ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

4.1 Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης σε μία διάσταση

Η μορφή της γενικής λύσης της κυματικής εξίσωσης (π.χ. σε μία διάσταση),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

μπορεί να βρεθεί με την ακόλουθη μέθοδο, του d'Alembert. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0 \tag{4.2}$$

όπου, σύμφωνα με την καθιερωμένη σύμβαση, ο κάθε ένας τελεστής δρα επί της συνάρτησης που βρίσκεται στα δεξιά του.

Ορίζοντας τις νέες μεταβλητές

$$u = x - ct \qquad \text{και} \qquad v = x + ct, \tag{4.3}$$

συναρτήσει των οποίων είναι

$$x = \frac{1}{2}(v + u) \qquad \text{και} \qquad t = \frac{1}{2c}(v - u), \tag{4.4}$$

προκύπτουν οι εξής τελεστές παραγώγισης:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{ή} \qquad 2\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{ή} \qquad 2\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Η κυματική εξίσωση στη μορφή της Εξ.(4.2), μπορεί επομένως να γραφτεί ως

$$4\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\psi = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0. \tag{4.7}$$

Ολοκληρώνοντας την (4.7) ως προς u προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = f_2'(v) \tag{4.8}$$

όπου $f_2'(v)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του v. Ολοκληρώνοντας την (4.8) ως προς v,

$$\psi(x,t) = f_1(u) + f_2(v). \tag{4.9}$$

όπου $f_1(u)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του u και $f_2(v)$ είναι μια συνάρτηση του v, που προκύπτει από την ολοκλήρωση της $f_2'(v)$.

Επιστρέφοντας στις μεταβλητές x και t, έχουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης

$$\psi(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{4.10}$$

όπου $f_1(x - ct)$ και $f_2(x + ct)$ είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις των μεταβλητών $(x - ct)$ και $(x + ct)$ αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις αυτές πρέπει μόνο να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες συνέχειας που υπαγορεύονται από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο κινείται το κύμα.

Η επαλήθευση των λύσεων που βρέθηκαν είναι πολύ απλή. Για τη λύση

$$\psi(x,t) = f_1(x - ct)$$

έχουμε

$$\psi(x,t) = f_1(u) \qquad \text{με} \qquad u = x - ct$$

και επομένως

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{df_1}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df_1}{du} = f_1' \qquad\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{df_1'}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df_1'}{du} = f_1''$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{df_1}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\,\frac{df_1}{du} = -cf_1' \qquad\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{df_1'}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\,\frac{df_1'}{du} = c^2f_1''$$

Χρησιμοποιόντας τα αποτελέσματα που βρέθηκαν, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f_1'' - \frac{1}{c^2}c^2f_1'' = 0$$

και επομένως η συνάρτηση $f_1(x - ct)$ είναι λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκεται ότι το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $f_2(x + ct)$. Επομένως, κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο συναρτήσεων είναι επίσης λύση.

Εξετάζοντας μια λύση της μορφής $\psi(x,t) = f_1(x - ct)$ σε δύο διαφορετικές τιμές του χρόνου, έστω t_1 και t_2, παρατηρούμε ότι η $\psi(x,t)$ έχει την ίδια τιμή στο σημείο x_1 τη χρονική στιγμή t_1 με αυτήν που έχει στο σημείο x_2 τη χρονική στιγμή t_2, αν είναι $(x_1 - ct_1) = (x_2 - ct_2)$, δηλαδή για την ίδια τιμή του $u = x - ct$. Από τη σχέση $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$ προκύπτει ότι

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{4.11}$$

Επειδή σύμφωνα με την (4.11), με θετικό c, για $t_2 > t_1$ θα είναι $x_2 > x_1$, συμπεραίνουμε ότι η λύση $\psi(x,t) = f_1(x - ct)$ παριστάνει μια διαταραχή που κινείται κατά μήκος του άξονα των x και προς τα θετικά x με ταχύτητα c. Ομοίως, μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση $\psi(x,t) = f_2(x + ct)$ παριστάνει μια διαταραχή που κινείται κατά μήκος του άξονα των x και προς τα αρνητικά x με ταχύτητα που έχει μέτρο ίσο με c.

4.2 Λύση της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών

Θα δοκιμάσουμε να βρούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Υποθέτουμε λύσεις της μορφής

$$\psi(x,t) = f(x)\cdot g(t) \tag{4.12}$$

όπου η f(x) είναι μια συνάρτηση του x μόνο και η g(t) είναι μια συνάρτηση του t μόνο. Αντικαθιστώντας στην Εξ.(4.1), έχουμε

$$g(t)\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x)}{c^2}\,\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \qquad \text{ή} \tag{4.13}$$

$$\frac{c^2}{f(x)}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{g(t)}\,\frac{d^2 g(t)}{dt^2}. \tag{4.14}$$

Στην Εξ.(4.14), μια συνάρτηση του x (αριστερά) είναι ίση με μια συνάρτηση του t (δεξιά) για όλες τις τιμές των x και t. Ο μόνος τρόπος για να συμβαίνει αυτό είναι και οι δύο συναρτήσεις να είναι ίσες με μια σταθερά, την οποία έστω ότι συμβολίζουμε με $-\omega^2$. Τότε θα είναι

$$\frac{c^2}{f(x)}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{g(t)}\,\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -\,\omega^2 \qquad \text{και επομένως}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\,f(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega^2\,g(t) = 0 \tag{4.15}$$

οι γενικές λύσεις των οποίων είναι:

$$f(x) = A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c} \tag{4.16}$$

και

$$g(t) = D\cos\omega t + E\sin\omega t \tag{4.17}$$

με A, B, D και E σταθερές. Επομένως, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$\psi(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c} \right)\left(D\cos\omega t + E\sin\omega t \right) \tag{4.18}$$

οι οποίες μπορούν και να αναπτυχθούν ως

$$\psi(x,t) = \alpha \cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t + b\cos\frac{\omega x}{c}\sin\omega t + p\sin\frac{\omega x}{c}\cos\omega t + q\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t. \tag{4.19}$$

Από τη σχέση (4.18) φαίνεται ότι οι λύσεις μπορούν να δοθούν επίσης στη μορφή

$$\psi(x,t) = H\cos\left(\frac{\omega x}{c} + \theta\right)\cos(\omega t + \phi) \tag{4.20}$$

όπου H, θ και φ είναι σταθερές. (Επαληθεύσετε).

Το γινόμενο συνημιτόνων στην Εξ.(4.20) μπορεί, με τη χρήση της ταυτότητας $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$, να μετατραπεί σε άθροισμα και έτσι,

$$\psi(x,t) = G\cos\left(\frac{\omega x}{c} - \omega t + \theta - \phi\right) + G\cos\left(\frac{\omega x}{c} + \omega t + \theta + \phi\right)$$

όπου $G = H/2$. Επειδή $\omega/c = 2\pi/\lambda$, και με $\theta - \phi = \phi_1$ και $\theta + \phi = \phi_2$, η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής:

$$\psi(x,t) = G\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{(x - ct)}_{\longrightarrow} + \phi_1\right) + G\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{(x + ct)}_{\longleftarrow} + \phi_2\right). \tag{4.21}$$

Η Εξ.(4.21) δείχνει ότι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν ώς άθροισμα δύο οδευόντων κυμάτων με ίσα πλάτη, ένα που κινείται προς τα θετικά x (ο πρώτος όρος του ψ(x,t) στην Εξ.(4.21)) και ένα που κινείται προς τα αρνητικά x (ο δεύτερος όρος). Τα κύματα αυτά είναι της μορφής $\psi(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$, όπως αναμενόταν.

Η γενική λύση για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελείται, γενικά, από ένα άθροισμα όρων σε μια από τις μορφές (4.18), (4.19), (4.20) ή (4.21), με τις σταθερές τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές και οι αρχικές συνθήκες.

Η ταχύτητα c ονομάζεται **ταχύτητα κύματος** ή **φασική ταχύτητα**. Αν, για ένα ημιτονικό κύμα, ορίσουμε τα μεγέθη

συχνότητα	ν
γωνιακή συχνότητα	$\omega = 2\pi\nu$
περίοδος	$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$
μήκος κύματος	$\lambda = \frac{c}{\nu}$
κυματικός αριθμός	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

τότε το κύμα, που υποθέτουμε ότι κινείται προς τα θετικά x, μπορεί να γραφεί σε μια από τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$\psi(x,t) = \alpha\sin(\omega t - kx) \tag{4.22}$$

$$\psi(x,t) = \alpha\sin\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{4.23}$$

$$\psi(x,t) = \alpha \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \qquad (4.24)$$

$$\psi(x,t) = \alpha \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \qquad (4.25)$$

$$\psi(x,t) = \alpha \sin [k (ct - x)] \qquad (4.26)$$

Το μέγεθος α ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης. Το όρισμα του ημιτόνου ονομάζεται **φάση** του κύματος και προφανώς εξαρτάται τόσο από τη θέση όσο και από το χρόνο. Στη φάση του κύματος μπορεί να προστεθεί μια σταθερά ϕ η οποία ονομάζεται **σταθερά φάσης**. Για παράδειγμα, αντί της (4.22) θα μπορούσαμε να έχουμε $\psi(x,t) = \alpha \sin (\omega t - kx + \phi)$. Αν το κύμα κινείται προς τα αρνητικά x, το πρόσημο στο όρισμα του ημιτόνου στις Εξ.(4.22) – (4.26) θα είναι $+$ αντί του $-$. Ανάλογες παραστάσεις μπορούν να γραφούν και για συνημιτονικά κύματα.

Η χρήση λύσεων ημιτονοκής ή συνημιτονικής μορφής σε αντίθεση με άλλες δυνατές μορφές υπαγορεύεται από ένα αριθμό σημαντικών λόγων:

1. Γραμμικές πράξεις επί των ημιτονικών συναρτήσεων, όπως είναι η πρόσθεση, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση, έχουν ως αποτέλεσμα ημιτονικές επίσης συναρτήσεις της ίδιας περιόδου (ή συχνότητας), με μοναδικές ενδεχόμενες μεταβολές στο πλάτος ή τη φάση.

2. Στη διάδοση ενός κύματος σε ένα μέσον χωρίς απώλειες, παρατηρείται ότι ένα ημιτονικό κύμα διατηρεί το σχήμα του και έχει ταχύτητα η οποία μπορεί να εξαρτάται από τη συχνότητά του. Ακόμη και σε μέσα όπου υπάρχει απώλεια ενέργειας, η επίδραση στο ημιτονικό κύμα είναι η μεταβολή του πλάτους του συναρτήσει της θέσης, ενώ η συχνότητά του παραμένει αμετάβλητη.

3. Οι πηγές κυμάτων που παρατηρούνται στη φύση συνήθως έχουν μια περιοδικότητα και έτσι εκπέμπουν περιοδικά κύματα. Η απλούστερη μορφή περιοδικού κύματος είναι η ημιτονική.

4. Είναι μαθηματικώς δυνατόν κάθε περιοδικό κύμα να αναλυθεί σε συνιστώσες ημιτονικής και συνημιτονικής μορφής. Η ανάλυση αυτή, γνωστή ως **ανάλυση Fourier**, οδηγεί σε σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων με κατάλληλα πλάτη το καθένα και με περιόδους στο χρόνο ή στο χώρο που είναι υποπολλαπλάσια της περιόδου του κύματος. Οι σειρές αυτές, που ονομάζονται **σειρές Fourier**, έχουν, γενικά, άπειρους όρους, η επαλληλία των οποίων μπορεί να προσεγγίσει το κύμα με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Η ανάλυση είναι δυνατόν να επεκταθεί ακόμη και σε μη περιοδικά κύματα μέσω των **ολοκληρωμάτων Fourier**.

Όλοι αυτοί οι λόγοι κάνουν τη γνώση της συμπεριφοράς των κυμάτων ημιτονικής μορφής εξαιρετικά χρήσιμη.

4.3 Μιγαδικός συμβολισμός αρμονικών κυμάτων

Στην μαθηματική περιγραφή ενός κύματος, χρησιμοποιείται η σύμβαση του μιγαδικού συμβολισμού που αναπτύχθηκε στο Κεφ.1.

Έτσι, αντί της λύσης $\psi(x,t) = \alpha \cos (\omega t - kx + \phi)$ της κυματικής εξίσωσης, μπορούμε να γράψουμε

$$\psi(x,t) = \alpha \operatorname{Re} e^{i(\omega t - kx + \phi)}. \qquad (4.29)$$

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι να παραλείπεται το σύμβολο Re, να δίνεται το κύμα ως

$$\psi(x,t) = \alpha\, e^{i(\omega t - kx + \phi)} \tag{4.30}$$

και να υπονοείται ότι θα πάρουμε το πραγματικό μέρος της συνάρτησης ως λύση.

Δεχόμαστε επίσης ότι το πλάτος μπορεί να είναι μιγαδικό και έτσι αν

$$A = \alpha\, e^{i\phi} \tag{4.31}$$

τότε

$$\psi(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)}. \tag{4.32}$$

Μπορούμε έτσι να ενσωματώσουμε τη σταθερά φάσης στο μιγαδικό πλάτος.

Με τις συμβάσεις αυτές, έχουμε την ισοδυναμία:

$$\psi(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)} \longleftrightarrow \psi(x,t) = \alpha \cos(\omega t - kx + \phi). \tag{4.33}$$

Η επαλληλία κυμάτων, καθώς και η παραγώγιση ή ολοκλήρωση της $\psi(x,t)$, είναι πράξεις που μπορούν να εκτελεσθούν και στις δύο μορφές της (4.33) για την $\psi(x,t)$ με ταυτόσημα αποτελέσματα στο τέλος, όταν πάρουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί όταν υπολογίζουμε μεγέθη που δεν έχουν γραμμική εξάρτηση από το $\psi(x,t)$, όπως π.χ. το ψ^2, ή τα $(\partial\psi/\partial x)^2$ και $(\partial\psi/\partial t)^2$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα μεγέθη αυτά πρέπει να υπολογίζονται αφού ανακτηθεί το πραγματικό μέρος της λύσης.

Τα πλεονεκτήματα του μιγαδικού συμβολισμού οφείλονται στην ευκολία με την οποία μπορούμε να συμπεριλάβουμε σταθερές φάσεις στις λύσεις, πράγμα που κάνει δυνατό τον ορισμό μεγεθών όπως η σύνθετη αντίσταση, στην οποία οι μεταβολές φάσης ενσωματώνονται με πολύ απλό τρόπο. Οι μαθηματικές ευκολίες στο χειρισμό εκθετικών συναρτήσεων, σε σύγκριση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι επίσης ένα πλεονέκτημα.

4.4 Οριακές συνθήκες για εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής

Για τη διατύπωση των οριακών συνθηκών στην περίπτωση εγκαρσίων ταλαντώσεων σε χορδή η οποία είναι τεντωμένη με δύναμη T, χρησιμοποιούμε τα εξής δεδομένα για το γενικό σημείο x της χορδής:

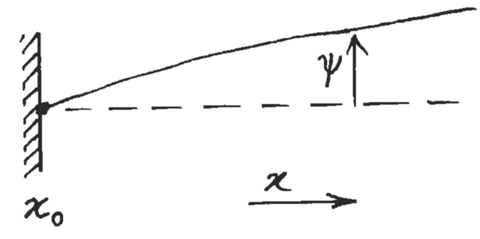
Εγκάρσια μετατόπιση της χορδής:	$\psi(x,t)$
Κλίση της χορδής:	$\frac{\partial\psi}{\partial x}$
Εγκάρσια δύναμη που ασκείται από τη χορδή στα αριστερά, πάνω στη χορδη στα δεξια του σημειου στο x:	$-T\frac{\partial\psi}{\partial x}$
Εγκάρσια ταχύτητα της χορδής:	$\frac{\partial\psi}{\partial t}$
Εγκάρσια επιτάχυνση της χορδής:	$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

Οι συνηθέστερες οριακές συνθήκες που συναντά κανείς στην πράξη είναι οι ακόλουθες:

1. Ακίνητο σημείο

Αν το σημείο της χορδής στο σημείο $x = x_0$ είναι ακίνητο για κάθε χρονική στιγμή, τότε

$$\psi(x_0,t) = 0 \qquad (4.34)$$



Το ένα ή και τα δύο άκρα μιας χορδής (στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, π.χ.) μπορούν να είναι ακίνητα, οπότε

$\psi(0,t) = 0$ ή $\psi(L,t) = 0$.

2. Ασυνέχεια στη χορδή: Σημειακή μάζα

Αν στο σημείο $x = x_0$ υπάρχει στερεωμένη στη χορδή μια σημειακή μάζα m, και η μετατόπιση της χορδής στα αριστερά της μάζας είναι $\psi_1(x,t)$ και στα δεξιά είναι $\psi_2(x,t)$ τότε θα έχουμε δύο οριακές συνθήκες:

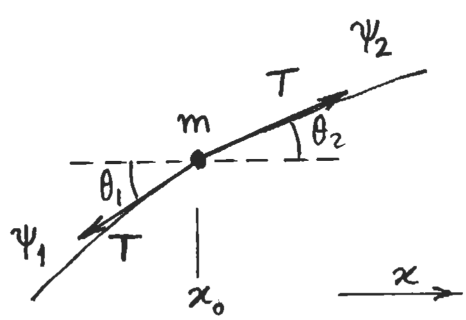
(α) Συνέχεια της χορδής στο σημείο $x = x_0$

$$\psi_1(x_0,t) = \psi_2(x_0,t) \qquad (4.35)$$

(β) Εξίσωση κίνησης της μάζας

Αν η χορδή σχηματίζει γωνίες θ_1 και θ_2 με τον άξονα των x, αριστερά και δεξιά της μάζας αντίστοιχα, τότε η εγκάρσια δύναμη που ασκεί η χορδή πάνω στη μάζα είναι:

$$F_y = T \sin\theta_2 - T \sin\theta_1.$$



Για μικρές γωνίες θ_1 και θ_2, ισχύει προσεγγιστικά:

$$\sin\theta_1 \simeq \tan\theta_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \qquad \sin\theta_2 \simeq \tan\theta_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}$$

και επομένως, $$F_y = T\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x_0,t} - T\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x_0,t}.$$

Η εγκάρσια μετατόπιση της μάζας είναι $\psi_m(t) = \psi_1(x_0,t) = \psi_2(x_0,t)$

και η εγκάρσια επιτάχυνσή της είναι $\left.\frac{d^2\psi_1}{dt^2}\right|_{x_o,t} = \left.\frac{d^2\psi_2}{dt^2}\right|_{x_o,t}$.

Η εξίσωση κίνησης της μάζας και επομένως η δεύτερη οριακή συνθήκη είναι:

$$m \left.\frac{d^2\psi_1}{dt^2}\right|_{x_o,t} = m \left.\frac{d^2\psi_2}{dt^2}\right|_{x_o,t} = T \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x_o,t} - T \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x_o,t}. \qquad (4.36)$$

Αν οι γραμμικές πυκνότητες στα δύο μέρη της χορδής διαφέρουν, τότε και οι ταχύτητες των εγκαρσίων κυμάτων στα δύο μέρη θα διαφέρουν και αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη.

3. Ασυνέχεια στη χορδή: Μεταβολή στην πυκνότητα

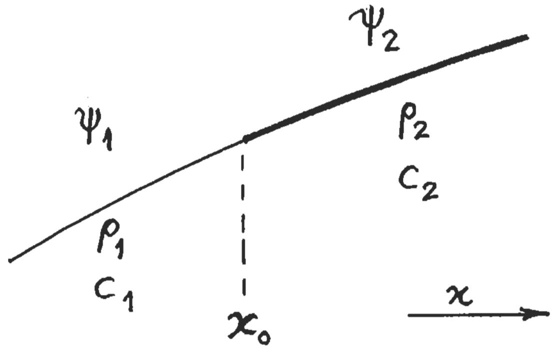
Η περίπτωση αυτή είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης, όταν $m \longrightarrow 0$. Επομένως οι δύο οριακές συνθήκες προκύπτουν από τις Εξ.(4.35) και (4.36) και είναι:

Συνέχεια της χορδής:

$$\psi_1(x_0,t) = \psi_2(x_0,t) \qquad (4.37)$$

Συνέχεια της κλίσης της χορδής:

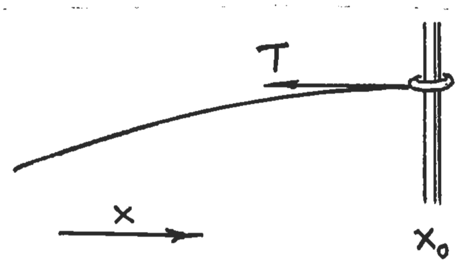
$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x_o,t} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x_o,t} \qquad (4.38)$$



Βεβαίως, οι ταχύτητες διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στα δύο μέρη της χορδής διαφέρουν στην περίπτωση αυτή.

4. Ελεύθερο άκρο

Ελεύθερο άκρο θεωρείται ένα άκρο της χορδής όπου δεν ασκείται εγκάρσια δύναμη. Η τάση T στη χορδή εξακολουθεί να ασκείται, ώστε οι εγκάρσιες ταλαντώσεις να είναι δυνατές. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι μέσω του μηχανισμού που φαίνεται στο σχήμα, με έναν αβαρή δακτύλιο να είναι συνδεδεμένος στο "ελεύθερο" άκρο της χορδής, που το υποχρεώνει να κινείται μόνο εγκαρσίως χωρίς τριβές.



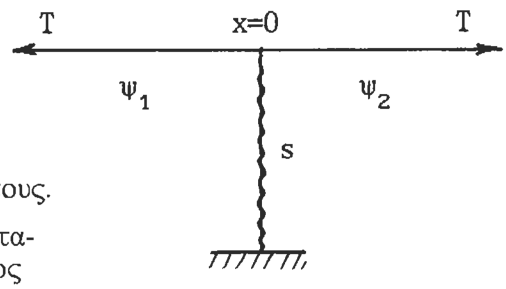
Αν το ελεύθερο άκρο βρίσκεται στο σημείο $x = x_0$, τότε, η εγκάρσια δύναμη $F_y = -T \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_o,t}$ που ασκεί η χορδή που βρίσκεται στα αριστερά του σημείου $x = x_0$ μηδενίζεται. Έτσι, η οριακή συνθήκη στο ελεύθερο άκρο είναι:

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x_o,t} = 0. \tag{4.39}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της χορδής μηδενίζεται στο ελεύθερο άκρο και η χορδή είναι παράλληλη με τον άξονα των x.

Παράδειγμα 4.1

Μια χορδή βρίσκεται υπό τάση T, έχει πυκνότητα ανά μονάδα μήκους ρ και εκτείνεται σε όλο το μήκος του άξονα x. Στο σημείο x=0 είναι συνδεδεμένη με ελατήριο σταθεράς s, το οποίο είναι κάθετο στη χορδή. Το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke και έχει το φυσικό του μήκος όταν η χορδή είναι ευθύγραμμη, σε ακινησία. Η χορδή εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους στο επίπεδο που ορίζεται από αυτήν και το ελατήριο.



(α) Να βρεθούν οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούνται στο σημείο x=0.

(β) Αν ένα οδεύον κύμα $\psi_i = A\ e^{i(\omega t-kx)}$ προσπίπτει στο σημείο x=0, να βρεθούν οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης πλάτους.

(γ) Στο σημείο x=0, σε ποια συχνότητα το μεταδιδόμενο κύμα προηγείται του προσπίπτοντος σε φάση κατά $\pi/4$;

(δ) Αν το προσπίπτον κύμα είναι $\psi_i = A\cos(\omega t - kx)$, ποιο είναι το μεταδιδόμενο κύμα στη συχνότητα ω' που βρέθηκε στο ερώτημα (γ);

Έστω ότι ψ_1 και ψ_2 είναι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις της χορδής για $x<0$ και $x>0$ αντίστοιχα (θετικές προς τα πάνω στο σχήμα).

(α) Οι οριακές συνθήκες προκύπτουν από τη συνέχεια της χορδής και την ισορροπία των εγκαρσίων δυνάμεων στο σημείο x=0:

συνέχεια χορδής: $\quad \psi_1\big|_{x=0} = \psi_2\big|_{x=0}$

ισορροπία δυνάμεων: $\quad -T\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} + T\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} - s\ \psi_1\big|_{x=0} = 0.$

(β) Τα κύματα στη χορδή είναι:

προσπίπτον κύμα: $\quad \psi_i = A\ e^{i(\omega t-kx)}$

ανακλώμενο κύμα: $\quad \psi_r = B\ e^{i(\omega t+kx)}$

μεταδιδόμενο κύμα: $\quad \psi_t = C\ e^{i(\omega t-kx)}$

Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις είναι επομένως: $\psi_1 = \psi_i + \psi_r$ και $\psi_2 = \psi_t$.

Οι δύο οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$ δίνουν τις σχέσεις:

$$A + B = C$$

$$T\,[(-\,ikC) - (-\,ikA + ikB)] = sC \qquad ή \qquad A - B - C = -\frac{is}{kT}\,C.$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις μπορούν να γραφτούν ως

$$1 + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \qquad και \qquad 1 - \frac{B}{A} = \left(1 - \frac{is}{kT}\right)\frac{C}{A}.$$

οι οποίες δίνουν

$$\frac{B}{A} = \frac{i\,\frac{s}{2kT}}{1 - i\,\frac{s}{2kT}} \qquad και \qquad \frac{C}{A} = \frac{1}{1 - i\,\frac{s}{2kT}}.$$

Επειδή $kT = \omega\rho c = \omega Z$, βρίσκουμε:

συντελεστής ανάκλασης πλάτους: $\frac{B}{A} = \frac{is}{2\omega Z - is}$

συντελεστής διάδοσης πλάτους: $\frac{C}{A} = \frac{2\omega Z}{2\omega Z - is}$.

(γ) Ο συντελεστής διάδοσης πλάτους μπορει να γραφτεί ως:

$$T_{\pi\lambda} = \frac{C}{A} = 2\omega Z\,\frac{2\omega Z + is}{4\omega^2 Z^2 + s^2} = |T_{\pi\lambda}|\,e^{i\phi}$$

και επομένως: $|T_{\pi\lambda}|\cos\phi = \frac{4\omega^2 Z^2}{4\omega^2 Z^2 + s^2}$ και $|T_{\pi\lambda}|\sin\phi = \frac{2\omega s Z}{4\omega^2 Z^2 + s^2}$.

$$|T_{\pi\lambda}|^2 = \frac{16\omega^4 Z^4 + 4\omega^2 s^2 Z^2}{\left(4\omega^2 Z^2 + s^2\right)^2} \qquad ή \qquad |T_{\pi\lambda}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\omega Z}\right)^2}}.$$

και $\tan\phi = \frac{s}{2\omega Z}$.

Επειδή $\psi_i(x,t) = A\,e^{i(\omega t - kx)}$ και

$$\psi_t(x,t) = C\,e^{i(\omega t - kx)} \qquad ή \qquad \psi_t(x,t) = A\,|T_{\pi\lambda}|\,e^{i(\omega t - kx + \phi)},$$

στο σημείο $x=0$, το μεταδιδόμενο κύμα προηγείται του προσπίπτοντος σε φάση κατά $\phi = \pi/4$ όταν $\tan\phi = 1$. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\frac{s}{2\omega Z} = 1, \qquad \text{στη συχνότητα} \qquad \omega' = \frac{s}{2Z} = \frac{s}{2\varrho c}.$$

(δ) Στη συχνότητα ω', ο συντελεστής διάδοσης πλάτους έχει τιμή ίση με

$$\frac{C}{A} = |T_{\pi\lambda}|\ e^{i\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}(1 + i)$$

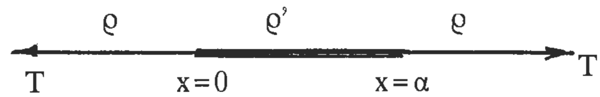
και το μεταδιδόμενο κύμα είναι: $\psi_t = C\ e^{i(\omega' t - kx)} = A\ e^{i(\omega' t - kx + \pi/4)}$.

Αν το προσπίπτον κύμα είναι $\psi_i = A \cos(\omega' t - kx)$, τότε το μεταδιδόμενο κύμα θα είναι: $\psi_t = A \cos(\omega' t - kx + \pi/4)$.

Παράδειγμα 4.2

Χορδή εκτείνεται μεταξύ $x=-\infty$ και $x=+\infty$ και βρίσκεται υπό τάση T. Η χορδή έχει πυκνότητα ανά μονάδα μήκους ίση με ϱ παντού, εκτός από το τμήμα μεταξύ $x=0$ και $x=\alpha$ όπου η πυκνότητα είναι ίση με ϱ'.

Οδεύον κύμα $\psi(x,t) = A \exp[i(\omega t - kx)]$ κινείται στη χορδή από τα αριστερά.



Να αποδειχθεί ότι: για να μην υπάρχει ανάκλαση στο σημείο $x=0$, θα πρέπει το μήκος α να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda'/2$, όπου λ' είναι το μήκος κύματος του οδεύοντος κύματος στο τμήμα $0 < x < \alpha$ της χορδής.

Αν δεν υπάρχει ανάκλαση στο σημείο $x=0$, τα κύματα στις τρεις περιοχές είναι:

$$\psi_1(x,t) = A\ e^{\underrightarrow{i(\omega t - kx)}}$$

$$\psi_2(x,t) = B\ e^{\underrightarrow{i(\omega t - k'x)}} + C\ e^{\underleftarrow{i(\omega t + k'x)}}$$

$$\psi_3(x,t) = D\ e^{\underrightarrow{i(\omega t - kx)}}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ και $k' = 2\pi/\lambda'$.

Οι οριακές συνθήκες στα σημεία $x=0$ και $x=\alpha$ είναι:

Συνέχεια του ψ:

$$x=0: \qquad A = B + C$$

$$x=\alpha: \qquad B\ e^{-ik'\alpha} + C\ e^{ik'\alpha} = D\ e^{-ik\alpha}.$$

Συνέχεια του $\partial\psi/\partial x$:

$$x=0: \qquad -ikA = -ik'B + ik'C$$

$$x=\alpha: \qquad -ik'B\, e^{-ik'\alpha} + ik'C\, e^{ik'\alpha} = -ikD\, e^{-ik\alpha}.$$

Επομένως, από τις σχέσεις για x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} B + C = A \\ B - C = \dfrac{k}{k'} A \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} B = \dfrac{A}{2}\left(1 + \dfrac{k}{k'}\right) = A\,\dfrac{k'+k}{2k'} \\ C = \dfrac{A}{2}\left(1 - \dfrac{k}{k'}\right) = A\,\dfrac{k'-k}{2k'} \end{array}$$

και από τις σχέσεις για x = α:

$$\left.\begin{array}{r} B + C\, e^{2ik'\alpha} = D\, e^{i(k'-k)\alpha} \\ \dfrac{k'}{k}\left(B - C\, e^{2ik'\alpha}\right) = D\, e^{i(k'-k)\alpha} \end{array}\right\}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\quad k\left(B + C\, e^{2ik'\alpha} \right) = k'\left(B - C\, e^{2ik'\alpha} \right).$

ή, τελικά: $\quad (k'-k)\, B = (k + k')\, C\, e^{2ik'\alpha}.$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των B και C,

$$(k'-k)(k+k') = (k'-k)(k+k')\, e^{2ik'\alpha} \qquad ή$$

$$e^{2ik'\alpha} = 1, \qquad δηλαδή \qquad \cos(2k'\alpha) + i\,\sin(2k'\alpha) = 1.$$

Επομένως, $\quad \cos(2k'\alpha) = 1 \quad$ και $\quad \sin(2k'\alpha) = 0.$

Οι δύο αυτές εξισώσεις ικανοποιούνται για $\quad 2k'\alpha = 2n\pi \qquad n = 0,1,2,3,...$

δηλαδή $\quad \alpha = n\,\dfrac{\pi}{k'} = n\,\dfrac{\pi\lambda'}{2\pi} \quad$ ή $\quad \alpha = n\,\dfrac{\lambda'}{2} \qquad n = 0,1,2,3,...$

Στην περίπτωση αυτή βρίσκεται ότι το πλάτος του μεταδιδόμενου κύματος είναι:

$$D = A\,\exp\left\{i\left(\frac{k}{k'} - 1\right)\frac{n\pi}{2}\right\}.$$

Από την τιμή του D, φαίνεται ότι το μεταδιδόμενο κύμα έχει το ίδιο πλάτος $|D| = |A|$ με το προσπίπτον, αλλά προηγείται αυτού σε φάση κατά

$$\left(\frac{k}{k'} - 1\right)\frac{n\pi}{2} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1\right)\frac{n\pi}{2} = \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}} - 1\right)\frac{n\pi}{2}.$$

Προβλήματα

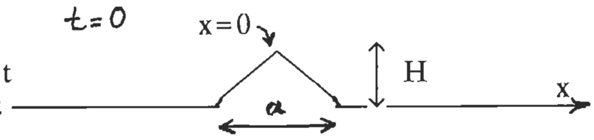
Προβλήματα από Pain: 4.5, 4.6, 4.7, 4.11, 4.12, 4.13, 4.19.

4.1 Τεντωμένη χορδή που εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις, είναι αρχικά ακίνητη και έχει αρχική εγκάρσια μετατόπιση που δίνεται ως συνάρτηση της θέσης από τη γνωστή συνάρτηση $y(x,0) = f(x)$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η χορδή αφήνεται ελεύθερη να εκτελέσει εγκάρσιες ταλαντώσεις.

(α) Δείξετε ότι η κίνηση της χορδής που επακολουθεί δίνεται από την παράσταση

$$y(x,t) = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct).$$

(β) Αν το αρχικό σχήμα της χορδής είναι αυτό του σχήματος, σχεδιάστε την κυματομορφή στην κατοπινή στιγμή t. Σημειώστε στο σχήμα όλα τα σχετικά μεγέθη.



4.2 Χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ βρίσκεται υπό τάση T. Το άκρο της στο σημείο $x=0$ διατηρείται ακίνητο ενώ το άκρο στο $x=L$ είναι ελεύθερο να κινείται εγκαρσίως χωρίς να ασκεί εγκάρσια δύναμη. Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και οι κανονικές συχνότητες της χορδής.

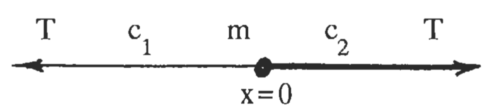
Απ.: $\psi_n = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$ $\quad \omega_n = (2n-1)\pi c/2L \quad (n = 1,2,3,...)$.

4.3 Χορδή με ολική μάζα m και μήκος L βρίσκεται υπό τάση T. Το άκρο της στο σημείο $x=0$ είναι ακίνητο. Στο άκρο $x=L$ υπάρχει σημειακή μάζα M που μπορεί να κινείται μόνο εγκαρσίως. Να αποδειχθεί ότι οι κανονικές συχνότητες της χορδής δίνονται από τις ρίζες της εξίσωσης $kL \tan kL = m/M$.

Να βρεθούν προσεγγιστικά (με αριθμητική ή γραφική μέθοδο), οι ρίζες της εξίσωσης $\cot\theta = \alpha\theta$ για κάποια τιμή του α (π.χ. $\alpha=1$) και έτσι οι επιτρεπτές τιμές του $k_n L$ για αυτή την τιμή του α.

Απ.: Οι ρίζες της $\cot\theta = \theta$ είναι: $\theta_1 = 0{,}86033$ $\quad \theta_2 = 3{,}42562$ $\quad \theta_3 = 6{,}43730$ $\quad \theta_4 = 9{,}52933$ .... στις οποίες αντιστοιχούν οι κανονικοί τρόποι με μήκη κύματος $\lambda_1 = 7{,}303\ L$ $\quad \lambda_2 = 1{,}834\ L$ $\quad \lambda_3 = 0{,}9760\ L$ $\quad \lambda_4 = 0{,}6594\ L$ ... .

4.4 Δύο χορδές είναι τεντωμένες με τάση T και συνδέονται με σημειακή μάζα m στο σημείο $x=0$. Η μία χορδή εκτείνεται από $x=-\infty$ μέχρι $x=0$ και σε αυτήν η ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων είναι c_1. Η άλλη εκτείνεται από από $x=0$ μέχρι $x=+\infty$ και έχει ταχύτητα εγκαρσίων κυμάτων c_2.

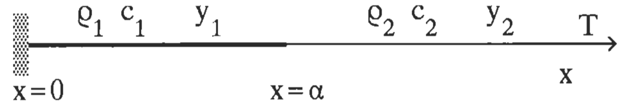


Εγκάρσιο κύμα $\psi_i = A \exp[i(\omega t - k_1 x)]$ κινείται στην αριστερή χορδή. Αν το μεταδιδόμενο στην άλλη χορδή κύμα έχει πλάτος με μέτρο ίσο με αυτό του προσπίπτοντος και υστερεί σε φάση ως προς αυτό κατά φ στο σημείο $x = 0$, να βρεθεί ο λόγος c_1/c_2 συναρτήσει του φ.

Απ.: $c_1/c_2 = 2\cos\phi - 1$.

4.5 Χορδή εκτείνεται μεταξύ $x = 0$ και $x = +\infty$ και βρίσκεται υπό τάση T. Η πυκνότητα ανά μονάδα μήκους της χορδής είναι ίση με ϱ_1 για $x < \alpha$ και ϱ_2 για $x > \alpha$. Το άκρο στο $x = 0$ είναι ακίνητο. Οδεύον εγκάρσιο κύμα μικρού πλάτους,

$$y_i(x,t) = A\, e^{i(\omega t + k_2 x)},$$



κινείται στο τμήμα $x > \alpha$ της χορδής, προς το σημείο $x = 0$. Η γωνιακή συχνότητα ω είναι τέτοια ώστε η μετατόπιση στο σημείο $x = \alpha$ να είναι ίση με μηδέν.

(α) Βρείτε την κίνηση στα δύο τμήματα της χορδής, $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$, στη μόνιμη κατάσταση. Δείξετε ότι δημιουργούνται στάσιμα κύματα.

(β) Ποια είναι η μορφή των λύσεων αν το προσπίπτον κύμα είναι $y_i(x,t) = A\cos(\omega t + k_2 x)$;

4.6 Η διαταραχή $\psi(x,t)$ σε ένα συνεχές μέσον ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + b\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{με } b \text{ και } c \text{ θετικές σταθερές.}$$

(α) Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $\psi(x,t) = A \exp i(\omega t-\gamma x)$ όπου ω και γ είναι θετικές σταθερές, και ότι $\gamma = k - i\alpha$ με $k >> \alpha$, προσδιορίστε τις παραμέτρους k και α.

(β) Πώς ερμηνεύεται η μορφή που έχουν οι λύσεις $\psi(x,t)$ και ποια είναι η φυσική σημασία των παραμέτρων k και α;

(γ) Αν η μέση ως προς τον χρόνο πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου, για ημιτονικό κύμα πλάτους a, είναι $\varepsilon = (1/2)\rho\omega^2 a^2$ (ρ = πυκνότητα του μέσου), να βρεθούν, για το κύμα $\psi(x,t)$ του μέρους (α):

(i) η μέση πυκνότητα ενέργειας $\varepsilon(x)$,
(ii) η μέση ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, και
(iii) ο μέσος ρυθμός απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου.

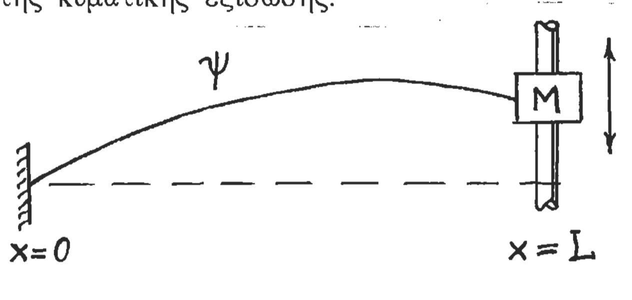
Απ.: (α) $k = \omega/c$, $\alpha = cb/2$

(γ) (i) $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 e^{-2\alpha x}$, (ii) $w(x) = \varepsilon(x)c$, (iii) $\frac{dw}{dx} = -\alpha c\rho\omega^2 A^2 e^{-2\alpha x}$.

4.7 Μια χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ βρίσκεται υπό τάση T και εκτελεί μικρού πλάτους εγκάρσιες ταλαντώσεις με μετατόπιση $\psi(x,t)$.

(α) Επιβεβαιώστε ότι συναρτήσεις της μορφής $\psi(x,t) = A\sin(kx+\theta)\sin(\omega t+\phi)$ με σταθερά A, ϕ και θ, είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

(β) Η χορδή έχει μήκος L και ολική μάζα m και το άκρο της στο σημείο $x=0$ είναι ακίνητο ενώ το άλλο άκρο της στο σημείο $x=L$ είναι συνδεδεμένο με μάζα M η οποία μπορεί να κινείται εγκαρσίως χωρίς τριβές.



Δείξετε ότι οι συχνότητες τωνκανονικών τρόπων ταλάντωσης τηςχορδής δίνονται από τις λύσεις της υπερβατικής εξίσωσης $\left(\frac{\omega L}{c}\right) \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{m}{M}$.

4.8 Χορδή μήκους $2L$ και ολικής μάζας m είναι τεντωμένη με τάση T και έχει ακίνητα τα δύο της άκρα. Αν στο μέσο της χορδής υπάρχει σημειακή μάζα M, να βρεθεί η εξίσωση που δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων της χορδής.

Απ.: $\left(\frac{\omega L}{c}\right) \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{m}{M}$.

4.9 Χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ϱ είναι τεντωμένη με τάση T και έχει ακίνητα τα δύο της άκρα. Στο σημείο που απέχει απόσταση α από το αριστερό άκρο και b από το δεξιό άκρο της χορδής, ασκείται εγκάρσια δύναμη ίση με $F_0 \sin\beta t$. Να βρεθεί η κίνηση της χορδής στη μόνιμη κατάσταση. Τι συμβαίνει, σύμφωνα με τη λύση που βρέθηκε, όταν η β είναι ίση με τη συχνότητα ενός από τους κανονικούς τρόπους της χορδής;

Απ.: $$\psi_1(x,t) = \frac{F_0}{\varrho c\beta} \frac{\sin\frac{\beta b}{c}}{\sin\frac{\beta L}{c}} \sin\frac{\beta x}{c} \sin\beta t \qquad \text{για} \qquad 0 \le x \le b,$$

$$\psi_2(x,t) = \frac{F_0}{\varrho c\beta} \frac{\sin\frac{\beta \alpha}{c}}{\sin\frac{\beta L}{c}} \sin\frac{\beta}{c}(L-x) \sin\beta t \qquad \text{για} \qquad b \le x \le L.$$

4.10 Μια χορδή αποτελείται από δύο τμήματα, με μήκη L_1 και L_2, και γραμμικές πυκνότητες ϱ_1 και ϱ_2 αντίστοιχα. Η χορδή είναι τεντωμένη με δύναμη T και έχει τα άκρα της ακίνητα. Δείξετε ότι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης

$$c_1 \tan\left(\frac{\omega L_1}{c_1}\right) + c_2 \tan\left(\frac{\omega L_2}{c_2}\right) = 0 \qquad \text{όπου} \qquad c_1 = \sqrt{T/\varrho_1} \qquad \text{και} \qquad c_2 = \sqrt{T/\varrho_2}.$$

4.11 Χορδή με μάζα ϱ ανά μονάδα μήκους είναι τεντωμένη με δύναμη T. Οταν εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, η χορδή υφίσταται δύναμη τριβής σε κάθε σημείο, η οποία, ανά μονάδα μήκους, είναι ίση με r φορές την ταχύτητα της χορδής. Βρείτε την κυματική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της χορδής. Δείξετε πως, αγνοόντας όρους με r^2 και ανώτερες δυνάμεις, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφτεί σε μια από τις ισοδύναμες μορφές:

$$\psi(x,t) = e^{-\alpha t} [f(x - ct) + F(x + ct)]$$

ή $$\psi(x,t) = e^{-\alpha x/c} g(x - ct) + e^{\alpha x/c} G(x + ct),$$

όπου $c = \sqrt{T/\varrho}$ και $\alpha = r/2\varrho$.

Απ.: $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{r}{T}\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

4.12 Έστω ότι εγκάρσιος παλμός σχήματος $\psi(x,t) = A\ e^{-(x-ct)^2/\alpha^2}$ κινείται με ταχύτητα c κατά μήκος τεντωμένης χορδής γραμμικής πυκνότητας ϱ. Η α είναι μια θετική σταθερά που καθορίζει το πλάτος του παλμού, ο οποίος έχει σχήμα γκαουσιανής. Να βρεθούν (α) η κινητική ενέργεια, Κ.Ε., (β) η δυναμική ενέργεια, Ρ.Ε., και (γ) η ολική ενέργεια, Ε, του παλμού.

Δίνονται: Για $(\beta > 0)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-p)^2/\beta}\, dz = \sqrt{\pi\beta}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\ e^{-(z-p)^2/\beta}\, dz = p\sqrt{\pi\beta} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} z^2\ e^{-(z-p)^2/\beta}\, dz = \sqrt{\pi\beta}\left(p^2 + \frac{\beta}{2}\right)$$

Απ.: $K.E. = P.E. = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}\ \frac{\varrho}{\alpha}\,(Ac)^2 \qquad E = \sqrt{\pi/2}\ \frac{\varrho}{\alpha}\,(Ac)^2.$

4.13 Αν μια κατακόρυφη χορδή γραμμικής πυκνότητας ϱ βρίσκεται υπό τάση που παρέχεται από το ίδιο της το βάρος, δείξετε ότι η κυματική εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = gx\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + g\,\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

όπου το x μετράται από το κατώτερο σημείο της χορδής, προς τα πάνω. Πώς τροποποιείται η εξίσωση αν συμπεριληφθεί και μια σταθερή δύναμη T που ασκείται προς τα κάτω στο κάτω άκρο της χορδής; Οι λύσεις αυτών των διαφορικών εξισώσεων δίνονται από σειρές συναρτήσεων Bessel.

Απ.: $\displaystyle\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(gx + \frac{T}{\varrho}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + g\,\frac{\partial\psi}{\partial x}.$