝ^2$ (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, εἶναι καὶ τὸ ΔΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ^2+ΓΒ^2 > 2ΑΓ\times ΓΒ$, ἄρα καὶ $ΔΛ > ΜΖ$· ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ > ΜΗ$, (VI. 1, V. 14). Καὶ εἶναι $ΔΚ\times ΚΜ = ΜΝ^2 = 1/4\, ΜΗ^2$, καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, πρὸς δὲ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ἰσοδύναμον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν) εἰς σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2-ΜΗ^2}$ σύμμετροι). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ καὶ ἡ ΔΜ οὖσα μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πρώτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 1)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

61

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι δευτέρα δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ προηγουμένως, (θ. 60). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι ῥητόν, (θ. 37)· ὥστε καὶ τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσα, (θ. 21). Ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι ῥητόν, εἶναι καὶ τὸ ΜΖ ῥητόν· καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 20)· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 59, λῆμμα), ἄρα εἶναι καὶ $ΔΛ > ΜΖ$· ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ > ΜΗ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$, (θ. 60)· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος (ὅρ. δεύτ. 2)· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

62

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον τμῆμα νὰ εἶναι ἡ ΑΓ, ἔστω δὲ ῥητή τις ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι τρίτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 38)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς ΔΛ· ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα καὶ ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, ὡς δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 11). Ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΔΛ πρὸς τὸ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει νὰ δειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη δυώνυμος.

Ὁμοίως ὡς εἰς τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Καὶ εἶναι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θ. 17). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τρίτη δυώνυμος (ὅρ. δεύτ. 3)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

63

Τὸ τετράγωνον τῆς μείζονος παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην δυώνυμον.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε $ΑΓ > ΓΒ$, ἔστω δὲ ἡ ΔΕ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μείζων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον, (θ. 39). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσον, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ, ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22)· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι καὶ ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη δυώνυμος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, ἄρα καὶ τὸ ΔΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὀρθ. παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας ἀπὸ τοῦ ὁποίου (παραλ.)

νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν) τὴν μεγαλυτέραν εἰς ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτ.), (θ. 18)· εἶναι ἄρα ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΔΜ, ΜΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τετάρτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 4)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

64

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· ὥστε ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ ΜΖ, ἄρα ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΔΜ, ΜΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $\Delta K \times KM = MN^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· ἄρα ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ εἶναι αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ μικροτέρα ἡ ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

65

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης δύο μέσα παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυναμένη δύο μέσα εὐθεῖα ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ΔΖ, σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι ἕκτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δύο μέσα δυναμένη ΑΒ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $A\Gamma \times \Gamma B$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Gamma \times \Gamma B$, (θ. 41)· ὥστε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἕκαστον τῶν ΔΛ, ΜΖ εἶναι μέσον. Καὶ παράκεινται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2A\Gamma \times \Gamma B$, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11)· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ $\Delta K \times KM = MN^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι ἕκτη δυώνυμος, (ὁρ. δεύτ. 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

66

Ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36). Ἂς γίνῃ $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν $Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$, (VI. 16, V. 19 πόρ.). Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, (θ. 11). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι ῥηταὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ εἶναι $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$ (V. 11). Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, (V. 16). Αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11)· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι τὸ AE^2 ὑπερέχει τοῦ EB^2 ἢ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1), τουτέστι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ (πρὸς τὴν ΑΒ). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο πάλιν κατὰ τὴν τάξιν θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι δευτέρα δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 2). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 13), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τρίτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 3). Ἐὰν δὲ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ), καὶ τὸ $ΓΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΓΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τετάρτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 4). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, εἶναι πρὸς αὐτὴν σύμμετρος καὶ ἡ ΖΔ, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν πέμπτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 5). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἕκτη δυώνυμος.

Ὥστε ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

67

Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο μέσων εἶναι καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΖΔ εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ$, (V. 19 πόρ. καὶ V. 16). Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ, (θ. 11). Εἶναι δὲ μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι μέσαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ, (θ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ:ΕΒ=ΓΖ:ΖΔ$ εἶναι ἄρα καὶ $ΑΕ^2:ΑΕ\times ΕΒ=ΓΖ^2:ΓΖ\times ΖΔ$, (θ. 21, λῆμμα)· ἐναλλὰξ δὲ $ΑΕ^2:ΓΖ^2=ΑΕ\times ΕΒ:ΓΖ\times ΖΔ$, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΑΕ^2$ πρὸς τὸ $ΓΖ^2$· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ $ΑΕ\times ΕΒ$ πρὸς τὸ $ΓΖ\times ΖΔ$, (θ. 11). Ἐὰν λοιπὸν εἶναι ῥητὸν τὸ $ΑΕ\times ΕΒ$ θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΖ\times ΖΔ$ [καὶ διὰ τοῦτο (ἑκάστη) εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη]. Ἐὰν δὲ εἶναι μέσον, θὰ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρ.) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἑκάστη ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 37 καὶ 38).

Καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ΓΔ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

68

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μείζονα εἶναι καὶ αὐτὴ μείζων.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι μείζων.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, (θ. 39)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς $ΑΒ:ΓΔ=ΑΕ:ΓΖ=ΕΒ:ΖΔ$ (θ. 67), καὶ ὡς ἄρα $ΑΕ:ΓΖ=ΕΒ:ΖΔ$, (V. 11). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ ἀντιστοίχως, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ:ΓΖ=ΕΒ:ΖΔ$ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ὡς ἡ $ΑΕ:ΕΒ=ΓΖ:ΖΔ$, καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι $ΑΒ:ΒΕ=ΓΔ:ΔΖ$, (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΒ^2:ΒΕ^2=ΓΔ^2:ΔΖ^2$, (VI 20). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ $ΑΒ^2:ΑΕ^2=ΓΔ^2:ΓΖ^2$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΒ^2:ΑΕ^2+ΕΒ^2=ΓΔ^2:ΓΖ^2+ΖΔ^2$, (V. 24)· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ $ΑΒ^2:ΓΔ^2=ΑΕ^2+ΕΒ^2:ΓΖ^2+ΖΔ^2$, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΑΒ^2$ πρὸς τὸ $ΓΔ^2$· ἄρα εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$, (θ. 11). Συγχρόνως δὲ εἶναι τὸ $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ καὶ ῥητόν, ὡς ἐπίσης ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΖ^2+ΖΔ^2$. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $2ΑΕ\times ΕΒ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $2ΓΖ\times ΖΔ$. Καὶ εἶναι τὸ $2ΑΕ\times ΕΒ$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $2ΓΖ\times ΖΔ$, (θ. 23, πόρ.). Ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13) σχηματίζουσαι ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ἄρα ὅλη ἡ ΓΔ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 39).

Ἡ σύμμετρος ἄρα πρὸς τὴν μείζονα εἶναι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

69

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην εἶναι καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ\times ΕΒ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ\times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΓΖ\times ΖΔ$ εἶναι ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

70

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν δύο μέσα δυναμένην εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη δύο μέσα καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΕ\times ΕΒ$, (θ. 41)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ\times ΕΒ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ\times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι μέσον καὶ τὸ $ΓΖ\times ΖΔ$ εἶναι μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ\times ΖΔ$.

Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

71

Διὰ προσθέσεως ῥητοῦ καὶ μέσου γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ ἢ εἶναι δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ θὰ εἶναι $\gtrless$ τοῦ ΓΔ· ἔστω πρῶτον μεγαλύτερον· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· πρὸς δὲ τὸ ΔΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον τὸ ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΙ, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΘΙ. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ = ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ > ΓΔ, εἶναι δὲ ΑΒ = ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ = ΘΙ, ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ > ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΚ, (V. 14). Ἢ λοιπὸν τὸ ΕΘ^2 ὑπερέχει τοῦ ΘΚ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου. Ἂς εἶναι πρῶτον ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΘΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δυώνυμος (θ. 54)· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι δυώνυμος· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι δυώνυμος. Ἀλλὰ ἂς εἶναι τώρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ΕΘ^2 ἀπὸ τοῦ ΘΚ^2, τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 4). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 57). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθ. ΕΙ εἶναι μείζων· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ εἶναι μείζων.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ΑΒ < ΓΔ· ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ < ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ < ΘΚ (VI. 1, V. 14). Τὸ ΘΚ^2 ὑπερέχει τοῦ ΕΘ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ). Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δευτέρα δυώνυμος· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 55). Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πρὸς τὸ ΕΙ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΔ τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἀλλὰ ἂς ὑπερέχῃ τώρα τὸ $ΘΚ^2$ τοῦ $ΘΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ)· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ ΕΚ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, (θ. 58). Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἐὰν ἄρα προστεθῇ ῥητὸν καὶ μέσον γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι, ἡ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

72

Ἐὰν προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεταξύ των μέσα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ $\gtrless$ ΓΔ. Ἔστω, ὅτι ἔτυχε πρῶτον νὰ εἶναι ΑΒ $>$ ΓΔ· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ τὸ ἰσοδύναμον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ, πρὸς δὲ τὸ ΓΔ τὸ ἰσοδύναμον ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι μέσον, ἄρα εἶναι μέσον καὶ ἕκαστον τῶν ΕΗ, ΘΙ. Καὶ παράκεινται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζοντα πλάτος τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΒ=ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ=ΘΙ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ=ἡ ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Τὸ δὲ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ). Ἂς ὑπερέχῃ πρῶτον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ οὐδεμία τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος (ὁρισ.

δεύτ. 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56)· ἄρα ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα. Ἀλλὰ τώρα ἔστω, ὅτι τὸ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ εἶναι ἑκάστη τῶν ΕΘ, ΘΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 6). Ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα, (θ. 59)· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα.

[Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἂν $ΑΒ < ΓΔ$, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη].

Ἐὰν ἄρα προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ δυώνυμος καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε μεταξύ των εἶναι αἱ αὐταί. Διότι τὸ μὲν τετράγωνον τῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυωνύμου παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον, (θ. 60). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον, (θ. 61). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον, (θ. 62). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην δυώνυμον, (θ. 63). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον, (θ. 64). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δύο μέσα δυναμένης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον, (θ. 65). Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου πλάτους ὅτι τοῦτο εἶναι εὐθεῖα ῥητή, μεταξύ των δὲ ὅτι κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των.

73

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή.

Διότι ἀπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην (τὴν ΑΒ) δυνάμει μόνον σύμμετρος· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι ΑΒ: ΒΓ=ΑΒ^2: ΑΒ×ΒΓ, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ΑΒ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ×ΒΓ, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ^2 εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2+ΒΓ^2, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ ΑΒ×ΒΓ εἶναι σύμμετρον τὸ 2ΑΒ×ΒΓ, (θ. 6). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2+ΒΓ^2=2ΑΒ×ΒΓ+ΓΑ^2, (II, 7) ἄρα τὸ ΑΒ^2+ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιον τὸ ΑΓ^2, (θ. 13 καὶ 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΑΒ^2+ΒΓ^2· ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἀ π ο τ ο μ ή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

74

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ τῆς ὅλης δὲ περιέχῃ ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης ΑΒ ἡ ΒΓ ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος, νὰ σχηματίζῃ δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ, (θ. 27)· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέσαι, εἶναι μέσα καὶ τὰ ΑΒ^2, ΒΓ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ×ΒΓ· ἄρα τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2+ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ 2ΑΒ×ΒΓ· ἄρα τὸ 2ΑΒ×ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΓ^2, (II. 7), διότι καὶ ἂν τὸ ὅλον εἶναι πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν ἀσύμμετρον καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ×ΒΓ· ἄρα τὸ ΑΓ^2 εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ π ρ ώ τ η ἀ π ο τ ο μ ὴ μ έ σ η ς.

75

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, περιέχῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς ΑΒ ἡ ΓΒ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην τὴν ΑΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ νὰ περιέχῃ ὀρθογώνιον μέσον τὸ $AB \times B\Gamma$· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔΙ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, πρὸς δὲ τὸ $2AB \times B\Gamma$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ZE = A\Gamma^2$ (II. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$ εἶναι μέσα καὶ σύμμετρα, ἄρα καὶ τὸ ΔΕ εἶναι μέσον, (θ. 15, 23 πόρ. καὶ 74). Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρισ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τό ΔΘ· ἄρα καὶ τὸ ΔΘ εἶναι μέσον· καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 11, θ. 21 λ.). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AB^2 εἶναι σύμετρον τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, πρὸς δὲ τὸ $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 6)· ἄρα τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 13). Εἶναι δὲ $AB^2 + B\Gamma^2 = \Delta E$ καὶ $2AB \times B\Gamma = \Delta\Theta$· ἄρα τὸ ΔΕ εἶναι ἀσύμμμετρον πρὸς τὸ ΔΘ· ὡς δὲ τὸ $\Delta E : \Delta\Theta =$ ἡ $H\Delta : \Delta Z$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΗΔ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΗΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΙ· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου εἶναι ἄλογον, (θ. 20) καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ εἶναι $A\Gamma^2 = ZE$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

76

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος, σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· Λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρα·

καὶ δι' ἀναστροφῆς (II. 7) τὸ $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ $A\Gamma^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $AB^2+B\Gamma^2$· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἐ λ ά σ σ ω ν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

77

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος, σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἡ προειρημένη ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ $2AB\times B\Gamma$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB\times B\Gamma$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον (II. 7) τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB\times B\Gamma$ (θ. 16). Καὶ εἶναι τὸ $2AB\times B\Gamma$ ῥητόν· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἡ μ ε τ ὰ ῥ η τ ο ῦ μ έ σ ο ν τ ὸ ὅ λ ο ν π ο ι ο ῦ σ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

78

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ πληροῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔΙ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, πρὸς δὲ τὸ $2AB\times B\Gamma$ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $A\Gamma^2$ (II. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδ. πρὸς τὸ ΔΕ, ἄρα τὸ ΔΕ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2AB\times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΔΘ, ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2+B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB\times B\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ ΔΕ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΘ. Εἶναι δὲ $\Delta E:\Delta\Theta=\Delta H:\Delta Z$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΗΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ἀποτομὴ (θ. 73)· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

79

Πρὸς τὴν ἀποτομὴν μία μόνον ῥητὴ εὐθεῖα προσαρμόζει, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος.

Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΓ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ οὐδεμία ἄλλη ῥητὴ προσαρμόζει, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ τοῦ $2A\Delta\times\Delta B$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$· διότι ἕκαστον ὑπερέχει κατὰ τὸ αὐτὸ τὸ AB^2, (II. 7)· ἐναλλὰξ ἄρα ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $A\Delta^2+\Delta B^2$ τοῦ ἀθροίσματος $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ κατὰ τὸ αὐτὸ ὑπερέχει καὶ τὸ $2A\Delta\times\Delta B$ τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$. Τὸ δὲ $A\Delta^2+\Delta B^2$ ὑπερέχει τοῦ $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2A\Delta\times\Delta B$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2A\Gamma\times\Gamma B$· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 21), μέσον δὲ δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Πρὸς τὴν ΑΒ ἄρα δὲν προσαρμόζει ἄλλη ῥητή, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην.

Μία ἄρα ῥητὴ προσαρμόζει πρὸς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλη δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

80

Πρὸς τὴν πρώτην ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης περιέχει ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἔστω ἡ ΑΒ πρώτη ἀποτομὴ μέσης καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 74)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν προσαρμόζει ἄλλη μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ καὶ ἡ ΔΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ $ΑΔ \times ΔΒ$ (θ. 74). Καὶ ἐπειδή, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$· διότι πάλιν ὑπερέχουσι κατὰ τὸ αὐτό, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, (ΙΙ. 7)· ἐναλλὰξ ἄρα, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$. Τὸ δὲ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 24) καὶ μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

Πρὸς τὴν πρώτην ἄρα ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

81

Πρὸς τὴν δευτέραν ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, περιέχει δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

Ἔστω ἡ ΑΒ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης καὶ ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζει ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 75)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ μέσαι, ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ $ΑΔ \times ΔΒ$ (θ. 75). Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἂς παραβληθῇ ἰσοδύναμον παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· πρὸς δὲ τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΛ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$, (ΙΙ. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ΕΛ. Πάλιν τώρα, ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ· εἶναι δὲ καὶ $ΕΛ=ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΘΙ=2ΑΔ\times ΔΒ$, (ΙΙ. 7). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσαι ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι μέσον· καὶ εἶναι $ΑΓ^2+ΓΒ^2=ΕΗ$· ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι μέσον καὶ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος. Εἶναι δὲ $ΑΓ : ΓΒ=ΑΓ^2 : ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 21, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ καὶ $2ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Καὶ εἶναι $ΑΓ^2+ΓΒ^2=ΕΗ$, ἐν ᾧ $2ΑΓ\times ΓΒ=ΗΘ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ $ΕΗ : ΘΗ =$ ἡ $ΕΜ : ΘΜ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ προσαρμόζει εἰς αὐτήν· πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 79).

Πρὸς τὴν δευτέραν ἄρα ἀποτομὴν μέσης μία μόνον εὐθεῖα μέση προσαρμόζει, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

82

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην σχηματίζουσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον, (θ. 76)· λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα δὲν θὰ προσαρμόσῃ πρὸς τὴν ΑΒ σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἄς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι πληροῦσαι τὰ προειρημένα, (θ. 76). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο ὑπερέἔχει καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (II. 7 καὶ θ. 79) εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι μέσα.

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἄρα προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

83

Πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, σχηματίζει δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 17)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν προσαρμόζει ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 77). Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ δὲ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 26). Ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ τῆς ὅλης δὲ νὰ σχηματίζῃ τὰ προειρημένα· ἄρα θὰ προσαρμόσῃ μία μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

84

Εἰς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προειρημένα, (θ. 78). Λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ προειρημένα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον καὶ τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ$, (θ. 78)· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ, πρὸς δὲ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ^2=ΕΛ$, (ΙΙ. 7)· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς $ΑΒ=ΕΛ$. Πάλιν, πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΒ^2=ΕΛ$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2ΑΔ\times ΔΒ=ΘΙ$, (ΙΙ. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ, ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2+ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΓ\times ΓΒ$, εἶναι καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ΕΘ εἶναι πάλιν ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΝ. Πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, (θ. 79). Δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄρα εἰς τὴν ΑΒ ἄλλη εὐθεῖα.

Εἰς τὴν ΑΒ ἄρα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁρισμοὶ τρίτοι

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πρώτη ἀποτομή.

2. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν δὲ οὐδεμία εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τρίτη ἀποτομή.

4. Πάλιν, ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἐὰν ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν δὲ οὐδεμία, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ ἕκτη ἀποτομή.

85

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ἡ Α ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΖΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1)· ἄρα οὔτε ὁ $ΕΔ : ΔΖ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΕΔ : ΔΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $ΕΔ : ΔΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος $ΒΗ^2 : ΗΓ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ. Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΓ^2$ εἶναι τὸ $Θ^2$, (θ. 13, λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΕΔ : ΖΔ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΔΕ : ΕΖ = ΗΒ^2 : Θ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $ΔΕ : ΕΖ$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· διότι ἕκαστος εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ $ΗΒ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ τὸ $ΒΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΓ^2$ κατὰ τὸ $Θ^2$· ἄρα ΒΗ καὶ $\sqrt{ΒΗ^2 - ΗΓ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ὅλη ἡ ΒΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Εὑρέθη ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

86

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α μήκει σύμμετρος ἡ ΗΓ. Ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΔΖ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1). Καὶ ἂς γίνῃ ΖΔ: $\Delta E = \Gamma H^2 : HB^2$, (θ. 6, πόρισ.). Ἄρα τὸ ΓH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ HB^2 (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΓH^2. Ἄρα καὶ τὸ HB^2 εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $H\Gamma^2$ πρὸς τὸ HB^2 δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ ΓΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ BH^2 ἀπὸ τοῦ $H\Gamma^2$ εἶναι τὸ Θ^2, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $BH^2 : H\Gamma^2 = E\Delta : \Delta Z$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $BH^2 : \Theta^2 = \Delta E : EZ$, (V. 19, πόρ.). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· ἄρα τὸ $BH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (29). Καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ BH^2 ἀπὸ τοῦ $H\Gamma^2$ εἶναι τὸ Θ^2· ἄρα ἡ ΒΗ καὶ $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α σύμμετρος. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ορισ. τρίτοι 2)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

87

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ $\Gamma B : B\Delta$ ἂς εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς γίνῃ $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, (θ. 28, λῆμμα 1) καὶ $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, ἄρα τὸ A^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZH^2, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ A^2. Ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ZH^2· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $E : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος $A^2 : ZH^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ.

9). Πάλιν, ἐπειδὴ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΒΓ : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $ΖΗ^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΘΗ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ = Α^2 : ΘΗ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $Ε : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ λόγος $Α^2 : ΘΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἔστω λοιπὸν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΖΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΘ^2$ ἴση πρὸς $Κ^2$, (θ. 13 λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΒΔ = ΖΗ^2 : Κ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $ΒΓ : ΒΔ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2 : Κ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9), καὶ ΖΗ, $\sqrt{ΖΗ^2 - ΗΘ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι, 3).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

88

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΕ, νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΔΕ : ΕΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΔΕ : ΕΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς εἶναι $E\Delta : \Delta Z = HB^2 : \Theta^2$ (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $HB^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$. Εἶναι ἄρα ΒΗ καὶ $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΒΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 4).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

89

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΗ· ἄρα ἡ ΓΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΕ νὰ μὴ ἔχῃ πάλιν λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $ZE : E\Delta = \Gamma H^2 : HB^2$. Ἄρα καὶ τὸ HB^2 εἶναι ῥητόν, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, ὁ δὲ $\Delta E : EZ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω $BH^2 - H\Gamma^2 = \Theta^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $BH^2 : H\Gamma^2 = \Delta E : EZ$ καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ ὑπερέχει τὸ BH^2 τοῦ $H\Gamma^2$

κατὰ τὸ $Θ^2$· εἶναι ἄρα HB καὶ $\sqrt{HB^2-HΓ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 5).

Εὑρέθη ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

90

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀκόμη δὲ καὶ ΓΒ : ΒΔ νὰ μὴ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀκόμη δὲ καὶ ΓΒ : ΒΔ νὰ μὴ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$, ἄρα τὸ $Α^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ Ε : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα $Α^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ (θ. 9). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ΒΓ : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $ΗΘ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ = Α^2 : ΗΘ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Ε : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ $Α^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9)· οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὴν Α. Ἔστω τώρα $ΖΗ^2 - ΗΘ^2 = Κ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2$:

$H\Theta^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\Gamma B : B\Delta = ZH^2 : K^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΓB: $B\Delta$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $ZH^2 : K^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Καὶ ὑπερέχει τὸ ZH^2 τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τὸ K^2. Εἶναι ἄρα ΖΗ καὶ $\sqrt{ZH^2 - H\Theta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Α. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἕκτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 6).

Εὑρέθη ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

91

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΓ καὶ τῆς πρώτης ἀποτομῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒ τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, καὶ τὸ AH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{AH^2 - H\Delta^2}$ μήκει σύμ.), (ὁρισ. τρίτ. 1)· ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ΔH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ πρὸς τὸ EH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZH$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάσην τῶν ΑΖ, ΖΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι ῥητή· ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητόν, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· (θ. 13), ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20).

Ἄς ληφθῇ τώρα πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἄς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον ΝΞ ἔχον κοινὴν γωνίαν πρὸς αὐτὸ τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἄς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$, καὶ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΚΖ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΚΖ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΚΖ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΜΝ = ΕΚ$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΕΚ = ΔΘ$, τὸ δὲ $ΜΝ = ΛΞ$, (Ι. 43)· ἄρα τὸ $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον $ΑΒ = ΣΤ$. Τὸ δὲ $ΣΤ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ $ΛΝ^2 = ΑΒ$. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητὸν καὶ $ΑΙ = ΛΜ$, $ΖΚ = ΝΞ$, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι ἕκαστον τῶν $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι ῥητή. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΘ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι μέσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΛΞ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· εἶναι δὲ $ΛΞ : ΝΞ = ΛΟ : ΟΝ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὰ ἑξῆς.

92

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ δευτέρας ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἄς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ δευτέρας ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73) καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τῆς ὅλης δὲ τὸ τετράγωνον τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΗΔ), (ὁρισ. τρίτοι 2). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2—ΗΔ^2}$ μήκει σύμμ.) ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΗΔ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθογ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο (τὸ ὀρθογ.) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε· καὶ παρὰ τὴν ΑΗ ἂς παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραί του ΑΖ, ΖΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρς πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΔΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ [ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ]· Ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι ῥητόν.

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ τὴν ΛΟΜ· τὰ τετράγωνα ἄρα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσα καὶ εἶναι $ΑΙ=ΛΟ^2$, $ΖΚ=ΟΝ^2$, ἄρα καὶ τὰ $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$ εἶναι μέσα· ἄρα καὶ αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ=ΕΗ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΕΗ=ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ=ΑΙ : ΕΚ$, (VI. 1)· ὡς δὲ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$· τὸ ΕΚ ἄρα εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ=ΛΜ$, τὸ δὲ $ΖΚ=ΝΞ$· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα$=ΕΚ$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΕΚ=τὸ ΔΘ, πρὸς δὲ τὸ ΜΝ=τὸ ΛΞ, (Ι. 43)· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ= γνώμων $ΥΦΧ+ΝΞ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΚ=ΛΜ+ΝΞ$ ἐξ ὧν ΔΚ=γνώμων $ΥΦΧ+ΝΞ$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ=ΤΣ$. Τὸ δὲ $ΤΣ=ΛΝ^2$· ἄρα τὸ $ΛΝ^2=$ ὀρθογώνιον ΑΒ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ $ΛΟ \times ΟΝ$. Ἐδείχθη δὲ μέσον τὸ ΝΞ· ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· ὡς δὲ $ΛΞ : ΝΞ = ΛΟ : ΟΝ$, (VI. 1)· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 11). Αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν· ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 74)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

93

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τρίτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω ἡ ΔΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΗ, ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΗ), (ὁρ. τρίτοι 3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2-ΗΔ^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς σύμμετρα (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ὀρθογώνιον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$. Καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· αἱ ΑΖ, ΖΗ ἄρα εἶναι σύμμετροι· καὶ τὸ ΑΙ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΑΗ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ, (θ. 13). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΗΔ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ· Ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΔΗ πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, (θ. 13). Ὡς δὲ ἡ $ΑΖ : ΕΗ =$ τὸ $ΑΙ : ΕΚ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΚ, (θ. 11).

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ· ἄρα τὰ ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον,

(VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZH = EH^2$, εἶναι ἄρα $AZ : EH = EH : ZH$, (VI. 17). Ἀλλὰ $AZ : EH = AI : EK$, (VI. 1)· ὡς δὲ $EH : ZH = EK : ZK$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $AI : EK =$ τὸ $EK : ZK$· ἄρα τῶν AI, ZK εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ EK. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ, τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα)· καὶ εἶναι τὸ μὲν $AI = \Lambda M$ τὸ δὲ $ZK = N\Xi$· ἄρα καὶ τὸ $EK = MN$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $MN = \Lambda\Xi$, (I. 43), τὸ δὲ $EK = \Delta\Theta$· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΥΦΧ καὶ τὸ ΝΞ. Εἶναι δὲ καὶ $AK = \Lambda M + N\Xi$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $AB = \Sigma T = \Lambda N^2$. ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ AI, ZK ἐδείχθησαν μέσα καὶ ἴσα πρὸς τὰ ΛO^2, ON^2 ἀντιστοίχως, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΛO^2, ON^2 εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι μέση, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ AI εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZK, ἄρα καὶ τὸ ΛO^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ON^2. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ AI ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ EK, ἄρα καὶ τὸ ΛΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΝ, τουτέστι τὸ ΛO^2 πρὸς τὸ $\Lambda O \times ON$· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ· (VI. 1 καὶ θ. 11)· αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ EK ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\Lambda O \times ON$, ἄρα καὶ τὸ $\Lambda O \times ON$ εἶναι μέσον· ὥστε αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (θ. 75)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

94

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τετάρτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΑΗ) (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2-ΗΔ^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει, ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ ἄρα ὅλον τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι μέσον (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἄρα καὶ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ τούτου ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ. Ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ = ΕΗ^2$, ἄρα εἶναι $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$ καὶ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$ (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, (θ. 53, λῆμμα) καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΖΚ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΕΚ = ΜΝ$. Ἀλλὰ $ΕΚ = ΔΘ$, $ΜΝ = ΛΞ$, (Ι. 43)· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ = γνώμων ΥΦΧ + ΝΞ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλον τὸ ΑΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ ΛΜ + ΝΞ, ἐξ ὧν ΔΚ = γνώμων ΥΦΧ + τετράγωνον ΝΞ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΒ = ΣΤ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι μέσον καὶ εἶναι $ΔΚ = 2ΛΟ \times ΟΝ$, ἄρα τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$. Ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ $2ΛΟ \times ΟΝ$ μέσον. Ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

95

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πέμπτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2—ΔΗ^2}$ μήκει ἀσύμ.), (ὁρισ. τρίτοι 5). Ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΑ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $ΛΟ^2+ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2+ΟΝ^2$ εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$, καὶ αὐτὸ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν. Ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον (θ. 77)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

96

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἕκτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΔΗ) (ὁρισ. τρίτοι 6). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2-ΗΔ^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Εἶναι δὲ $ΑΖ : ΖΗ = ΑΙ : ΖΚ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΗ, ΑΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΔΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι καὶ τὸ ΔΚ μέσον, (θ. 21). Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ. Εἶναι δὲ $ΑΗ : ΗΔ = ΑΚ : ΚΔ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΔ, (θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ πρὸς τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΞ, ὅν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ὁμοίως πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $ΛΟ^2+ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2+ΟΝ^2$ εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$, καὶ τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΚ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2+ΟΝ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον, (θ. 78)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

97

Τὸ τετράγωνον ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΑΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΒΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ, πρὸς δὲ τὸ $ΒΗ^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΚΛ. Ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$· ἐκ τῶν ὁποίων $ΓΕ = ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$, (II. 7). Ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, καὶ εἶναι $ΔΜ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$, ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ εἶναι $ΑΗ^2 + ΗΒ^2 = ΓΛ$ καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$· ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $ΔΜ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ$, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι $ΑΗ^2 = ΓΘ$, $ΒΗ^2 = ΚΛ$, $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα καὶ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΓΘ, ΚΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλὰ

ΓΘ: ΝΛ = ΓΚ: ΝΜ· καὶ ΝΛ: ΚΛ = ΝΜ: ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΓΚ × ΚΜ = ΝΜ², (VI. 17) = 1/4 ΖΜ². Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΗ² εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΗΒ², εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Εἶναι δὲ ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ τὸ ὀρθογώνιον ΓΚ × ΚΜ = 1/4 ΖΜ², ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὀρθογωνίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ εἶναι σύμμετρος ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ, ἄρα τὸ ΓΜ² ὑπερέχει τοῦ ΜΖ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\text{ΓΜ}^2-\text{ΜΖ}^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

98

Τὸ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν.

Ἔστω πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ² σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἔστω ἡ ΒΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 74). Καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΗ², σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, καὶ ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΗΒ², σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ = ΑΗ² + ΗΒ²· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ΓΛ = ΑΗ² + ΗΒ², ἐξ ὧν ΑΒ² = ΓΕ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ 2ΑΗ × ΗΒ = ΖΛ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΗ × ΗΒ· ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΑΗ² + ΗΒ² τουτέστι τὸ ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ 2ΑΗ × ΗΒ τουτέστι τὸ ΖΛ, εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἂς τμηθῆ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῆ διὰ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς $AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ τῶν τετραγώνων AH^2, HB^2 τὸ $AH \times HB$ εἶναι μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $AH^2 = \Gamma\Theta$, τὸ δὲ $AH \times HB = N\Lambda$, τὸ δὲ $BH^2 = K\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Ἀλλὰ $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$ καὶ $N\Lambda : K\Lambda = NM : MK$, (VI. 1)· ὡς ἄρα $\Gamma K : NM = NM : KM$· ἄρα τὸ $\Gamma K \times KM = NM^2 = 1/4\ ZM^2$ [καὶ ἐπειδὴ τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ BH^2, εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστι ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ τὸ $\Gamma K \times KM = 1/4\ MZ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα τετράγωνον, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, ἄρα τὸ ΓM^2 ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓM^2, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

99

Τὸ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν.

Ἔστω δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, (θ. 75). Καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ BH^2 ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΚΘ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$ [καὶ εἶναι μέσον τὸ ἄθροισμα $AH^2 + HB^2$]· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $\Gamma E = AB^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $\Lambda Z = 2AH \times HB$ (II. 7). Ἂς τμηθῆ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν καὶ πρὸς τὴν ΓΔ ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AH \times HB$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $AH \times HB$· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ· ἄρα καὶ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AH \times HB$, (θ. 21, λῆμμα καὶ θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον τὸ $AH^2 + HB^2$, πρὸς δὲ τὸ $AH \times HB$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AH \times HB$· ἄρα τὰ $AH^2 + HB^2$ καὶ $2AH \times HB$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Ἀλλὰ $AH^2 + HB^2 = \Gamma\Lambda$, καὶ $2AH \times HB = Z\Lambda$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : ZM$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ HB^2, ἄρα καὶ τὸ ΓΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν AH^2, HB^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $AH \times HB$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $AH^2 = \Gamma\Theta$, τὸ δὲ $HB^2 = K\Lambda$, τὸ δὲ $AH \times HB = N\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Ἀλλὰ $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$, καὶ $N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$, (VI. 1)· ἄρα $\Gamma K : MN = MN : KM$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma K \times KM = MN^2 = 1/4\ ZM^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $1/4\ ZM^2$ ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, τὸ ΓM^2 ἄρα ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμ.). Καὶ οὐδεμία τῶν ΓΜ, ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

100

Τὸ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· ἄρα αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των τὸ $AH^2 + HB^2$ ῥητόν, τὸ δὲ $2AH \times HB$ μέσον, (θ. 76). Καὶ ἂς παραβληθῆ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ BH^2 ἴσον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα $AH^2 + HB^2$ ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα καὶ ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ ΓΛ= $ΑΗ^2+ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ ΓΕ εἶναι $=ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΖΛ=2ΑΗ\times ΗΒ$, (II. 7). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ\times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ\times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος μήκει πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν $ΑΗ^2+ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ\times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $ΑΗ^2+ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ\times ΗΒ$. Εἶναι δὲ τὸ $ΓΛ=ΑΗ^2+ΗΒ^2$ καὶ $ΖΛ=2ΑΗ\times ΗΒ$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $ΓΛ:ΖΛ=ΓΜ:ΜΖ$ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΓΘ=ΑΗ^2$ τὸ δὲ $ΚΛ=ΗΒ^2$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $ΓΘ:ΚΛ=ΓΚ:ΚΜ$ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΗ\times ΗΒ$, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $ΑΗ^2=ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2=ΚΛ$, τὸ δὲ $ΑΗ\times ΗΒ=ΝΛ$, ἄρα τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ:ΝΛ=ΝΛ:ΚΛ$. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΘ:ΝΛ=ΓΚ:ΝΜ$, καὶ $ΝΛ:ΚΛ=ΝΜ:ΚΜ$, (VI. 1)· ὡς ἄρα ἡ $ΓΚ:ΜΝ=ΜΝ:ΚΜ$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ\times ΚΜ=ΜΝ^2=1/4\ ΖΜ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ ὀρθογώνιον τὸ $ΓΚ\times ΚΜ$ ἴσον πρὸς τὸ $1/4\ ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2-ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ. 18). Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 4).

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

101

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ AB σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ $\Gamma E = AB^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν AB προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητὸν (θ. 77). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΘ ἴσον πρὸς τὸ AH^2, καὶ τὸ ΚΛ ἴσον πρὸς τὸ HB^2· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. Τὸ δὲ ἄθροισμα $AH^2 + HB^2$ εἶναι καὶ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $\Gamma E = AB^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $Z\Lambda = 2AH \times HB$. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, $N\Lambda = AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2AH \times HB$ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΖΛ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομὴ (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

Διότι καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma K \times KM$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ NM^2, τουτέστι τὸ $\frac{1}{4}\, ZM^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ HB^2, εἶναι δὲ τὸ μὲν $AH^2 = \Gamma\Theta$, τὸ δὲ $HB^2 = K\Lambda$, ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΜ ἔχει παραβληθῆ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}\, ZM^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, ἄρα τὸ ΓM^2 ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ. 18). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ἀποτομὴ ἄρα ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

102

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ΑΗ, ΗΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $AH \times HB$, καὶ τὸ AH^2+HB^2 ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,AH \times HB$, (θ. 78). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ HB^2 ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2+HB^2$· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2+HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $\Gamma E = AB^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $Z\Lambda = 2AH \times HB$, (II. 7). Καὶ εἶναι τὸ $2AH \times HB$ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα AH^2+HB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AH \times HB$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $AH^2+HB^2 = \Gamma\Lambda$, τὸ δὲ $2AH \times HB = Z\Lambda$, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

Διότι ἐπειδὴ $Z\Lambda = 2AH \times HB$, ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ HB^2. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $AH^2 = \Gamma\Theta$, πρὸς δὲ τὸ $HB^2 = K\Lambda$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν AH^2, HB^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $AH \times HB$, (θ. 53 λῆμμα) καὶ εἶναι $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = K\Lambda$, $AH \times HB = N\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ ΓM^2 ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μ. ἀσύμ.), (θ. 18). Καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

103

Ἡ πρὸς τὴν ἀποτομὴν μήκει σύμμετρος εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΕ· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἂς γίνῃ ΒΕ : ΔΖ = ΑΒ : ΓΔ, (VI. 12)· καὶ ὡς ἄρα εἷς ὅρος πρὸς ἕνα οὕτως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων, (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ : ὅλην τὴν ΓΖ = ΑΒ : ΓΔ. Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13) [ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ].

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ΑΕ : ΓΖ = ΒΕ : ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ, (V. 16). Τώρα, τὸ $ΑΕ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἢ συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ) ἢ ἀσυμμέτρου. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι σύμμετρος καὶ ἡ ΓΖ, (θ. 12), ἐὰν δὲ ἡ ΒΕ (εἶναι σύμ. πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν) θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔΖ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ, (θ. 13). Ἐὰν δὲ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ), καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ, ἐὰν δὲ ἡ ΒΕ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔΖ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

104

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομὴ μέσης, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΕΒ. Ἄρα αἱ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 74-75). Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΑΒ : ΓΔ = ΒΕ : ΔΖ, (VI. 12)· ἄρα ἡ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, (VI. 12 καὶ θ. 11). Αἱ δὲ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι μέσαι, (θ. 23) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης, (θ. 74-75).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$ [ἀλλ' ὡς μὲν $ΑΕ : ΕΒ = ΑΕ^2 : ΑΕ \times ΕΒ$, ὡς δὲ $ΓΖ : ΖΔ = ΓΖ^2 : ΓΖ \times ΖΔ$], εἶναι ἄρα καὶ ὡς $ΑΕ^2 : ΑΕ \times ΕΒ = ΓΖ^2 : ΓΖ \times ΖΔ$ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς $ΑΕ^2 : ΓΖ^2 = ΑΕ \times ΕΒ : ΓΖ \times ΖΔ$]. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΑΕ^2$ πρὸς τὸ $ΓΖ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$, (V. 16 καὶ θ. 11). Ἐὰν λοιπὸν τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$ εἶναι ῥητόν, θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$, καὶ ἐὰν τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$ εἶναι μέσον, εἶναι μέσον καὶ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$, (θ. 23, πόρ.).

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

105

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος· καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 76), ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$, (V. 12 καὶ 16), εἶναι ἄρα καὶ $ΑΕ^2 : ΕΒ^2 = ΓΖ^2 : ΖΔ^2$, (VI. 20, πόρ.). Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι $ΑΕ^2 + ΕΒ^2 : ΕΒ^2 = ΓΖ^2 + ΖΔ^2 : ΖΔ^2$ [καὶ ἐναλλὰξ]· εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΒΕ^2$ πρὸς τὸ $ΔΖ^2$· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$, (V. 16 καὶ θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$, (θ. 76)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$, (ὁρ. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς $ΑΕ^2 : ΑΕ \times ΕΒ = ΓΖ^2 : ΓΖ \times ΖΔ$, σύμμετρον δὲ τὸ $ΑΕ^2$ πρὸς τὸ $ΓΖ^2$, ἄρα καὶ τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$, (θ. 76)· ἄρα καὶ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$ εἶναι μέσον (θ. 23, πόρ.)· ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων, (θ. 76)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

106

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ\times ΕΒ$ ῥητόν, (θ. 75). Καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἶναι $ΓΖ : ΖΔ = ΑΕ : ΕΒ$, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ^2+ΖΔ^2$, πρὸς δὲ τὸ $ΑΕ\times ΕΒ$ τὸ $ΓΖ\times ΖΔ$· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

107

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον εἶναι καὶ αὐτὴ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν, (θ. 78). Καὶ εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη, (θ. 104), αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι πρὸς τὰς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρα· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 78)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

108

Ἐὰν ἀπὸ ῥητοῦ ὀρθογωνίου ἀφαιρεθῇ μέσον ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον χωρίον γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων, ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ΒΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, πρὸς δὲ τὸ ΔΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΗΚ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ = ΛΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΒΓ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΒΔ μέσον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ πρὸς τὸ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ πρὸς τὸ ΗΚ, ἄρα τὸ μὲν ΗΘ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΗΚ μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 20), ἡ δὲ ΖΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΘ, ΖΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΚΖ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου, (θὰ εἶναι δηλ. ΘΖ, $\sqrt{ΘΖ^2—ΖΚ^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΘΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 1). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς εἶναι ἀποτομή, (θ. 91). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, εἶναι ἀποτομή.

Ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΖΘ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἐλάσσων (θ. 94)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

109

Ἐὰν ἀπὸ μέσου ἀφαιρεθῇ ῥητὸν γίνονται ἄλλαι δύο ἄλογοι ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν τὸ ΒΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ ἂς παραβληθῶσι τὰ ὀρθογώνια ὡς κατὰ τὸ προηγούμενον (108) θεώρημα. Συνεπῶς ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ εἰς ταύτην ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΘΖ, $\sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 2). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 92).

Ἐὰν δὲ τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι πέμπτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 5)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, (θ. 95)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

110

Ἀπὸ μέσου ἀφαιρουμένου μέσου ἀσυμμέτρου πρὸς τὸ ὅλον γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ὡς εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὅλον. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΓΕ εἶναι μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΒΓ, ΒΔ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΒΔ, θὰ εἶναι συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΖΚ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ

ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΗΚ, εἶναι καὶ ἡ ΘΖ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΖΘ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. θὰ εἶναι ΖΘ, $\sqrt{Ζ\Theta^2-ΖΚ^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι)].

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $Ζ\Theta^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΘ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, (θ. 93)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Ἐὰν δὲ τὸ $Ζ\Theta^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΘ) καὶ οὐδεμία τῶν ΘΖ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι ἕκτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 6). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον πλευρῶν, ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 96). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

111

Ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομή, ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη ἀποτομή, (θ. 97). Ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΕΖ· ἄρα αἱ ΔΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ $\Delta Ζ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΔΖ, $\sqrt{\Delta Ζ^2 - ΖΕ^2}$ σύμμετροι), καὶ ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. τρίτοι 1). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 60). Ἂς διαιρεθῇ αὐτὴ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ· ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΕ, εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ $\Delta Η^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΔΗ), καὶ τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. δευτ. 1). Καὶ ἡ ΔΖ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΔΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 12)· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ ΗΖ εἶναι πρὸς τὴν ΔΖ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). [Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν

ΗΖ, (θ. 15), εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΖ, ἄρα καὶ ἡ ΗΖ εἶναι ῥητή. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ], εἶναι δὲ μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ ἀποτομὴ ἄρα δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Π ό ρ ι σ μ α]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε πρὸς ἀλλήλας εἶναι αἱ αὐταί.

Διότι τὸ μὲν τετράγωνον μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ῥητὴν καὶ μήκει ἀσύμμετρον πρὸς τὴν ῥητὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22), τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν, (θ. 97), τὸ δὲ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν, (θ. 98), τὸ δὲ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν, (θ. 99), τὸ δὲ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομὴν (θ. 100), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν, (θ. 101), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν, (θ. 102). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι εἶναι ῥητή, μεταξύ των δέ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταί, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον, (θ. 111), σχηματίζουσι δὲ παραβαλλόμεναι παρὰ ῥητὴν πλάτη αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ, ἀποτομὰς κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, αἱ δὲ μετὰ τὴν δυώνυμον καὶ αὐταὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς δυωνύμους κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, ἄρα ἄλλαι εἶναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἄλλαι αἱ μετὰ τὴν δυώνυμον, ὥστε νὰ εἶναι ὅλαι αἱ ἄλογοι κατὰ τὴν τάξιν δεκατρεῖς, ἤτοι:

Μέση,
Δυώνυμος,
Ἐκ δύο μέσων πρώτη,
Ἐκ δύο μέσων δευτέρα,
Μείζων,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη,
Δύο μέσα δυναμένη,
Ἀποτομή,

Πρώτη ἀποτομὴ μέσης,
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης,
Ἐλάσσων,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

112

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ τὴν δυώνυμον σχηματίζει πλάτος ἀποτομήν, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἀκόμη ἡ γινομένη ἀποτομὴ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, δυώνυμος δὲ ἡ ΒΓ, τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ $Α^2 = ΒΓ \times ΕΖ$· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰς ΓΔ, ΔΒ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΕΖ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι ἔστω πάλιν $Α^2 = ΒΔ \times Η$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΒΓ \times ΕΖ = ΒΔ \times Η$, εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = Η : ΕΖ$, (VI. 16). Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ Η εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ, (VI. 16 καὶ 14)· ἔστω $Η = ΕΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = ΘΕ : ΕΖ$· καὶ διὰ διαιρέσεως τοῦ λόγου, (V. ὁρ. 15) εἶναι $ΓΔ : ΒΔ = ΘΖ : ΖΕ$, (V. 17). Ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΘΖ : ΖΕ = ΖΚ : ΚΕ$· καὶ ὅλη ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΕ$· διότι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V. 12). Ὡς δὲ ἡ $ΖΚ : ΚΕ = ΓΔ : ΔΒ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΓΔ : ΔΒ$. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΒ^2$, (θ. 36)· ἄρα καὶ τὸ $ΘΚ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΚΖ^2$, (VI. 20, πόρ. καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι ὡς τὸ $ΘΚ^2 : ΚΖ^2 =$ ἡ $ΘΚ : ΚΕ$, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ εἶναι ἀνάλογοι (V. ὁρισ. 9). Ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 11)· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 15). Καὶ ἐπειδὴ $Α^2 = ΕΘ \times ΒΔ$, εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΕΘ \times ΒΔ$. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 20)· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΚ εἶναι ῥητή, (ὁρ. 3) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 12). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΓΔ : ΔΒ = ΖΚ : ΚΕ$, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ· ἄρα καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Τὸ δὲ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΓΔ, $\sqrt{ΓΔ^2 - ΔΒ^2}$ σύμμ. ἢ ἀσύμμ.).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ, (θ. 11 καὶ 12)· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΕ, (θ. 12)· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Ἐὰν δὲ τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΔ), καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἡ ΖΕ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΖΚ, ΚΕ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΔ, ΔΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

113

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ ἀποτομὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δυώνυμον, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἀκόμη δὲ ἡ γινομένη δυώνυμος ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ἀποτομήν.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἰσοδύναμον τὸ $ΒΔ \times ΚΘ$, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ῥητῆς Α παραβαλλόμενον παρὰ τὴν ἀποτομὴν ΒΔ νὰ σχηματίζῃ πλάτος τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ΒΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΚΘ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΔ.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· ἄρα αἱ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἴσον τὸ $ΒΓ \times Η$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΒΓ \times Η$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ῥητὴν ΒΓ· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΒΓ \times Η$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΒΔ \times ΚΘ$, ἄρα εἶναι $ΓΒ : ΒΔ = ΚΘ : Η$, (VI. 16). Καὶ εἶναι ἡ ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ ΚΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Η, (V. 16 καὶ 14). Ἂς ληφθῇ $ΚΕ = Η$· ἄρα ἡ ΚΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΓΒ : ΒΔ = ΘΚ : ΚΕ$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΚΘ : ΘΕ$, (V. 19, πόρ.). Ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΚΘ : ΘΕ = ΘΖ : ΖΕ$· ἄρα καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ $ΚΖ : ΖΘ = ΚΘ : ΘΕ = ΒΓ : ΓΔ$, (V. 19). Αἱ δὲ

ΒΓ, ΓΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΚΘ: ΘΕ=ΚΖ:ΖΘ, ἀλλὰ ΚΘ: ΘΕ= ΘΖ:ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ΚΖ:ΖΘ=ΘΖ:ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, (V. ὁρισ. 9)· καὶ ὡς ἄρα ΚΖ:ΖΕ=ΚΖ²:ΖΘ². Εἶναι δὲ τὸ ΚΖ² σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΘ²· διότι αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει σύμμετροι· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΕ, (θ. 11)· ὥστε ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 12). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΒΓ: ΓΔ= ΚΖ:ΖΘ, καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ΒΓ: ΚΖ=ΔΓ:ΖΘ, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 11). Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι ῥηταί, (ὁρ. 3) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΒΓ² ὑπερέχῃ τοῦ ΓΔ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ), καὶ τὸ ΚΖ² θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ΖΘ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, (θ. 12), ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ, (θ. 13).

Ἐὰν δὲ τὸ ΒΓ² ὑπερέχῃ τοῦ ΓΔ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ) καὶ τὸ ΚΖ² θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ΖΘ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, (θ. 12), ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΚΖ, ΖΘ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΒΓ, ΓΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ἡ ΚΘ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

114

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒ×ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς δυωνύμου τῆς ΓΔ, τῆς ὁποίας μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου ΓΔ τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἔστω $H^2 = AB \times \Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ Η εἶναι ῥητή.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ πρὸς τὸ Θ^2 ἴσον ὀρθογώνιον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα ἡ ΚΛ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΕ, ΕΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, (θ. 112). Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι σύμμετροι πρὸς τὰς ΑΖ, ΖΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· εἶναι ἄρα $AZ:ZB = KM:M\Lambda$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $AZ:KM = BZ:\Lambda M$, (V. 16)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΚΛ εἶναι ὡς $AZ:KM$ (V. 19). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 12)· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θ. 11). Καὶ εἶναι $AB:K\Lambda = \Gamma\Delta \times AB : \Gamma\Delta \times K\Lambda$· (VI. 1)· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma\Delta \times K\Lambda$, (θ. 9). Εἶναι δὲ $\Gamma\Delta \times K\Lambda = \Theta^2$· ἄρα τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Θ^2. Πρὸς δὲ τὸ $\Gamma\Delta \times AB$ εἶναι ἴσον τὸ H^2· ἄρα τὸ H^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Θ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ Θ^2· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ H^2· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητή. Καὶ $H^2 = \Gamma\Delta \times AB$.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Πόρισμα

Καὶ γίνεται καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν ῥητὸν χωρίον νὰ περιέχηται ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

115

Ἀπὸ μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Β καὶ ἔστω $B \times A = \Gamma^2$· ἄρα ἡ Γ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4). διότι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον, (θ. 20). Καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων (ἀλόγων) εἶναι ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων σχηματίζει πλάτος μέσην παραβαλλόμενον παρὰ ῥητήν. Πάλιν λοιπὸν ἔστω $B \times \Gamma = \Delta^2$· ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι ἄλογον (θ. 20). Ἄρα ἡ Δ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4)· καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον ὁ τοιοῦτος συλλογισμός, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἀλόγων εἶναι ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.