ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

9.1 Σειρές Fourier

Αν μια συνάρτηση f(x) ορίζεται στο διάστημα (– L,L) και είναι περιοδική, με περίοδο 2L, δηλαδή f(x+2L) = f(x), τότε εκφράζεται από τη **σειρά Fourier** ή έχει **ανάπτυγμα Fourier**:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{9.1}$$

όπου οι **συντελεστές Fourier** δίνονται από τα ολοκληρώματα

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad n=0,1,2,... \tag{9.2}$$

Η σειρά συγκλίνει αν η f(x) είναι ορισμένη και μονότιμη στο διάστημα (–L,L), εκτός πιθανώς σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, και οι f(x) και f'(x) είναι τμηματικά συνεχείς στο διάστημα (– L,L). Η σειρά συγκλίνει στην f(x) αν το x είναι σημείο συνέχειας, και στην $\frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$ αν το x είναι σημείο ασυνέχειας.

Οι συνθήκες που αναφέρθηκαν είναι ικανές αλλά όχι πάντοτε αναγκαίες. Στα συνήθη προβλήματα που συναντούμε στη φυσική όμως, δεν παρουσιάζονται προβλήματα σύγκλισης τόσο των σειρών Fourier για την f(x) όσο και των ολοκληρωμάτων τους. Χρειάζεται όμως μεγάλη προσοχή στη σύγκλιση των παραγώγων των σειρών.

Η συνάρτηση f(x) μπορεί να είναι περιοδική στο χώρο με τα x και L να έχουν διαστάσεις μήκους, ή να είναι μια συνάρτηση περιοδική στο χρόνο οπότε το t αντικαθιστά το x και η περίοδος είναι, αντί του 2L, ένα χρονικό διάστημα.

Ταυτότητα του Parseval: Επειδή οι συναρτήσεις $\cos \frac{n\pi x}{L}$ και $\sin \frac{n\pi x}{L}$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα (– L,L), αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + b_n^2). \tag{9.3}$$

Η ταυτότητα αυτή έχει σημαντική φυσική σημασία. Θα δούμε, για παράδειγμα, ότι συνδέει την ολική ενέργεια ενός παλλομένου συστήματος με τις ενέργειες των κανονικών τρόπων ταλάντωσής του.

9.2 Σειρές Fourier για γενικό διάστημα

Είναι χρήσιμες, για αναφορά, οι σχέσεις που δίνουν το ανάπτυγμα Fourier για τη συνάρτηση f(x) στο διάστημα (p,q):

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \alpha_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{q-p} \right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{q-p} \right)\right\} \qquad (9.4)$$

όπου $$\alpha_n = \frac{2}{q-p} \int_p^q f(x) \cos\left(2n\pi \frac{x}{q-p} \right) dx \qquad (9.5)$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

και $$b_n = \frac{2}{q-p} \int_p^q f(x) \sin\left(2n\pi \frac{x}{q-p} \right) dx. \qquad (9.6)$$

9.3 Οι ενέργειες των κανονικών τρόπων παλλόμενης χορδής

Θα εξετάσουμε τις ενέργειες που σχετίζονται με τους κανονικούς τρόπους εγκάρσιας ταλάντωσης χορδής με ακίνητα τα δύο της άκρα. Στην περίπτωση αυτή η απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση

$$y_n = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} \qquad (P.4.86)$$

όπου $\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$ (n = 1,2,3,...) είναι οι κανονικές συχνότητες. Για ευκολία, η σχέση αυτή θα γραφτεί ως:

$$y_n = \alpha_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad \text{με} \quad \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{και} \quad \tan\phi_n = \frac{A_n}{B_n}. \qquad (9.7)$$

Η ολική μετατόπιση στη χορδή είναι

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c} \qquad (9.8)$$

με τα α_n και ϕ_n να καθορίζονται από τις συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

Οι ενέργειες της χορδής δίνονται από τις σχέσεις:

Κινητική ενέργεια: $$E_{kin} = \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \qquad (P.4.87)$$

Δυναμική ενέργεια: $$E_{pot} = \frac{1}{2} T \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (P.4.88)$$

Για τον n-στο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, οι ενέργειες είναι:

$$E_{kin,n} = \frac{1}{2}\varrho \int_0^l \left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\varrho\omega_n^2\alpha_n^2 \cos^2(\omega_n t+\phi_n) \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c}\, dx \tag{9.9}$$

$$E_{pot,n} = \frac{1}{2} T \int_0^l \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} T \frac{\omega_n^2}{c^2} \alpha_n^2 \sin^2(\omega_n t+\phi_n) \int_0^l \cos^2 \frac{\omega_n x}{c}\, dx. \tag{9.10}$$

Χρησιμοποιόντας τη σχέση $c^2 = T/\varrho$ και με $m = \varrho l$ την ολική μάζα της χορδής, οι ενέργειες είναι

$$E_{kin,n} = \frac{1}{4} m\omega_n^2\alpha_n^2 \cos^2(\omega_n t+\phi_n) \qquad E_{pot,n} = \frac{1}{4} m\omega_n^2\alpha_n^2 \sin^2(\omega_n t+\phi_n) \tag{9.11}$$

και η ολική ενέργεια στον n-στο κανονικό τρόπο ταλάντωσης της χορδής είναι

$$E_n = E_{kin,n} + E_{pot,n} = \frac{1}{4} m\omega_n^2\alpha_n^2 \tag{9.12}$$

η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τους υπόλοιπους τρόπους ταλάντωσης, μια και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά ω_n και α_n του n-στου τρόπου.

Για τη γενική κίνηση της χορδής, οι ενέργειες υπολογίζονται από τις σχέσεις (P.4.87), (P.4.88) και (9.8).

Η κινητική ενέργεια της χορδής υπολογίζεται ως εξής:

Επειδή $\displaystyle \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\alpha_n\cos(\omega_n t+\phi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c}$, έπεται ότι

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\varrho \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\alpha_n\cos(\omega_n t+\phi_n) \sin \frac{\omega_n x}{c} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\varrho \int_0^l \left(\sum_n \omega_n^2\alpha_n^2\cos^2(\omega_n t+\phi_n) \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}} \omega_m\omega_n\alpha_m\alpha_n\cos(\omega_m t+\phi_m) \cos(\omega_n t+\phi_n) \sin \frac{\omega_m x}{c} \sin \frac{\omega_n x}{c} \right) dx$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\varrho \sum_n \omega_n^2\alpha_n^2\cos^2(\omega_n t+\phi_n) \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c}\, dx +$$

$$+ \varrho \sum_{\substack{m,n \\ m\neq n}} \omega_m\omega_n\alpha_m\alpha_n\cos(\omega_m t+\phi_m) \cos(\omega_n t+\phi_n) \int_0^l \sin \frac{\omega_m x}{c} \sin \frac{\omega_n x}{c}\, dx.$$

Όλα τα ολοκληρώματα του δεύτερου αθροίσματος μηδενίζονται (οι συναρτήσεις $\sin(\omega_m x/c)$ και $\sin(\omega_n x/c)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $0 \leq x \leq l$) ενώ

$\displaystyle \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c}\, dx = \frac{l}{2}$ και επομένως

$$E_{kin} = \frac{1}{4}\, m \sum_n \omega_n^2 \alpha_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) = \sum_n E_{kin,n} \tag{9.13}$$

από την οποία φαίνεται ότι η κινητική ενέργεια της χορδής είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών που σχετίζονται με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Η δυναμική ενέργεια της χορδής υπολογίζεται ως εξής:

Επειδή $\frac{\partial y}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{c}\, \alpha_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \cos \frac{\omega_n x}{c}$, έπεται ότι

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\, \varrho \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \alpha_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \cos \frac{\omega_n x}{c} \right)^2 dx.$$

Για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν στον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας, προκύπτει ότι

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\, \varrho \sum_n \omega_n^2 \alpha_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \int_0^l \cos^2 \frac{\omega_n x}{c}\, dx \qquad \text{και επομένως}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{4}\, m \sum_n \omega_n^2 \alpha_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) = \sum_n E_{pot,n} \tag{9.14}$$

από την οποία φαίνεται ότι η δυναμική ενέργεια της χορδής είναι ίση με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών που σχετίζονται με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

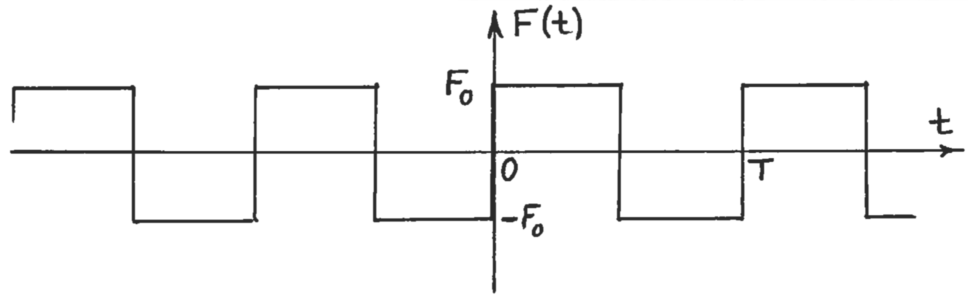
Η ολική ενέργεια της χορδής είναι:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{4}\, m \sum_n \omega_n^2 \alpha_n^2 = \sum_n \left(E_{kin,n} + E_{pot,n} \right) = \sum_n E_n. \tag{9.15}$$

που είναι ίση με το άθροισμα των ολικών ενεργειών που σχετίζονται με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Παράδειγμα 9.1

Η περιοδική δύναμη τετραγωνικών παλμών του σχήματος, ασκείται πάνω σε απλό αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση. Να βρεθεί η απόκριση του ταλαντωτή.



Η δύναμη εκφράζεται από τη σειρά Fourier:

$$F(t) = \frac{4}{\pi} F_0 \left(\sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \ldots \right) \qquad (\mu\varepsilon\ \omega = 2\pi/T\ ).$$

η οποία είναι επαλληλία δυνάμεων ημιτονικής μορφής. Η κίνηση του ταλαντωτή για τέτοιες δυνάμεις είναι ήδη γνωστή.

Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή είναι:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + sx = F(t)$$ όπου, στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$F(t) = \frac{4}{\pi} F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \qquad ή$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \qquad \mu\varepsilon \qquad F_n = \frac{4}{\pi} F_0 \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t.$$

Η απόκριση του εξαναγκασμένου ταλαντωτή με απόσβεση αποτελείται από δύο μέρη: τη μεταβατική κίνηση (Ρ.1.128) η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του ταλαντωτή και τη μόνιμη κατάσταση (Ρ.2.34) η οποία εξαρτάται από την ασκούμενη δύναμη. Για τη δύναμη $P_n \sin\omega_n t$, η απόκριση είναι:

$$x_n(t) = e^{-pt} \left(A_n e^{qt} + B_n e^{-qt} \right) - \frac{P_n \cos(\omega_n t - \phi_n)}{\omega_n \sqrt{r^2 + \left(\omega_n m - \frac{s}{\omega_n}\right)^2}}$$

όπου $p = \frac{r}{2m}$ $\quad q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$ $\quad \phi_n = \arctan \frac{1}{r}\left(\omega_n m - \frac{s}{\omega_n}\right)$ $\quad A_n, B_n =$ σταθερές.

Για κάθε όρο F_n της $F(t)$ έχουμε την απόκριση $x_n(t)$, με $P_n = \frac{4F_0}{\pi(2n-1)}$ και $\omega_n = (2n-1)\omega$, όπου $\omega = 2\pi/T$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, για δύναμη

$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ θα έχουμε $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$, δηλαδή

$$x(t) = e^{-pt} \left(Ae^{qt} + Be^{-qt} \right) - \frac{4F_0}{\pi\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{\cos(\omega_n t - \phi_n)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega_n m - \frac{s}{\omega_n}\right)^2}}$$

όπου οι $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ και $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι σταθερές και οι ω_n και ϕ_n όπως έχουν ήδη δοθεί. Ο πρώτος όρος εκφράζει τη μεταβατική κατάσταση και το άθροισμα τη μόνιμη. Το πλάτος της κάθε συνιστώσας εξαρτάται από το n και την ω_n.

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 9.1, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9.

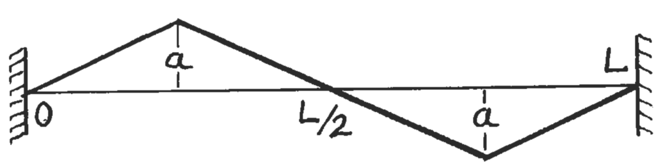
9.1 Τεντωμένη χορδή έχει τα άκρα της x=0 και x=L σταθερά και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους.

(α) Αποδείξετε, με απευθείας αντικατάσταση, ότι συναρτήσεις της μορφής

$$\psi(x,t) = (A \sin\omega t + B \cos\omega t)\,[\,D \sin(\omega x/c) + E \cos(\omega x/c)\,]$$

ικανοποιούν την κυματική εξίσωση αν c είναι η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων στη χορδή.

(β) Αν η χορδή είναι αρχικά ακίνητη και έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα, να βρεθεί η κίνηση που θα εκτελέσει αν αφεθεί ελεύθερη στο χρόνο t=0.



Η μετατόπιση της χορδής αρχικά (βλ. Σχήμα) δίνεται από τη σειρά Fourier:

$$\psi(x,0) = \frac{8\alpha}{\pi^2}\left(\sin 2\pi\frac{x}{L} - \frac{1}{9} \sin 6\pi\frac{x}{L} + \frac{1}{25} \sin 10\pi\frac{x}{L} - \dots\right).$$

Απ.: $\psi(x,t) = \dfrac{8\alpha}{\pi^2}\left(\cos 2\pi\frac{ct}{L} \sin 2\pi\frac{x}{L} - \frac{1}{9} \cos 6\pi\frac{ct}{L} \sin 6\pi\frac{x}{L} + \frac{1}{25} \cos 10\pi\frac{ct}{L} \sin 10\pi\frac{x}{L} - \dots\right)$

9.2 Τεντωμένη χορδή έχει τα άκρα της στα x=0 και x=L ακίνητα και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις. Αρχικά, η μετατόπιση είναι $\psi(x,0) = \psi_0(x) = A(Lx - x^2)$ όπου α είναι μια θετική σταθερά, και η ταχύτητα είναι $\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x) = 0.$

Να βρεθεί η κίνηση της χορδής.

Δίνονται:

$$\int x \sin px\, dx = \frac{1}{p^2} \sin px - \frac{x}{p} \cos px$$

$$\int x^2 \sin px\, dx = \frac{2x}{p^2} \sin px - \left(\frac{x^2}{p} - \frac{2}{p^3} \right) \cos px.$$

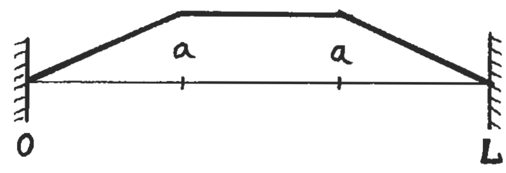
Απ.: $\psi(x,t) = 8\,\dfrac{AL^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^3} \sin\left((2n-1)\pi\frac{x}{L}\right) \cos\left((2n-1)\pi\frac{ct}{L}\right).$

9.3 Στο πρόβλημα 9.2, αν η αρχική μετατόπιση είναι $\psi(x,0) = \psi_0(x) = 0$ και η αρχική ταχύτητα $\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x) = B(Lx - x^2)$, όπου B είναι μια θετική σταθερά, να βρεθεί η κίνηση της χορδής.

Απ.: $\psi(x,t) = 8\,\dfrac{BL^3}{c\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4} \sin\left((2n-1)\pi\frac{x}{L}\right) \sin\left((2n-1)\pi\frac{ct}{L}\right).$

9.4 Τεντωμένη χορδή μήκους L, έχει αρχικά τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα, με τα σημεία της μεταξύ $x = L/3$ και $x = 2L/3$ να έχουν εγκάρσια μετατόπιση ίση με α. Η χορδή είναι αρχικά ακίνητη.

Αν τη στιγμή $t = 0$ η χορδή αφεθεί ελεύθερη, να βρεθεί η κίνησή της που θα ακολουθήσει.



9.5 Αν πάνω σε τεντωμένη χορδή ασκείται και μια δύναμη τριβής η οποία είναι ανάλογη της εγκάρσιας ταχύτητας και ίση με $-2k\rho \frac{\partial y}{\partial t}$ ανά μονάδα μήκους, δείξετε ότι η κυματική εξίσωση τροποποιείται σε:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{2k}{c^2}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Αν τα άκρα της χορδής είναι ακίνητα και η αρχική μετατόπιση είναι $y_0(x)$ ενώ η αρχική ταχύτητα είναι $v_0(x)$, να βρεθεί η γενική λύση $y(x,t)$.

Απ.: $$y(x,t) = e^{-kt}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - k^2}\, t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - k^2}\, t\right)\right] \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx, \qquad B_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - k^2}}\left[kA_n + \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx\right].$$

9.6 Χορδή είναι τεντωμένη με δύναμη T, έχει τα άκρα της στα $x=0$ και $x=L$ ακίνητα και εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις. Αν από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μόνο η πρώτος και τρίτος είναι διεγερμένοι και η μετατόπιση της χορδής είναι

$$y(x,t) = A_1 \sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(\pi\frac{ct}{L}\right) + A_3 \sin\left(3\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(3\pi\frac{ct}{L} + \frac{\pi}{4}\right),$$

βρείτε την ολική ενέργεια της χορδής. Δείξετε ότι η ολική ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών που σχετίζονται με τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Απ.: $$E_{ολ} = \frac{\pi^2 T}{4L}\left(A_1^2 + 9A_3^2\right), \qquad E_1 = \frac{\pi^2 T}{4L} A_1^2, \qquad E_2 = \frac{\pi^2 T}{4L} 9A_3^2, \qquad E_{ολ} = E_1 + E_2.$$