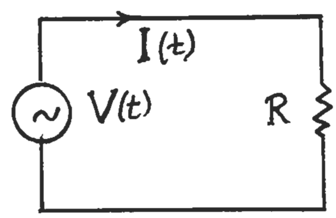
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

2.1 Σύνθετες αντιστάσεις των στοιχείων ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Θα υπολογίσουμε τις σύνθετες αντιστάσεις των βασικών στοιχείων (R, C, L) από τα οποία αποτελούνται τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιήσουμε μετά στη λύση προβλημάτων στα οποία ενδιαφερόμαστε να βρούμε τη μόνιμη κατάσταση για εναλλασσόμενες τάσεις και ρεύματα.

Ωμική αντίσταση. Η πτώση δυναμικού στα άκρα μιας αντίστασης που διαρρέεται από ρεύμα I είναι



$V_R = RI.$

Έτσι, σύμφωνα με τον νόμο του Kirchhoff, αν μια γεννήτρια τάσης V(t) βρίσκεται σε σειρά με την αντίσταση, θα ισχύει:

$$V(t) = RI(t). \qquad (2.1)$$

Για τάση $V = V_0 \cos\omega t$ το ρεύμα στην αντίσταση είναι $I = \frac{V_0}{R} \cos\omega t.$

Για $V = V_0 \sin\omega t$ είναι $I = \frac{V_0}{R} \sin\omega t.$

Μπορούμε να "αποθηκεύσουμε" και τις δύο αυτές σχέσεις στη δήλωση:

Για τάση $V = V_0 \cos\omega t + i V_0 \sin\omega t,$

το ρεύμα είναι $I = \frac{V_0}{R} \cos\omega t + i \frac{V_0}{R} \sin\omega t$

ή, ισοδύναμα:

Για τάση $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ρεύμα είναι $I = \frac{V_0}{R} e^{i\omega t}.$

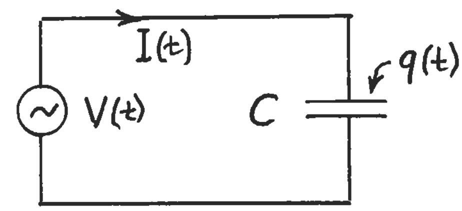
Εννοείται ότι στο πραγματικό μέρος της τάσης, $V_0 \cos\omega t$, αντιστοιχεί το πραγματικό μέρος του ρεύματος, $\frac{V_0}{R} \cos\omega t$, ενώ στο φανταστικό μέρος της τάσης, $V_0 \sin\omega t$, αντιστοιχεί το φανταστικό μέρος του ρεύματος, $\frac{V_0}{R} \sin\omega t$. Ο μιγαδικός συμβολισμός είναι επομένως, κατ' αρχήν, μια συντομογραφία των δύο σχέσεων.

Ο λόγος $\frac{V}{I}$ των μιγαδικών μεγεθών V και I ορίζεται γενικά ως η **σύνθετη αντίσταση Z** και στην περίπτωση αυτή είναι ίση με

$$Z_R = R, \tag{2.2}$$

δηλαδή μια πραγματική ποσότητα. Το γεγονός ότι η Z_R είναι πραγματική σημαίνει ότι το ρεύμα είναι σε φάση με την τάση.

Χωρητικότητα. Για ένα πυκνωτή χωρητικότητας C, η πτώση δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του είναι $V_C = \frac{q}{C}$. Επομένως, αν εφαρμοστεί τάση V(t) στα άκρα του πυκνωτή, ο νόμος του Kirchhoff δίνει: $V(t) = \frac{q(t)}{C}$. Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε τη σχέση:



$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}. \tag{2.3}$$

Επειδή το ρεύμα προς τον οπλισμό του πυκνωτή που έχει το φορτίο q είναι ίσο με $I = \frac{dq}{dt}$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$I = C\frac{dV}{dt}. \tag{2.4}$$

Για τάση $V = V_0 \cos\omega t$ το ρεύμα στον πυκνωτή είναι $I = -\omega C V_0 \sin\omega t$.

Για $V = V_0 \sin\omega t$ είναι $I = \omega C V_0 \cos\omega t$.

Μπορούμε να συνδυάσουμε και τις δύο αυτές σχέσεις στη δήλωση:

Για τάση $V = V_0 \cos\omega t + i\, V_0 \sin\omega t$, το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι

$I = -\omega C V_0 \sin\omega t + i\, \omega C V_0 \cos\omega t$ ή $I = i\omega C\, V_0(\cos\omega t + i \sin\omega t)$.

Ισοδύναμα:

Για τάση $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ρεύμα είναι $I = i\omega C\, V_0 e^{i\omega t}$.

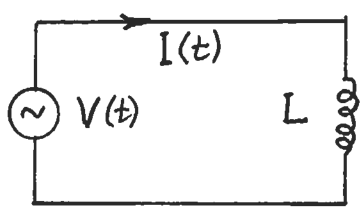
Και πάλι, στο πραγματικό μέρος της τάσης αντιστοιχεί το πραγματικό μέρος του ρεύματος και στο φανταστικό μέρος της τάσης αντιστοιχεί το φανταστικό μέρος του ρεύματος.

Η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι, σύμφωνα με τον ορισμό $Z = \frac{V}{I}$, ίση με

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \tag{2.5}$$

Παρατηρούμε ότι η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι καθαρά μιγαδική. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας στον πυκνωτή και ότι υπάρχει μια διαφορά φάσης μεταξύ της εφαρμοζόμενης τάσης και του ρεύματος που διαρρέει τον πυκνωτή, όπως θα δούμε και παρακάτω.

Αυτεπαγωγή. Σε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I(t), αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη ίση με $-L\frac{dI(t)}{dt}$. Επομένως, η πτώση δυναμικού στα



άκρα του πηνίου είναι ίση με $V_L = L\,\frac{dI}{dt}$.

Αν εφαρμοστεί τάση V(t) στα άκρα του πηνίου, ο νόμος του Kirchhoff δίνει:

$$V = L\,\frac{dI}{dt}. \tag{2.6}$$

Επομένως,

$$I(t) = \frac{1}{L}\int V(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Αν η τάση είναι $V = V_0\cos\omega t$, τότε το ρεύμα στο πηνίο θα είναι

$$I = \frac{1}{\omega L}\,V_0\sin\omega t,$$

όπου αγνοήσαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης γιατί μας ενδιαφέρει μόνο η χρονικά μεταβαλλόμενη τάση.

Για $V = V_0\sin\omega t$, είναι $I = -\frac{1}{\omega L}\,V_0\cos\omega t$.

Μπορούμε να συνδυάσουμε και τις δύο αυτές σχέσεις στη δήλωση:

Για τάση $V = V_0\cos\omega t + i\,V_0\sin\omega t$, το ρεύμα που διαρρέει την αυτεπαγωγή

είναι $I = \frac{1}{\omega L}\,V_0\sin\omega t - i\,\frac{1}{\omega L}\,V_0\cos\omega t$ ή $I = \frac{1}{i\omega L}\,V_0(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)$.

Ισοδύναμα:

Για τάση $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ρεύμα είναι $I = \frac{1}{i\omega L}\,V_0 e^{i\omega t}$.

Και πάλι, στο πραγματικό μέρος της τάσης αντιστοιχεί το πραγματικό μέρος του ρεύματος και στο φανταστικό μέρος της τάσης αντιστοιχεί το φανταστικό μέρος του ρεύματος.

Η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι, σύμφωνα με τον ορισμό $Z = \frac{V}{I}$, ίση με

$$Z_L = i\omega L. \tag{2.8}$$

Η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι επίσης καθαρά μιγαδική. Άρα, απώλεια ενέργειας δεν υπάρχει στο πηνίο και υπάρχει μια διαφορά φάσης μεταξύ της εφαρμοζόμενης τάσης και του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

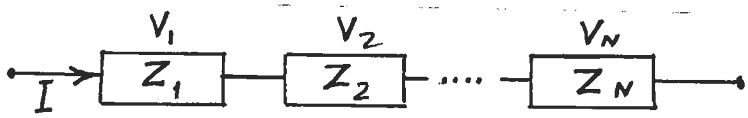
Βρήκαμε ότι οι σύνθετες αντιστάσεις μιας αντίστασης, ενός πυκνωτή και ενός πηνίου είναι, αντίστοιχα,

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad Z_L = i\omega L. \tag{2.9}$$

Το γεγονός ότι οι σχέσεις φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος στα τρία βασικά στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων εκφράζονται από τις σύνθετες αντιστάσεις τους με τόσο απλό τρόπο και το ότι από μαθηματικής άποψης είναι πολύ πιο εύκολος ο χειρισμός εκθετικών συναρτήσεων από ότι ο χειρισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων, κάνει τον μιγαδικό συμβολισμό πολύ χρήσιμο στην ανάλυση της μόνιμης κατάστασης σε ηλεκτρικά κυκλώματα αλλά και στα ισοδύναμα μηχανικά συστήματα.

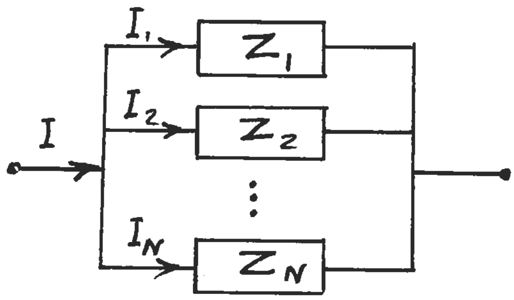
2.2 Συνδυασμός σύνθετων αντιστάσεων

Στο συνδυασμό σύνθετων αντιστάσεων ισχύουν οι γνωστές σχέσεις για τις ωμικές αντιστάσεις. Ετσι οι σύνθετες αντιστάσεις Z_1, Z_2,...Z_N, συνδεδεμένες σε σειρά, έχουν ολική σύνθετη αντίσταση ίση με



$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N. \qquad (2.10)$$

Για παράλληλη σύνδεση, η ολική σύνθετη αντίσταση Z δίνεται από τη σχέση



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... \frac{1}{Z_N}. \qquad (2.11)$$

Οι αποδείξεις είναι απλές. Για τη σύνδεση σε σειρά, το ίδιο ρεύμα I διαρρέει τις σύνθετες αντιστάσεις. Οι διαφορές δυναμικού στα άκρα των αντιστάσεων είναι $V_1 = Z_1 I$, $V_2 = Z_2 I$, ... $V_N = Z_N I$. Επειδή η ολική διαφορά δυναμικού στα άκρα του συνδυασμού είναι $V = V_1 + V_2 + ... + V_N$ έπεται ότι

$$V = (Z_1 + Z_2 + ... + Z_N)\ I$$

και η ολική σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N.$$

Για την παράλληλη σύνδεση, η διαφορά δυναμικού V στα άκρα των σύνθετων αντιστάσεων είναι η ίδια. Τα ρεύματα που διαρρέουν τις σύνθετες αντιστάσεις είναι

$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{V}{Z_2}, \quad ... \quad I_N = \frac{V}{Z_N}.$$

Το ολικό ρεύμα που διαρρέει τον συνδυασμό των αντιστάσεων είναι

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_N \qquad \text{και επομένως} \qquad I = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_N} \right) V$$

και η ολική σύνθετη αντίσταση είναι Z, όπου

$$\frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ... + \frac{1}{Z_N}.$$

2.3 Πολική μορφή της σύνθετης αντίστασης

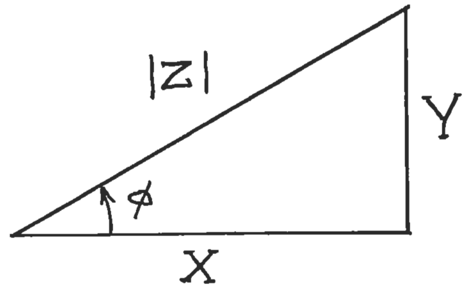
Μια σύνθετη αντίσταση $Z(\omega)$ είναι, γενικά, μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας και αποτελείται από ένα πραγματικό μέρος $X(\omega)$ και ένα φανταστικό μέρος $iY(\omega)$. Είναι δηλαδή

$$Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega) \qquad (2.12)$$

όπου οι $X(\omega)$ και $Y(\omega)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Μπορούμε να εκφράσουμε τη σύνθετη αντίσταση $Z = X + iY$ σε πολική μορφή ως

$$Z = |Z|\ e^{i\phi} \qquad (2.13)$$



όπου $|Z|$ είναι το μέτρο τής Z και ϕ η φάση της. Επειδή είναι

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\ \sin\phi,$$

προκύπτουν οι σχέσεις

$$Z = X + iY = |Z|\ e^{i\phi} = |Z|\ (\cos\phi + i\ \sin\phi)$$

$$X = |Z|\ \cos\phi \qquad Y = |Z|\ \sin\phi \qquad (2.14)$$

και επομένως

$$|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad \text{και} \qquad \tan\phi = \frac{Y}{X}. \qquad (2.15)$$

Η πολική μορφή της σύνθετης αντίστασης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάδειξη των σχέσεων φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος. Αν, για παράδειγμα, η τάση στα άκρα της σύνθετης αντίστασης είναι $V = V_0 e^{i\omega t}$ και η σύνθετη αντίσταση είναι $Z = |Z|\ e^{i\phi}$, τότε το ρεύμα που διαρρέει την Z δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0}{|Z|}\ e^{i(\omega t - \phi)} \qquad (2.16)$$

από την οποία φαίνεται ότι το ρεύμα υστερεί της τάσης κατά φάση ϕ. Η χρησιμότητα του μιγαδικού συμβολισμού είναι προφανής.

Οι ακόλουθες σχέσεις είναι επίσης χρήσιμες:

Επειδή $\quad e^{i\phi} = \cos\phi + i\ \sin\phi \quad$ και $\quad e^{i\pi/2} = i \quad e^{-i\pi/2} = -i = \frac{1}{i}$,

είναι:

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C}\ e^{-i\pi/2} \qquad Z_L = i\omega L = \omega L\ e^{i\pi/2}. \qquad (2.17)$$

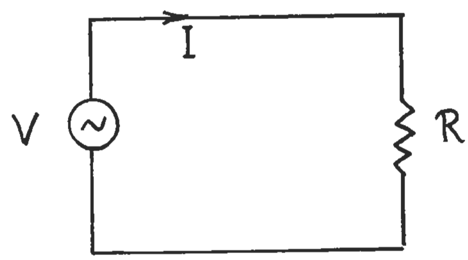
Με τους ορισμούς που δόθηκαν και τους κανόνες για τον υπολογισμό ολικών αντιστάσεων συνδυασμών για παράλληλες και σε σειρά συνδέσεις, είμαστε τώρα σε θέση να αναλύσουμε πολύπλοκα κυκλώματα. Επαναλαμβάνεται ότι η ανάλυση αυτή αναφέρεται στη μόνιμη κατάσταση για σήματα ημιτονικής ή συνημιτονικής μορφής. Μερικά απλά παραδείγματα θα δοθούν παρακάτω.

2.4 Χρήση της σύνθετης αντίστασης στη λύση προβλημάτων

Στα παραδείγματα που ακολουθούν η ασκούμενη τάση θα είναι $V = V_0 \cos\omega t$. Για το λόγο αυτό θα υποθέτουμε ότι $V = V_0 e^{i\omega t}$ και στο τέλος θα παίρνουμε το πραγματικό μέρος της λύσης. Αν είχαμε ημιτονική τάση, η μέθοδος θα ήταν η ίδια, αλλά στο τέλος θα παίρναμε το φανταστικό μέρος της λύσης.

Παράδειγμα 1

Για πληρότητα των αποτελεσμάτων θα εξετάσουμε και την πολύ απλή περίπτωση της αντίστασης R στην οποία ασκείται η τάση $V = V_0 \cos\omega t$, (βλ. Σχήμα).



Για τάση $V = V_0 e^{i\omega t}$, προκύπτει ότι

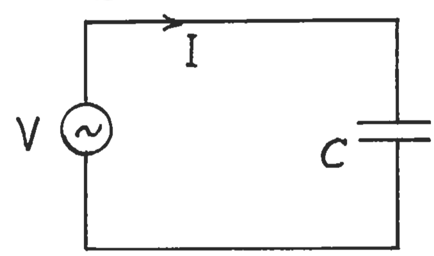
$$I = \frac{V}{Z_R} = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\, e^{i\omega t}.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης έχουμε τελικά:

$$I = \frac{V}{Z_R} = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos\omega t.$$

Παράδειγμα 2

Για πυκνωτή χωρητικότητας C και τάση $V = V_0 \cos\omega t$ στα άκρα του, υποθέτουμε ότι $V = V_0 e^{i\omega t}$ και επομένως



$$I = \frac{V}{Z_C} = \frac{V}{\frac{1}{i\omega C}} = i\omega C V.$$

Επειδή $i\omega C = \omega C\, e^{i\pi/2}$, προκύπτει ότι

$$I = \left(\omega C\, e^{i\pi/2}\right)\left(V_0 e^{i\omega t}\right) = \omega C V_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

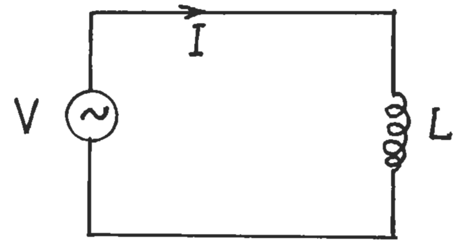
Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0 \cos\omega t$ είναι

$$I = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\,\omega C V_0 \sin\omega t$$

από όπου φαίνεται ότι το ρεύμα στον πυκνωτή προηγείται της ασκούμενης τάσης, σε φάση, κατά $\pi/2$.

Παράδειγμα 3

Για πηνίο αυτεπαγωγής L και τάση $V = V_0\cos\omega t$ στα άκρα του, υποθέτουμε ότι $V = V_0 e^{i\omega t}$ και επομένως



$$I = \frac{V}{Z_L} = \frac{V}{i\omega L}.$$

Επειδή $i\omega L = \omega L\, e^{i\pi/2}$, προκύπτει ότι

$$I = \left(\frac{1}{\omega L}\, e^{-i\pi/2}\right)\left(V_0 e^{i\omega t}\right) = \frac{V_0}{\omega L}\, e^{i(\omega t-\pi/2)}.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0\cos\omega t$ είναι

$$I = \frac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$$

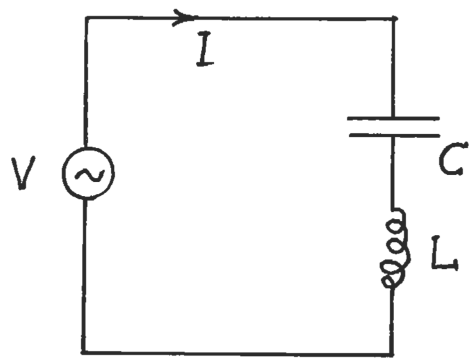
από όπου φαίνεται ότι το ρεύμα στο πηνίο υστερεί της ασκούμενης τάσης, σε φάση, κατά $\pi/2$.

Τα παραδείγματα που εξετάστηκαν είναι απλά. Ακολούθως θα εξετάσουμε πιο σύνθετα κυκλώματα, όπου θα φανεί καλύτερα η δύναμη της μεθόδου.

Παράδειγμα 4

Πυκνωτής χωρητικότητας C σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής L, με τάση $V = V_0\cos\omega t$ στα άκρα τους.

Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:



$$Z = Z_L + Z_C = i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) e^{i\pi/2}.$$

Επομένως, για $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ρεύμα είναι

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_0}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\, e^{i(\omega t-\pi/2)}.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0\cos\omega t$ είναι

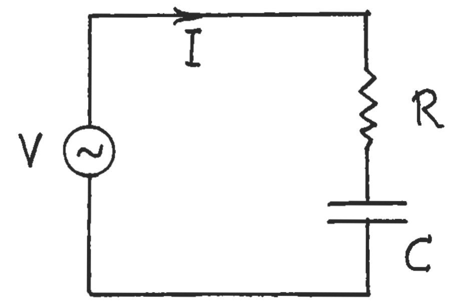
$$I = \frac{V_0}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\sin\omega t$$

από όπου φαίνεται ότι το ρεύμα υστερεί της ασκούμενης τάσης, σε φάση, κατά $\pi/2$ όταν $\omega > 1/\sqrt{LC}$, και προηγείται κατά $\pi/2$ όταν $\omega < 1/\sqrt{LC}$. Για $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ παρατηρείται συντονισμός και $I \longrightarrow \infty$.

Για $L \longrightarrow 0$ το αποτέλεσμα ανάγεται σε αυτό του Παραδ.2, ενώ για $C \longrightarrow \infty$ (βραχυκυκλωμένος πυκνωτής), έχουμε το αποτέλεσμα του Παραδ.3.

Παράδειγμα 5

Αντίσταση R σε σειρά με πυκνωτή χωρητικότητας C, με τάση $V = V_0 \cos\omega t$ στα άκρα τους. Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:



$$Z = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C}.$$

Επειδή

$$Z = |Z|\, e^{i\phi} = |Z|(\cos\phi + i\,\sin\phi),$$

θα πρέπει να είναι

$$|Z|\cos\phi = R \qquad |Z|\sin\phi = -\frac{1}{\omega C}$$

με $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ και $\tan\phi = -\frac{1}{\omega RC}$.

Επομένως, για $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ρεύμα είναι

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z|\, e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|Z|}\, e^{i(\omega t-\phi)} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\, e^{i(\omega t-\phi)}.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0 \cos\omega t$ είναι

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t - \phi) \qquad \text{όπου} \qquad \phi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \qquad \text{ή}$$

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \phi') \qquad \text{όπου} \qquad \phi' = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

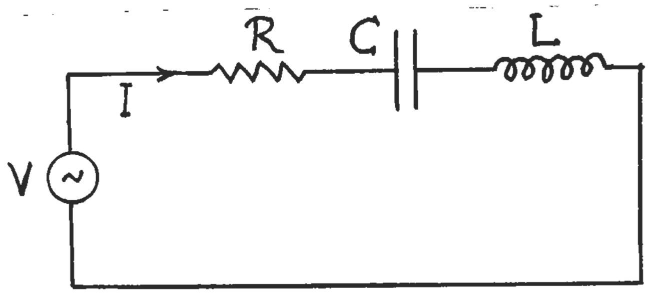
Για $C \longrightarrow \infty$ (βραχυκυκλωμένος πυκνωτής), έχουμε το αποτέλεσμα του Παραδ.1. Για $R \longrightarrow 0$ έχουμε το αποτέλεσμα του Παραδ.2.

Παράδειγμα 6

Για κύκλωμα L, C, R σε σειρά. Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \text{και}$$



$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Επομένως, για $V = V_0 e^{i\omega t}$,

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z|e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t-\phi)}.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0 \cos\omega t$ είναι

$$I = \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega t - \phi) \qquad \text{όπου} \qquad \phi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Αν ενδιαφερόμαστε για τη δράση του κυκλώματος αυτού ως διαιρέτη τάσεως και ζητούμε, για παράδειγμα, να βρούμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή, V_C, τότε χρησιμοποιούμε τη σχέση $V_C = IZ_C$ με το ήδη γνωστό ρεύμα I.

Παρατηρούμε ότι

$$V_C = IZ_C = V\frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = V\frac{Z_C}{Z} = V\frac{\frac{1}{i\omega C}}{Z}.$$

Επειδή $Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-i\pi/2}$ και $Z = |Z|\, e^{i\phi}$, τότε, για $V = V_0 e^{i\omega t}$,

θα είναι $V_C = \frac{V_0}{\omega C|Z|} e^{i(\omega t-\phi-\pi/2)}$,

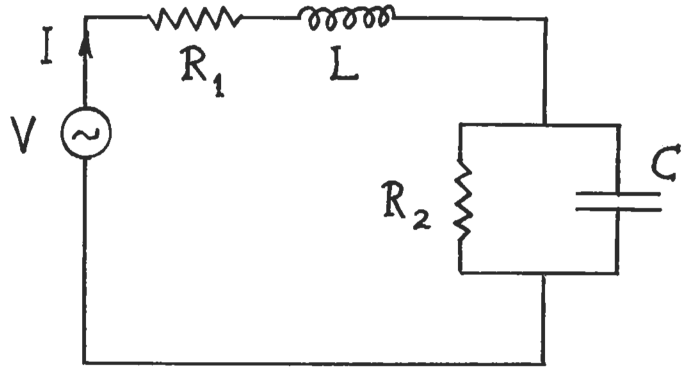
το πραγματικό μέρος της οποίας είναι $V_C = \frac{V_0}{\omega C|Z|}\cos(\omega t - \phi - \pi/2)$

με τα $|Z|$ και ϕ όπως έχουν ήδη οριστεί.

Τα αποτελέσματα των Παραδ.1-5 προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις του αποτελέσματος για το κύκλωμα LCR.

Παράδειγμα 7

Για το κύκλωμα του σχήματος. Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:



$$Z = R_1 + i\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + i\omega C}$$

$$Z = R_1 + i\omega L + \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C}$$

$$Z = R_1 + i\omega L + \frac{R_2(1 - i\omega R_2 C)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$Z = \left(R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) + i \left(\omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)$$

$$|Z| = \left[\left(R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)^2 + \left(\omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L(1 + \omega^2 R_2^2 C^2) - \omega R_2^2 C}{R_1(1 + \omega^2 R_2^2 C^2) + R_2}.$$

Επομένως, για $V = V_0 e^{i\omega t}$, το ολικό ρεύμα στο κύκλωμα είναι

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi)}.$$

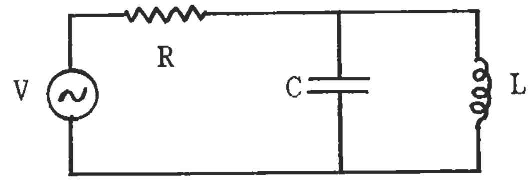
Παίρνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης, έχουμε ότι για $V = V_0 \cos\omega t$ είναι

$$I = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi) \qquad \text{όπου} \qquad \phi = \arctan \frac{\omega L(1 + \omega^2 R_2^2 C^2) - \omega R_2^2 C}{R_1(1 + \omega^2 R_2^2 C^2) + R_2}.$$

Από τα παραδείγματα που δόθηκαν, φαίνεται η ευκολία η οποία προκύπτει από τη χρήση των μεθόδων του μιγαδικού συμβολισμού και της σύνθετης αντίστασης στη λύση προβλημάτων στα οποία μας ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση σε ηλεκτρικά κυκλώματα.

Παράδειγμα 2.1

Στο κύκλωμα του σχήματος, η τάση είναι $V = V_0\cos\omega t$. Στη μόνιμη κατάσταση, να βρεθούν:



(α) Η γωνιακή συχνότητα ω_0 στην οποία μηδενίζεται το ρεύμα στην αντίσταση.

(β) Τα ρεύματα στον πυκνωτή και το πηνίο στη γωνιακή συχνότητα ω_0.

(γ) Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα, στη γωνιακή συχνότητα ω_0. Να αποδειχθεί ότι αυτή είναι σταθερή.

(α) Θα θεωρήσουμε ότι η τάση δίνεται από τη σχέση $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ και θα παίρνουμε τελικά τα πραγματικά μέρη των λύσεων.

Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Το ρεύμα μέσα από την R είναι $I_R = \frac{V}{Z}$. Επειδή για $\omega^2 LC = 1$ $Z \longrightarrow \infty$, το ρεύμα στην αντίσταση είναι $I_R = 0$ στη συχνότητα $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

(β) Για $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, η πτώση τάσης στην αντίσταση είναι ίση με μηδέν και όλη η τάση $V(t)$ ασκείται στα άκρα του C και της L. Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι επομένως:

$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{i\omega C}} = i\omega CV = e^{i\pi/2}\,\omega C\, V_0 e^{i\omega t} = \omega CV_0\, e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

Το πραγματικό μέρος αυτού είναι: $I_C = \omega CV_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ή $I_C = -\,\omega CV_0\sin\omega t$.

Επειδή $I_C + I_L = 0$, προκύπτει ότι $I_L = \omega CV_0\sin\omega t$.

Για $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, με $I_0 \equiv \omega_0 CV_0 = \frac{V_0}{\omega_0 L}$, τα ρεύματα είναι:

$$I_C = -\,I_0\sin\omega_0 t \qquad \text{και} \qquad I_L = I_0\sin\omega_0 t.$$

(γ) Οι ενέργειες στον πυκνωτή και το πηνίο είναι, αντίστοιχα,

$$E_C = \tfrac{1}{2}\,CV_C^2 = \tfrac{1}{2}\,CV_0^2\cos^2\omega_0 t \qquad \text{και} \qquad E_L = \tfrac{1}{2}\,LI_L^2 = \tfrac{1}{2}\,LI_0^2\sin^2\omega_0 t.$$

Επειδή $\quad CV_0^2 = \dfrac{V_0^2}{\omega_0^2 L} = LI_0^2$, $\quad$ η ολική ενέργεια στο κύκλωμα είναι

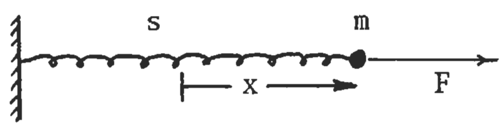
$$E = E_C + E_L = \tfrac{1}{2}\, CV_0^2 \cos^2\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\, LI_0^2 \sin^2\omega_0 t = \tfrac{1}{2}\, CV_0^2 = \tfrac{1}{2}\, LI_0^2,$$

η οποία είναι σταθερή.

Απορρόφηση ενέργειας σε μηχανικό εξαναγκασμένο ταλαντωτή

Παράδειγμα 2.2

Σημειακή μάζα m είναι στερεωμένη στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς $s = m\omega_0^2$. Η μάζα κινείται πάνω στον άξονα των x και υφίσταται δύναμη τριβής $-r\dot{x} = -m\gamma\dot{x}$. Εξωτερική δύναμη $F = F_0\cos\omega t$ ασκείται πάνω στη μάζα, στην κατεύθυνση x.



(α) Υποθέτοντας για μόνιμη κατάσταση τη λύση $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, να προσδιοριστούν τα A και B.

(β) Να αποδειχθεί ότι η μέση απορροφούμενη ισχύς για έναν ακέραιο αριθμό περιόδων είναι ίση με $\langle P\rangle = \frac{1}{2}\,\omega F_0 A$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ολική ενέργεια του συστήματος έχει μέση τιμή για έναν ακέραιο αριθμό περιόδων ίση με $\langle E\rangle = \frac{1}{4}\, m\,(\omega_0^2 + \omega^2)\,(A^2 + B^2)$.

Η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -sx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t \qquad \text{ή} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2\, x = F_0\cos\omega t$$

και τελικά: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

(α) Αν $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, τότε

$$\frac{dx}{dt} = \omega\,(A\cos\omega t - B\sin\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2\,(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

οι οποίες με αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης δίνουν:

$$-\,\omega^2\,(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + \omega\gamma\,(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + \omega_0^2\,(A\sin\omega t + B\cos\omega t) =$$
$$= \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Επομένως,

$$(-\,\omega^2 A - \omega\gamma B + \omega_0^2 A)\ \sin\omega t + (-\,\omega^2 B + \omega\gamma A + \omega_0^2 B - \frac{F_0}{m}\ )\ \cos\omega t = 0,$$

η οποία ικανοποιείται για όλες τις τιμές του t αν οι συντελεστές των sinωt και cosωt είναι ίσοι με μηδέν. Επομένως,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \omega\gamma B \qquad \text{και} \qquad (\omega_0^2 - \omega^2)B + \omega\gamma A = \frac{F_0}{m}$$

οι οποίες δίνουν: $A\left(\dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega\gamma} + \omega\gamma\right) = \dfrac{F_0}{m}$ και τελικά:

$$A = \frac{\omega\gamma\,\dfrac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad B = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\,\dfrac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + {}^2\gamma^2}.$$

(β) Η στιγμιαία απορροφούμενη ισχύς είναι:

$$P(t) = Fv = F_0\cos\omega t\ (\omega A \cos\omega t - \omega B \sin\omega t) = \omega F_0 A \cos^2\omega t - \omega F_0 B \sin\omega t \cos\omega t$$

Η μέση απορροφούμενη ισχύς για έναν ακέραιο αριθμό περιόδων ορίζεται ως

$$\langle P\rangle \equiv \frac{1}{nT}\int_t^{t+nT} P(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P(t)\ dt$$

και είναι ίση με

$$\langle P\rangle = \omega F_0 A\ \langle\cos^2\omega t\rangle - \omega F_0 B\ \langle\sin\omega t \cos\omega t\rangle.$$

Επειδή

$$\langle\sin^2\omega t\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin^2\omega t\ dt = \frac{1}{2} \qquad \langle\cos^2\omega t\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2\omega t\ dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle\sin\omega t \cos\omega t\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin\omega t \cos\omega t\ dt = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\,\omega F_0 A.$$

(γ) Η ολική ενέργεια είναι:

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,sx^2$$

$$E = \frac{1}{2}\,m\omega^2\ (A\cos\omega t - B\sin\omega t)^2 + \frac{1}{2}\,s\ (A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t - 2AB \sin\omega t \cos\omega t) +$$
$$+ \frac{1}{2} s (A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t + 2AB \sin\omega t \cos\omega t).$$

Η μέση ολική ενέργεια για έναν ακέραιο αριθμό περιόδων είναι

$$<E> \equiv \frac{1}{nT} \int_t^{t+nT} E(t)\, dt \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t)\, dt$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$<E> = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 <\cos^2\omega t> + B^2 <\sin^2\omega t> - 2AB <\sin\omega t \cos\omega t>) +$$
$$+ \frac{1}{2} s (A^2 <\sin^2\omega t> + B^2 <\cos^2\omega t> + 2AB <\sin\omega t \cos\omega t>)$$

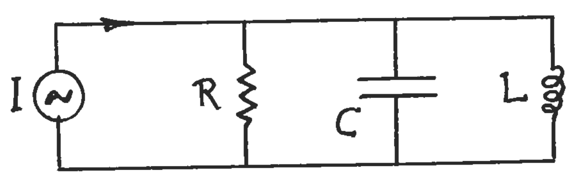
$$<E> = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2 \right) + \frac{1}{2} s \left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2 \right) = \frac{1}{4} (m\omega^2 + s)(A^2 + B^2)$$

και τελικά: $$<E> = \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) (A^2 + B^2).$$

Προβλήματα

Προβλήματα από Pain: 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.11, 2.14, 2.15, 2.17.

2.1 Μια πηγή ρεύματος $I = I_0\cos\omega t$ συνδέεται παράλληλα με αντίσταση R, πυκνωτή C και αυτεπαγωγή L, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Να βρεθεί η ολική σύνθετη αντίσταση Z στα άκρα της πηγής και να εκφραστεί στη μορφή $Z = |Z|\, e^{i\phi}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η $|Z|$ έχει μέγιστη τιμή ίση με R όταν $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

(γ) Στη μόνιμη κατάσταση, να βρεθούν: η τάση V που αναπτύσσεται στα άκρα της πηγής και τα ρεύματα που διαρρέουν τα R, C και L.

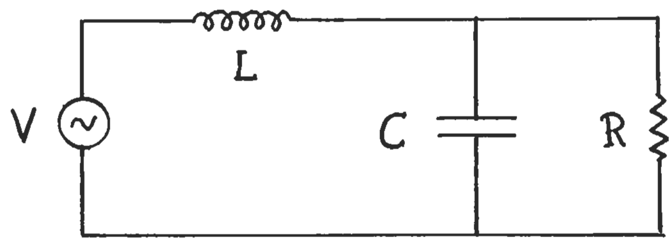
(δ) Να αποδειχθεί ότι, στη μόνιμη κατάσταση, η μέση καταναλωνόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι $\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos\phi$, όπου $V_0 = |Z| I_0$.

Απ.: (α) $|Z| = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \right]^{-1/2}$ $\qquad \phi = \arctan R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$

(γ) $V = |Z| I_0 \cos(\omega t + \phi)$, $\quad I_R = \frac{|Z|}{R} I_0 \cos(\omega t + \phi)$, $\quad I_C = -\omega C |Z| I_0 \sin(\omega t + \phi)$,

$I_L = \frac{|Z|}{\omega L} I_0 \sin(\omega t + \phi)$.

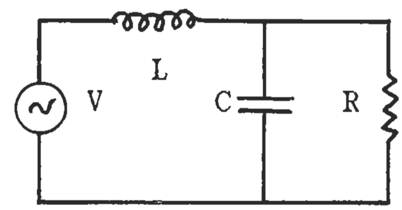
2.2 Στο κύκλωμα του σχήματος, η τάση είναι $V = A\cos\omega t$.



Για ποια συχνότητα το ρεύμα που διαρρέει την L στη μόνιμη κατάσταση βρίσκεται σε φάση με την τάση V;

Απ.: $\omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2} \right)^{1/2}$.

2.3 Στο κύκλωμα του σχήματος, η εφαρμοζόμενη τάση είναι $V = V_0\cos\omega t$.



Στη μόνιμη κατάσταση, να αποδειχθεί ότι:

(α) Για $\omega = 1/\sqrt{2LC}$, το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος είναι ίσο με ωL (ανεξάρτητο των R και C).

(β) Για $\omega = 1/\sqrt{LC}$, το ρεύμα μέσα από την R είναι ανεξάρτητο του R και να βρεθεί η τιμή του.

Απ.: (β) $I_R = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t$.

2.4 Ένας αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απώλειες είναι αρχικά ακίνητος στη θέση ισορροπίας του. Μια σταθερή δύναμη F_0 ασκείται μεταξύ $t = 0$ και $t = T$. Να βρεθεί η κίνηση του ταλαντωτή.

Απ.: $x(t) = \frac{F_0}{s}(1 - \cos\omega t)$ για $0 < t < T$,

$x(t) = 2\frac{F_0}{s}\sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)\sin\left(\omega(t - \frac{1}{2}T)\right)$ για $t > T$.

2.5 Αν σε ένα εξαναγκασμένο αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση η μέγιστη ταχύτητα είναι ίδια στις δύο γωνιακές συχνότητες ω_1 και ω_2 της διεγείρουσας δύναμης και $\omega = \sqrt{s/m}$, αποδείξετε ότι $\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

2.6 Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα m, έχει γωνιακή συχνότητα συντονισμού ίση με ω. Τη στιγμή $t = 0$, όταν η μετατόπιση του ταλαντωτή είναι ίση με μηδέν και η ταχύτητά του είναι υ, ασκείται στον ταλαντωτή δύναμη ίση με $F\cos at$. Αποδείξετε ότι η μετατόπιση του ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \frac{F(\cos at - \cos\omega t)}{m(\omega^2 - a^2)} + \frac{\upsilon}{\omega}\sin\omega t.$$

Υποθέτοντας ότι $a = \omega + \delta\omega$, βρείτε τη μορφή της λύσης καθώς $\delta\omega \longrightarrow 0$ και επιτυγχάνεται συντονισμός. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί, ίσως πιο απλά, εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital στον πρώτο όρο της λύσης, θεωρώντας την α ως μεταβλητή, η οποία τείνει στην τιμή ω.

Απ.: $x(t) = \left(\frac{\upsilon}{\omega} + \frac{F}{2m\omega}t \right)\sin\omega t$.