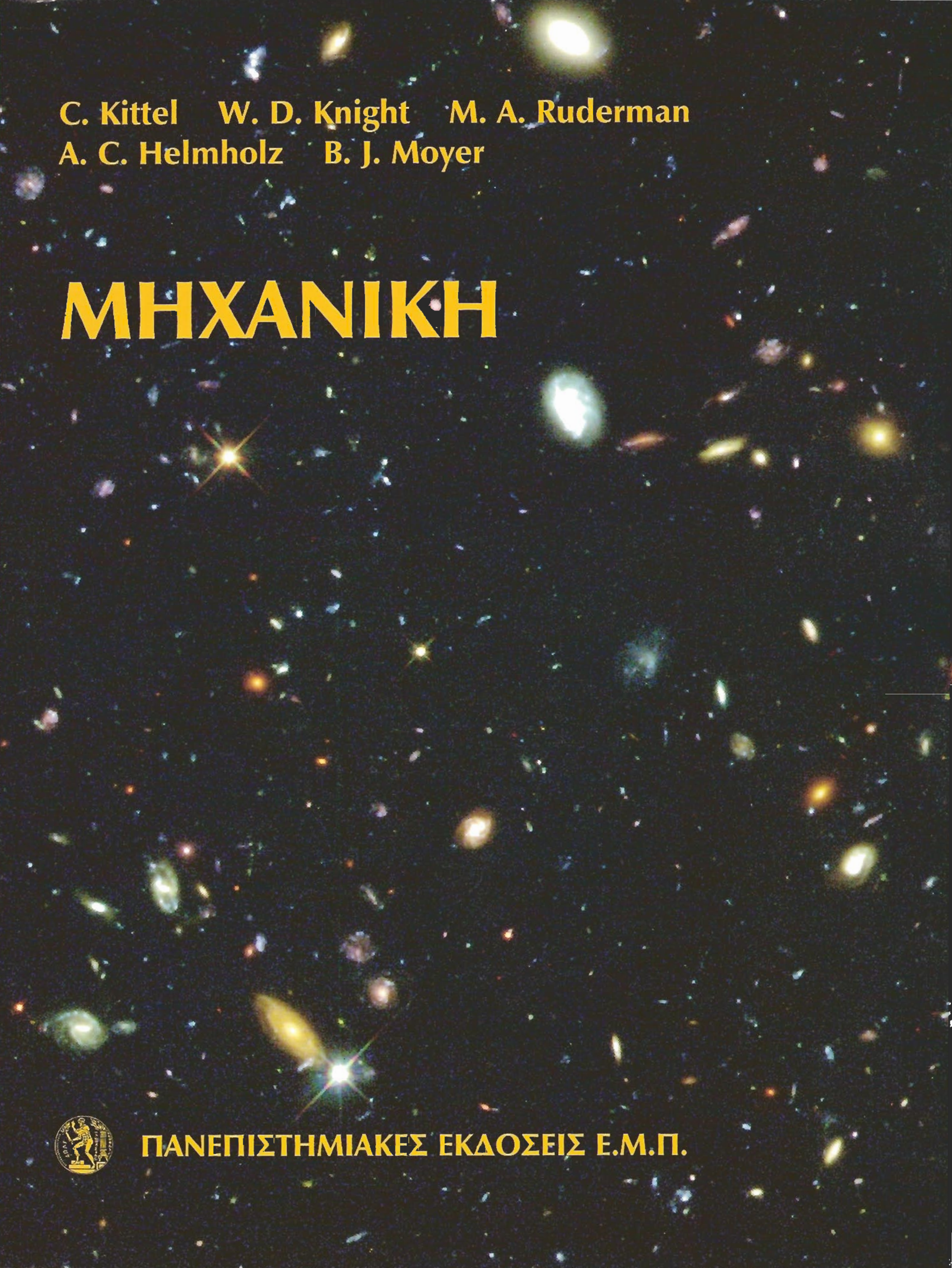


C. Kittel W. D. Knight M. A. Ruderman
A. C. Helmholz B. J. Moyer

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Ε.Μ.Π.

2

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

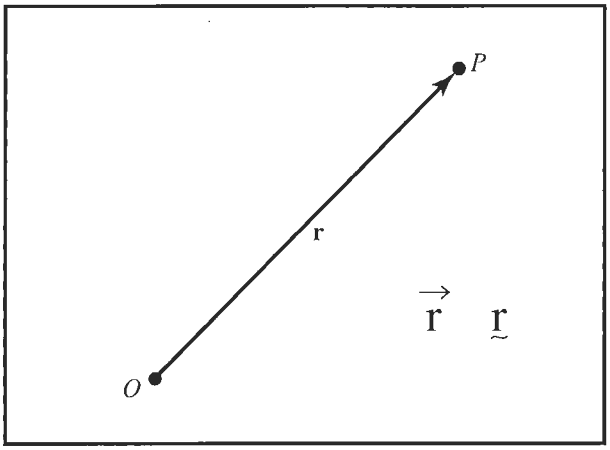
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
Διανυσματικός συμβολισμός
Ισότητα διανυσμάτων
ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
Εσωτερικό γινόμενο
Εξωτερικό γινόμενο
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
Ταχύτητα
Επιτάχυνση
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κυκλική κίνηση
ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ
Παραδείγματα με στοιχειώδεις διανυσματικές πράξεις
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ
Χρονικές παράγωγοι, ταχύτητα και επιτάχυνση
Γωνίες
Η συνάρτηση e^x
Ανάπτυξη σε σειρά
Διανύσματα και πολικές συντεταγμένες
Τύποι από την αναλυτική γεωμετρία
Χρήσιμες διανυσματικές ταυτότητες
ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΗ ΜΕΛΕΤΗ

ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η γλώσσα είναι ένα βασικό συστατικό της επιστημονικής σκέψης. Είναι δύσκολο να σκεφθεί κανείς καθαρά και εύκολα γύρω από εκλεπτυσμένες και αφηρημένες έννοιες, σε μια γλώσσα που δεν διαθέτει κατάλληλες λέξεις για τέτοιες έννοιες. Για να εκφραστούν νέες επιστημονικές έννοιες, νέες λέξεις εφευρίσκονται και προστίθενται στη γλώσσα. Πολλές τέτοιες λέξεις (όροι) έχουν παρθεί από ρίζες αρχαιοελληνικές ή λατινικές. Αν αυτό ικανοποιεί τις απαιτήσεις της επιστημονικής επικοινωνίας, μια καινούργια λέξη υιοθετείται σε πολλές μοντέρνες γλώσσες. Έτσι, *vector* στην αγγλική είναι *vecteur* στη γαλλική, *Vektor* στη γερμανική και ΒΕΚΤΟΡ στη ρωσική. Στα ελληνικά λέμε "διάνυσμα".

Διάνυσμα είναι η λέξη με την οποία εκφράζουμε ένα μέγεθος που έχει *μέτρο* και *κατεύθυνση* και που μπορεί να συνδυάζεται με άλλα διανύσματα σύμφωνα με έναν ειδικό κανόνα. Παντού στη Μηχανική (καθώς και σε άλλους κλάδους της Φυσικής) θα συναντήσουμε μεγέθη (ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρικό πεδίο, μαγνητική διπολική ροπή) που έχουν και μέτρο και κατεύθυνση. Κατά συνέπεια, είναι ενδιαφέρον να αναπτύξουμε τα μέσα που μας επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε τέτοια μεγέθη. Αν και η διανυσματική ανάλυση θεωρείται ένας κλάδος των μαθηματικών, η αξία της στη Φυσική είναι τόσο μεγάλη, ώστε να αξίζει να παρεμβάλουμε μια εισαγωγή σ' αυτό το θέμα.

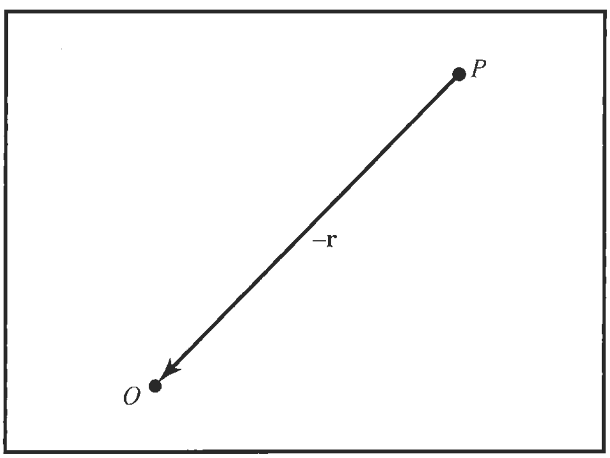


Σχ. 2.1 Το διάνυσμα θέσης **r** προσδιορίζει τη θέση ενός σημείου *P* ως προς ένα άλλο σημείο *O* που λαμβάνεται ως αρχή.

Διανυσματικός συμβολισμός

Επειδή τα σύμβολα συνθέτουν τη γλώσσα των μαθηματικών, ένα ενδιαφέρον ζήτημα στη μαθηματική ανάλυση είναι η τεχνική της χρησιμοποίησης καλού συμβολισμού. Ο διανυσματικός συμβολισμός έχει δύο αξιόλογα πλεονεκτήματα:

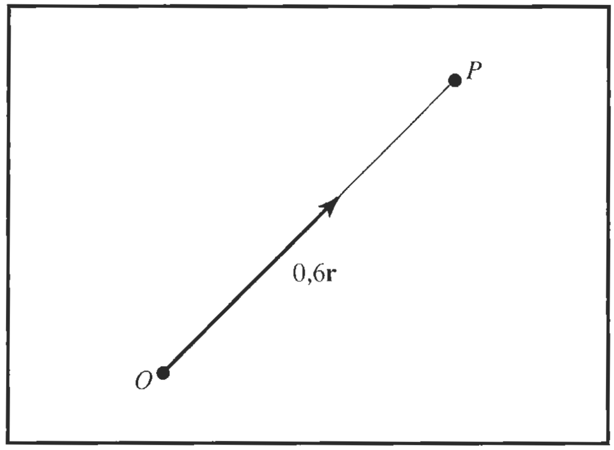
1. Η διατύπωση ενός νόμου της φυσικής με διανύσματα είναι αναξάρτητη από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Ο διανυσματικός συμβολισμός αποτελεί ένα τρόπο έκφρασης τέτοιον, ώστε οι συλλογισμοί να διατηρούν ένα φυσικό περιεχόμενο χωρίς να είναι ανάγκη να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων.
2. Ο συμβολισμός με διανύσματα είναι περιεκτικός. Πολλοί φυσικοί νόμοι έχουν απλές και ξεκάθαρες μορφές που μπορεί ωστόσο να θολώνονται, όταν οι νόμοι γράφονται σε κά-



Σχ. 2.2 Το διάνυσμα − **r** είναι ίσο σε μέτρο, αλλά αντίθετο σε κατεύθυνση από το **r**.

ποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.

Αν και στη λύση προβλημάτων μπορεί να προτιμάμε να εργαζόμαστε σε ειδικά συστήματα συντεταγμένων, θα διατυπώνουμε τους νόμους της Φυσικής σε διανυσματική μορφή παντού, όπου είναι δυνατό. Μερικοί από τους πιο πολύπλοκους νόμους, οι οποίοι δεν είναι δυνατό να εκφραστούν διανυσματικά, είναι δυνατό να διατυπωθούν σε τανυστική μορφή. Ο *τανυστής* είναι γενίκευση της έννοιας του διανύσματος και περιέχει το διάνυσμα ως ειδική περίπτωση. Η διανυσματική ανάλυση, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, είναι σε μεγάλο βαθμό το αποτέλεσμα της δουλειάς που έγινε προς το τέλος του δεκάτου ενάτου αιώνα από τους Josiah Willard Gibbs (Γκιπς) και Oliver Heaviside (Χέβισαϊτ).



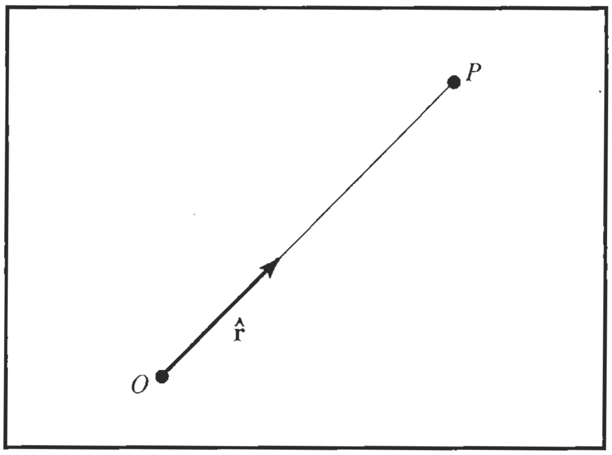
Σχ. 2.3 Το διάνυσμα 0,6 **r** έχει την κατεύθυνση του **r** και μέτρο 0,6 |**r**|.

Ο διανυσματικός συμβολισμός που υιοθετούμε είναι ο παρακάτω: Στα έντυπα, τα διανύσματα τυπώνονται με παχύτερα στοιχεία. Το μέτρο ενός διανύσματος τυπώνεται με πλάγια στοιχεία: *A* είναι το μέτρο του **A**. Το μέτρο γράφεται επίσης |**A**|. Στο χειρόγραφο ή στο μαυροπίνακα, ένα διανυσματικό μέγεθος **A** συμβολίζεται με μια κυματοειδή γραμμή που γράφουμε κάτω από το A ή με ένα βέλος πάνω από το A (βλ. Σχ. 2.1). Ένα μοναδιαίο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα. Ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του **A** γράφεται με ένα χαρακτηριστικό σημείο από πάνω· γράφουμε δηλαδή $\hat{\mathbf{A}}$ και διαβάζουμε "A καπέλο". Ανακεφαλαιώνουμε το συμβολισμό, με την ταυτότητα:

$$\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{A}}\,A \equiv A\,\hat{\mathbf{A}}$$

Τα Σχ. 2.1 μέχρι 2.4 δείχνουν ένα διάνυσμα, το αντίθετο αυτού του διανύσματος, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό μέγεθος, και ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Η δυνατότητα χρησιμοποίησης και η ωφελιμότητα των διανυσμάτων σε φυσικά προβλήματα, βασίζεται κυρίως στην ευκλείδεια γεωμετρία. Η διατύπωση ενός νόμου σε διανυσματική μορφή προϋποθέτει συνήθως ότι ισχύει η ευκλείδεια γεωμετρία. Αν η γεωμετρία δεν είναι ευκλείδεια, η πρόσθεση δύο διανυσμάτων, με έναν απλό και σαφή τρόπο, δεν είναι δυνατή. Για καμπυλόγραμμους χώρους, υπάρχει μια πιο γενική γλώσσα, η μετρική διαφορική γεωμετρία. Αυτή είναι η γλώσσα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, ενός κλάδου της Φυσικής όπου η ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι πια αρκετά ακριβής.



Σχ 2.4 Το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του **r**. Σημειώστε ότι $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\,\hat{\mathbf{r}}$.

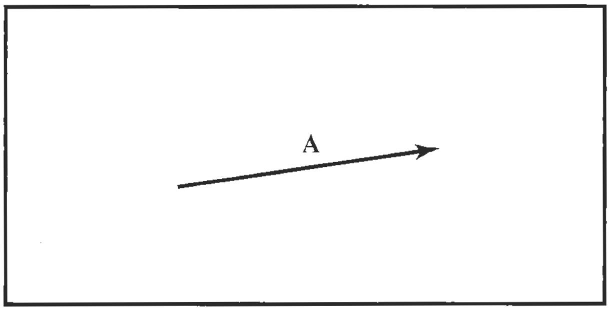
Θεωρήσαμε το διάνυσμα σαν μια ποσότητα που έχει και μέτρο και κατεύθυνση. Οι ιδιότητες αυτές δεν αναφέρονται αναγκαστικά σε ένα ιδιαίτερο σύστημα συντεταγμένων, αν και υποθέτουμε ότι η κατεύθυνση καθορίζεται π.χ. ως προς το εργαστήριο ή ως προς τους απλανείς αστέρες κ.λ.π. Θα δούμε, πάντως, ότι υπάρχουν ορισμένα μεγέθη που έχουν μέτρο και κατεύθυνση και που δεν είναι διανύσματα, όπως είναι οι πεπερασμένες περιστροφές (βλ. Σχ. 2.8). Ένα μέγεθος που έχει αλγεβρική τιμή αλλά *δεν* έχει κατεύθυνση, είναι ένα *αριθμητικό* ή *βαθμωτό* μέγεθος. Το μέτρο ενός διανύσματος είναι βαθμωτό μέγεθος. Η θερμοκρασία και η μάζα είναι βαθμωτά μεγέθη. Από την άλλη μεριά, η ταχύτητα **v** και η δύναμη **F** είναι διανύσματα.

Ισότητα διανυσμάτων

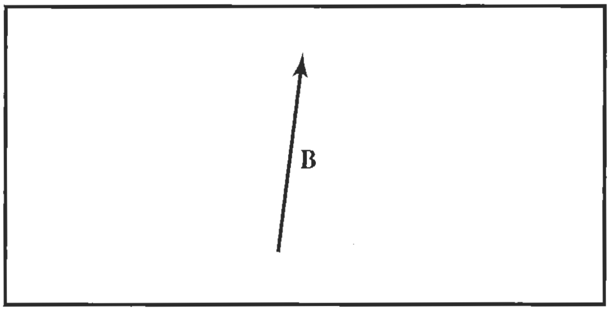
Έχοντας καθορίσει το συμβολισμό, προχωράμε σε ορισμένες πράξεις σχετικές με τα διανύσματα: την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό. Δύο διανύσματα **A** και **B**, που περιγράφουν όμοια φυσικά μεγέθη (π.χ. δυνάμεις), λέμε ότι είναι ίσα, αν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση. Η ισότητα γράφεται **A** = **B**. Δεν είναι απαραίτητο ένα διάνυσμα να είναι εντοπισμένο στο χώρο, αν και μπορεί να αναφέρεται σε ένα μέγεθος που ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Δύο διανύσματα μπορούν να συγκριθούν, ακόμα και αν εκφράζουν ένα φυσικό μέγεθος που ορίζεται σε διαφορετικά σημεία του χώρου και του χρόνου. Αν δεν είχαμε εμπιστοσύνη, πειραματικά θεμελιωμένη, στην παραδοχή ότι ο χώρος είναι επίπεδος, δηλαδή ευκλείδειος (εκτός ίσως σε τεράστιες αποστάσεις), τότε δεν θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε με αδιαμφισβήτητο τρόπο δύο διανύσματα που αναφέρονται σε διαφορετικά σημεία.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

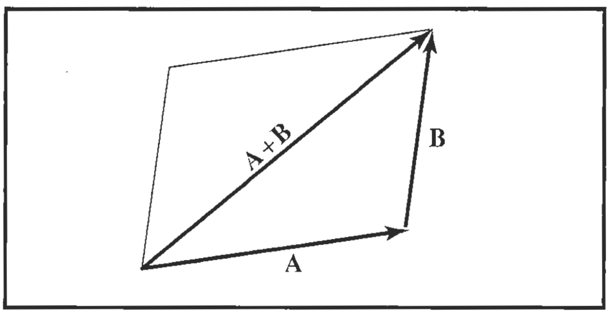
Ένα διάνυσμα παριστάνεται γεωμετρικά με ένα κατευθυνόμενο τμήμα ευθείας γραμμής ή με ένα βέλος, του οποίου το μήκος, που μετριέται σε μια καθορισμένη κλίμακα, είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων **A** και **B** ορίζεται μέσω της γεωμετρικής κατασκευής που δείχνουν τα Σχ. 2.5 α ως γ. Αυτή η κατασκευή ονομάζεται συνήθως *νόμος* (ή *κανόνας*) *του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων*. Το άθροισμα **A** + **B** καθορίζεται με την μετατόπιση του **B** παράλληλα προς τον εαυτό του, ωσότου η αρχή του **B** συμπέσει με το τέλος το **A**. Το διάνυσμα που γράφεται από την αρχή του **A** προς το τέλος του **B**, είναι το άθροι-



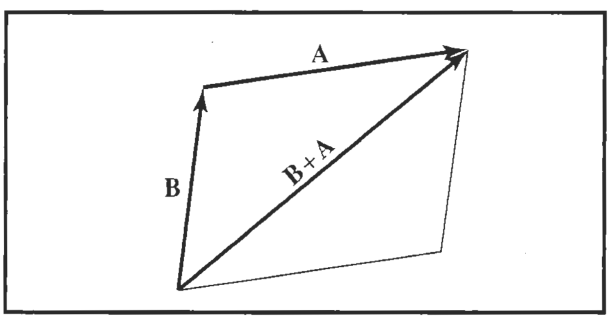
Σχ 2.5 (*α*) Το διάνυσμα **A**



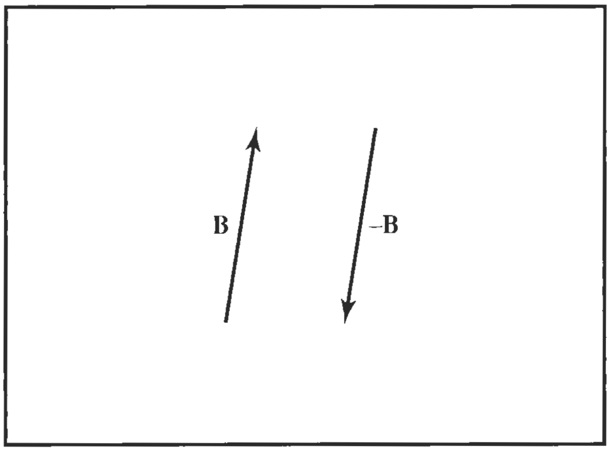
(*β*) Το διάνυσμα **B**



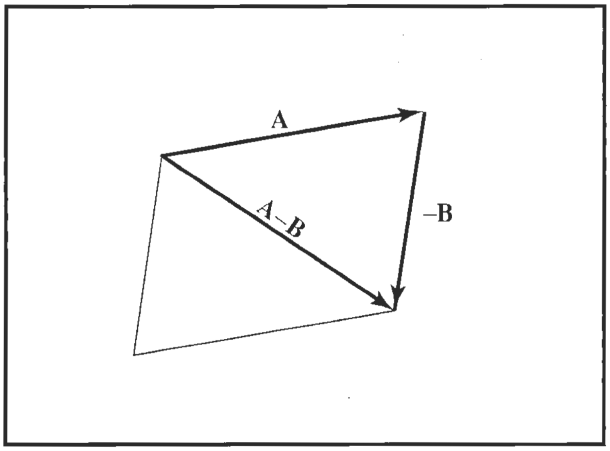
(*γ*) Το διανυσματικό άθροισμα **A** + **B**



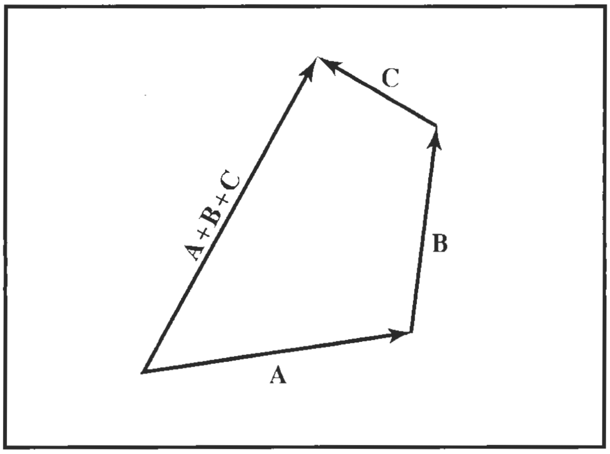
(*δ*) Το διανυσματικό άθροισμα **B** + **A** είναι ίσο με το **A** + **B**



Σχ. 2.6 (*α*) Τα διανύσματα **B** και – **B**



(*β*) Σχηματισμός της διανυσματικής διαφοράς **A** – **B**



Σχ. 2.7 Άθροισμα τριών διανυσμάτων **A** + **B** + **C**. Επιβεβαιώστε ότι το άθροισμα είναι ίσο με **B** + **A** + **C**

σμα **A** + **B**. Από το Σχ. 2.5 δ έπεται ότι **A** + **B** = **B** + **A**, ιδιότητα που την εκφράζουμε λέγοντας ότι η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική. Η αφαίρεση των διανυσμάτων ορίζεται στα Σχ. 2.6 α και β. Η σχέση **B** + (–**B**) = 0 ορίζει το αρνητικό διάνυσμα.

Το άθροισμα των διανυσμάτων ικανοποιεί τη σχέση **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**, οπότε λέμε ότι το άθροισμα είναι προσεταιριστικό (βλ. Σχ. 2.7). Το άθροισμα ενός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο από τη σειρά με την οποία γίνεται η πρόσθεση. Αν **A** – **B** = **C**, τότε, προσθέτοντας το **B** και στα δύο μέλη, παίρνουμε **A** = **B** + **C**. Αν k είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, τότε:

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \tag{2.1}$$

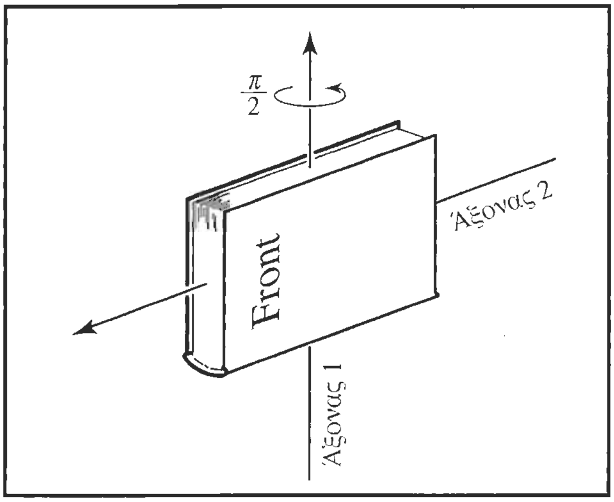
και λέμε ότι ο παλλαπλασιασμός ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό μέγεθος είναι επιμεριστικός.

Πότε μια φυσική ποσότητα παριστάνεται με ένα διάνυσμα; Μια μετατόπιση παριστάνεται με ένα διάνυσμα, γιατί η μετατόπιση έχει μέτρο και κατεύθυνση. Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο κανόνας της πρόσθεσης, που δόθηκε παραπάνω, εφαρμόζεται για μετατοπίσεις σε ευκλείδειο χώρο. Και άλλα φυσικά μεγέθη έχουν τους ίδιους νόμους σύνθεσης και τις ίδιες αναλλοίωτες ιδιότητες με τις μετατοπίσεις. Τέτοια μεγέθη μπορούν επίσης να παρασταθούν με διανύσματα. Για να είναι ένα φυσικό μέγεθος διάνυσμα, πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες:

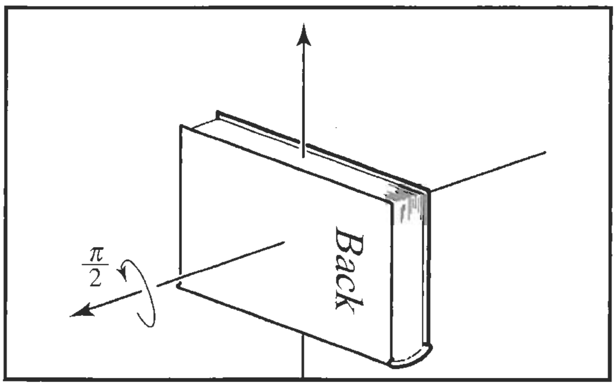
1. Πρέπει να υπακούει στο νόμο του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση.
2. Πρέπει να έχει μέτρο και κατεύθυνση ανεξάρτητα από την επιλογή συστήματος συντεταγμένων.

Οι πεπερασμένες περιστροφές δεν είναι διανύσματα. Όλες οι ποσότητες που έχουν μέτρο και κατεύθυνση δεν είναι κατ' ανάγκη διανύσματα. Για παράδειγμα, μια περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από έναν καθορισμένο άξονα κατά μια ορισμένη γωνία, έχει μέτρο (τη γωνία στροφής) και κατεύθυνση (την κατεύθυνση του άξονα). Αλλά δύο τέτοιες πεπερασμένες περιστροφές δεν προστίθενται σύμφωνα με τον νόμο πρόσθεσης των διανυσμάτων, εκτός αν οι γωνίες περιστροφής είναι πολύ μικρές [1]. Αυτό φαίνεται εύκολα στην περίπτωση που οι δύο άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους και η περιστροφή εί-

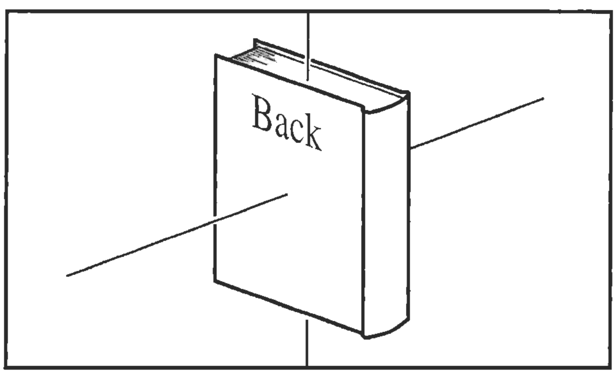
[1] Οι γωνιακές ταχύτητες είναι διανύσματα, παρ' όλο που οι πεπερασμένες περιστροφές δεν είναι.



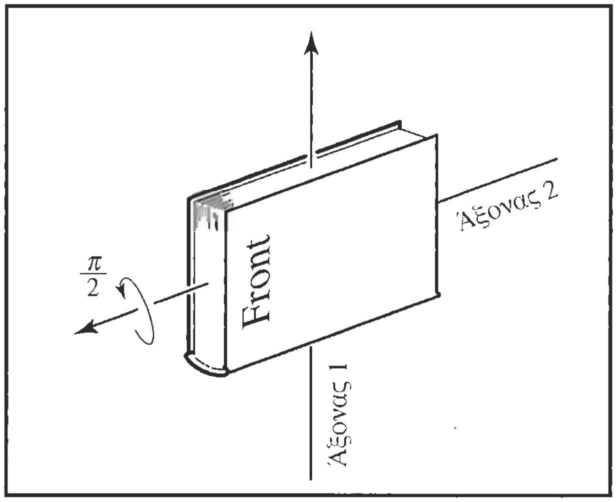
Σχ. 2.8 (*α*) Αρχικός προσανατολισμός του βιβλίου. Από τη θέση αυτή το βιβλίο στρέφεται κατά γωνία $\pi/2$ rad γύρω από τον άξονα 1.



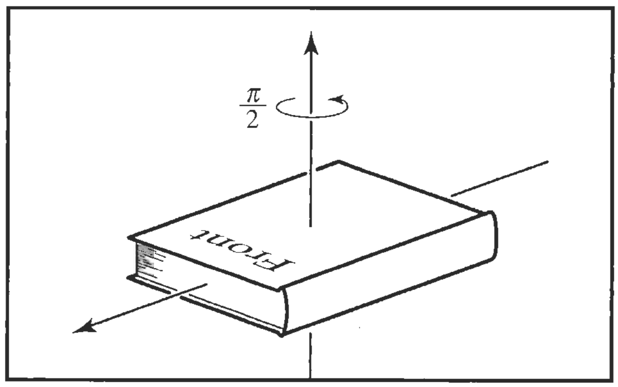
(*β*) Προσανατολισμός μετά από περιστροφή $\pi/2$ rad γύρω από τον άξονα 1.



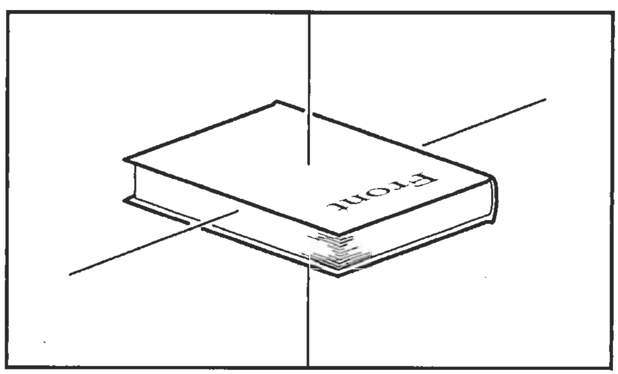
(*γ*) Προσανατολισμός μετά από δεύτερη περιστροφή κατά $\pi/2$ rad, αλλά τώρα γύρω από τον άξονα 2.



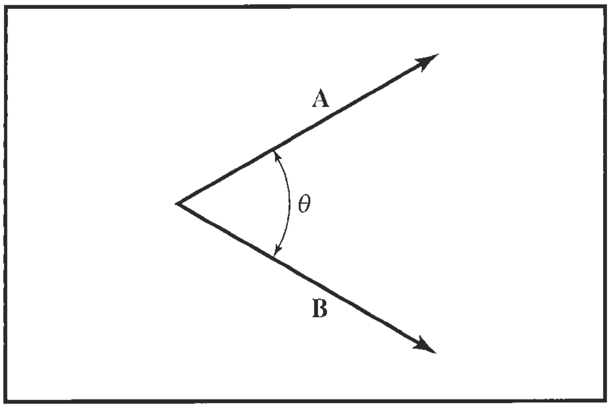
(*δ*) Αρχικός προσανατολισμός του βιβλίου. Από τη θέση αυτή το βιβλίο στρέφεται κατά γωνία $\pi/2$ rad γύρω από τον άξονα 2.



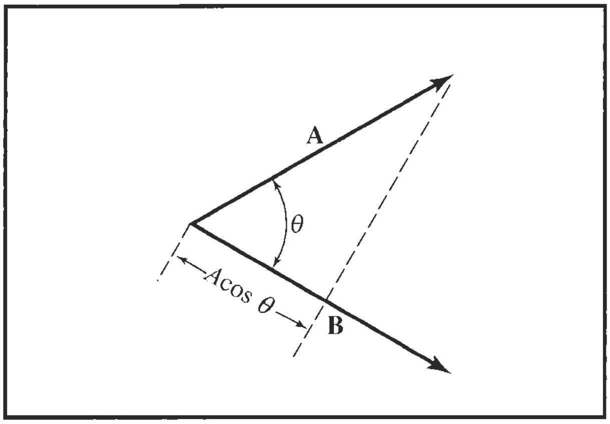
(*ε*) Προσανατολισμός μετά από περιστροφή $\pi/2$ rad γύρω από τον άξονα 2.



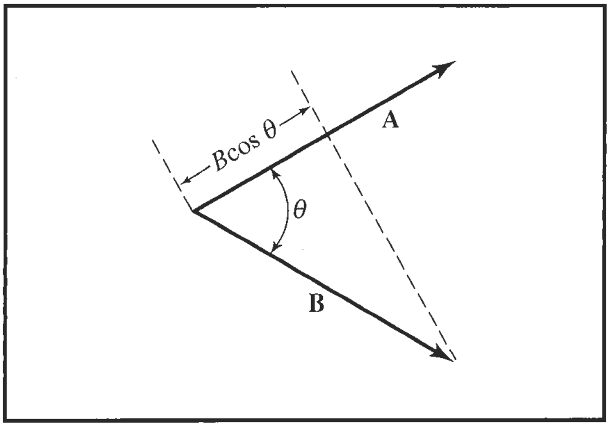
(*στ*) Προσανατολισμός μετά από δεύτερη περιστροφή κατά $\pi/2$ rad γύρω από τον άξονα 1.



Σχ. 2.9 (*α*) Για το σχηματισμό του $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, φέρνουμε τα διανύσματα **A** και **B** σε κοινή αρχή. Το γράμμα θ παριστάνει τη γωνία μεταξύ των **A** και **B**.



(*β*) $B\,(A \cos\theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$



(*γ*) $A\,(B \cos\theta) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

ναι κατά γωνία $\pi / 2$ rad (90°). Ας υποθέσουμε ότι το αντικείμενο (ένα βιβλίο) είναι τοποθετημένο όπως στο Σχ. 2.8 α. Η περιστροφή γύρω από τον άξονα (1) το αφήνει όπως δείχνει το Σχ. 2.8 β, ενώ μια δεύτερη περιστροφή γύρω από τον άξονα (2) φέρνει το αντικείμενο στη θέση που φαίνεται στο Σχ. 2.8 γ. Αλλά αν στο αντικείμενο, όπως ήταν αρχικά προσανατολισμένο (Σχ. 2.8 δ), εφαρμόσουμε πρώτα την περιστροφή (2) (Σχ. 2.8 ε) και έπειτα την περιστροφή (1), το αντικείμενο καταλήγει στη θέση που δείχνει το Σχ. 2.8 στ. Ο προσανατολισμός στο έκτο σχήμα *δεν* είναι ο ίδιος όπως στο τρίτο. Είναι φανερό ότι ο αντιμεταθετικός νόμος της πρόσθεσης δεν ικανοποιείται από τέτοιες πεπερασμένες περιστροφές. Παρά το γεγονός ότι έχουν μέτρο και κατεύθυνση, οι πεπερασμένες περιστροφές δεν μπορούν να παρασταθούν με διανύσματα.

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Βεβαίως, δεν υπάρχει λόγος να ρωτήσει κανείς αν το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος ή διάνυσμα. Μια τέτοια όμως ερώτηση μπορεί να γίνει για το γινόμενο των διανυσμάτων. Υπάρχουν δύο τρόποι, ιδιαίτερα χρήσιμοι, για να ορίσουμε το γινόμενο δύο διανυσμάτων. Και τα δύο γινόμενα ικανοποιούν τον επιμεριστικό νόμο του πολλαπλασιασμού: Το γινόμενο του **A** επί το άθροισμα **B** + **C** είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων του **A** επί **B** και του **A** επί **C**. Ο ένας τρόπος πολλαπλασιασμού δίνει ως αποτέλεσμα ένα βαθμωτό μέγεθος, ενώ το αποτέλεσμα του άλλου πολλαπλασιασμού είναι, από πολλές απόψεις, ένα διάνυσμα. Και τα δύο γινόμενα είναι χρήσιμα στη Φυσική.

Άλλοι δυνατοί ορισμοί του γινομένου δεν είναι χρήσιμοι Π.χ., η έκφραση AB δεν είναι ένας χρήσιμος ορισμός για το γινόμενο δύο διανυσμάτων. Γιατί; Με AB εννοούμε το γινόμενο $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ των μέτρων των **A** και **B**. Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, τότε γενικά $AD \neq AB + AC$. Αυτή η απουσία της επιμεριστικής ιδιότητας κάνει το AB άχρηστο σαν γινόμενο των **A** και **B**.

Εσωτερικό γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** είναι, εξ ορισμού, το βαθμωτό μέγεθος που βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας το μέτρο του **A** με το μέτρο του **B** και στη συνέχεια με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας (βλ. Σχ. 2.9 α, β, γ). Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό.

Συχνά, το εσωτερικό γινόμενο λέγεται και *βαθμωτό* ή *στικτό γινόμενο*. Η τελευταία ονομασία προέρχεται από το συμβολισμό **A** · **B**, που εκφράζει το εσωτερικό γινόμενο:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})} \tag{2.2}$$

Το cos (**A**,**B**) είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των **A** και **B**. Βλέπουμε ότι για τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δεν χρησιμοποιούμε καθόλου ένα σύστημα συντεταγμένων. Ας σημειωθεί ότι cos (**A**,**B**) = cos (**B**,**A**), γεγονός που σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{2.3}$$

Το **A** · **B** το διαβάζουμε "**A** τελεία **B**" (ή "A εσωτερικό γινόμενο B").

Αν η γωνία μεταξύ των **A** και **B** βρίσκεται μεταξύ $\pi/2$ και $3\pi/2$, το cos (**A**,**B**) και το **A** · **B** θα είναι αρνητικά μεγέθη. Αν **A** = **B**, τότε cos (**A**,**B**) = 1 και

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2 = |\mathbf{A}|^2$$

Αν **A** · **B** = 0 και $A \neq 0$, $B \neq 0$, λέμε ότι το **A** είναι *ορθογώνιο* με το **B** ή κάθετο στο **B**. Ας σημειωθεί ότι $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο μοναδιαίων διανυσμάτων ισούται ακριβώς με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Η αλγεβρική τιμή της προβολής του **B** στην κατεύθυνση του **A** είναι:

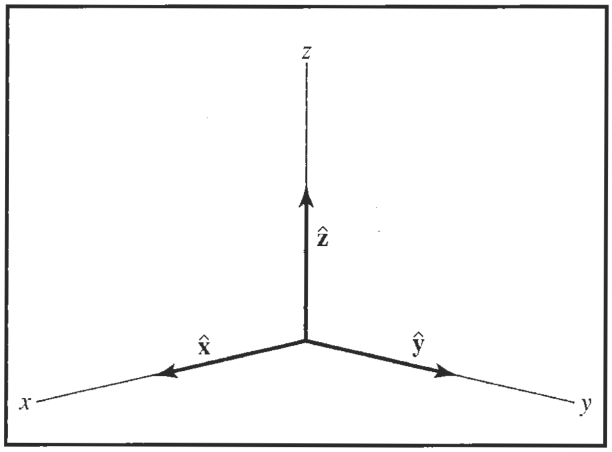
$$B\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = B\,\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{A}}$$

όπου το $\hat{\mathbf{A}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του **A**. Η προβολή του **A** στην κατεύθυνση του **B** είναι:

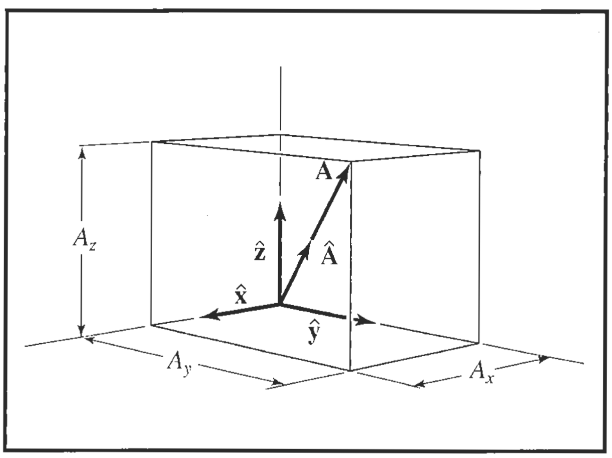
$$A\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

Δεν υπάρχει πράξη αντίστροφη του εσωτερικού πολλαπλασιάσμου. Αν **A** · **X** = b, δεν υπάρχει μονοσήμαντη λύση για το **X**. Η διαίρεση με ένα διάνυσμα είναι πράξη που δεν ορίζεται και δεν έχει κανένα νόημα.

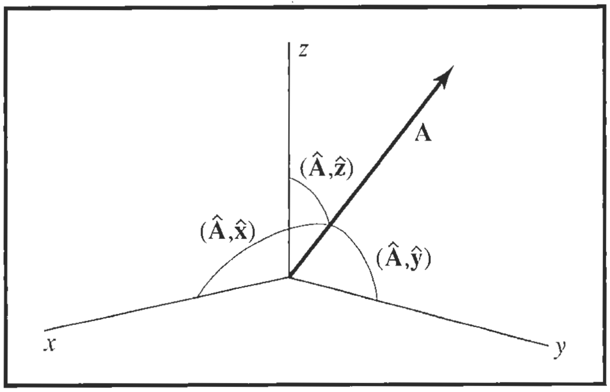
Συνιστώσες, μέτρα και διευθύνοντα συνημίτονα. Ας υποθέσουμε ότι τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ είναι τρία ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα, που ορίζουν ένα καρτεσιάνο σύστημα συντεταγμένων,



Σχ. 2.10 (*α*) Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ ορίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

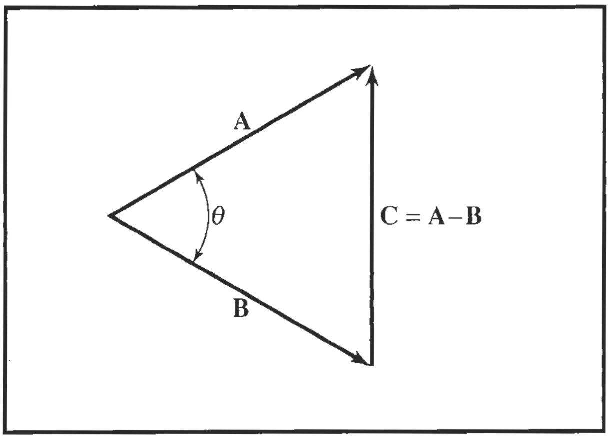


(*β*) $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$



Σχ. 2.11 Γωνίες στις οποίες αναφέρονται τα διευθύνοντα συνημίτονα. Ισχύει η σχέση:

$$\cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{x}}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{y}}) + \cos^2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{z}}) = 1$$



Σχ. 2.12 *(α)* Ο νόμος του συνημιτόνου, για εσωτερική γωνία τριγώνου:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \\ &= A^2 + B^2 - 2\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta \end{aligned}$$

όπως φαίνεται στο Σχ. 2.10 α[1]. Ένα οποιοδήποτε διάνυσμα **A** γράφεται ως

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \tag{2.4}$$

όπου τα A_x, A_y και A_z ονομάζονται *συνιστώσες* του **A** (βλ. Σχ. 2.10 β). Εύκολα αποδεικνύεται ότι $A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$.
Πράγματι,

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x$$

επειδή

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1$$

Το μέτρο του **A** εκφράζεται εύκολα από τις τρεις συνιστώσες του:

$$\begin{aligned} A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} &= \sqrt{(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})} \\ &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Αν θελήσουμε να γράψουμε μια έκφραση για το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{A}}$ (βλ. και πάλι το Σχ. 2.10 β), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{A}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}}}{A}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{A}\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{A_x}{A}\hat{\mathbf{x}} + \frac{A_y}{A}\hat{\mathbf{y}} + \frac{A_z}{A}\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Από το Σχ. 2.11 και την Εξ. (2.6) βλέπουμε ότι οι γωνίες που σχηματίζει το **A** με τους άξονες x, y, z έχουν συνημίτονα A_x/A, A_y/A και A_z/A, ή $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Αυτά ονομάζονται *διευθύνοντα συνημίτονα*. Βασική τους ιδιότητα είναι ότι το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με τη μονάδα, όπως μπορεί να δειχθεί εύκολα με τη βοήθεια της Εξ. (2.5).

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **A** και **B** εκφράζεται, συναρτήσει των συνιστωσών των διανυσμάτων, από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{2.7}$$

και είναι εύκολο να θυμάται κανείς την έκφραση αυτή.

[1] Ορθογώνια, όπως χρησιμοποιείται εδώ η λέξη, σημαίνει κάθετα ανά δύο.

Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου. Δίνουμε μερικές εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου.

1. *Νόμος του συνημιτόνου.* Ας θεωρήσουμε ότι $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους αυτής της ισότητας με τον εαυτό του (Σχ. 2.12 α) έχουμε

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}$$

ή

$$A^2 + B^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = C^2$$

Ξαναβρίσκουμε έτσι τη γνωστή τριγωνομετρική σχέση

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = C^2 \qquad (2.8)$$

Ομοίως, για την εξωτερική γωνία ενός τριγώνου, (Σχ. 2.12 β):

$$A^2 + B^2 + 2AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = D^2$$

Για το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των κατευθύνσεων δύο διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουμε τη σχέση:

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

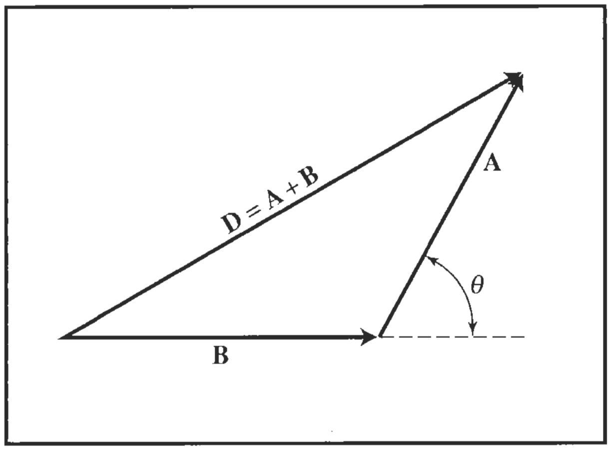
2. *Εξίσωση ενός επιπέδου.* Θεωρούμε ένα επίπεδο και ένα σημείο O εκτός του επιπέδου (Σχ. 2.13). Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{N}$ είναι το διάνυσμα που αρχίζει από το O, τελειώνει στο επίπεδο και είναι κάθετο προς αυτό. Ας υποθέσουμε εξάλλου ότι το $\mathbf{r}$ είναι ένα διάνυσμα με αρχή το O και τέλος ένα οποιοδήποτε σημείο P του επιπέδου. Η προβολή του $\mathbf{r}$ πάνω στο $\mathbf{N}$ είναι ίση με N. Έτσι, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = rN\cos(\mathbf{r},\mathbf{N}) = N^2$, και το επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{N} = N^2 \qquad (2.9)$$

Μπορούμε να ταυτίσουμε αυτή τη συμπυκνωμένη έκφραση με τη γνωστή από την αναλυτική γεωμετρία εξίσωση του επιπέδου:

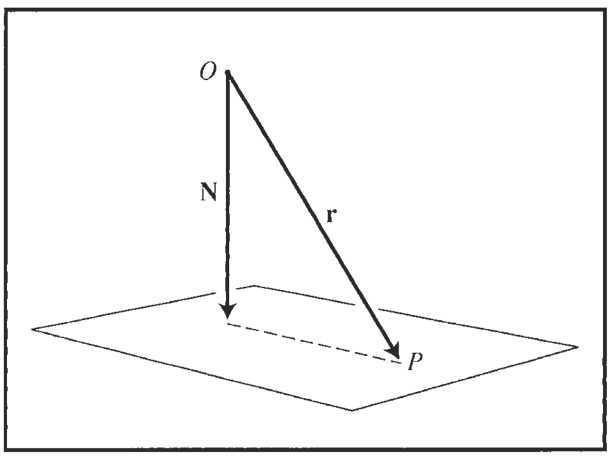
$$ax + by + cz = 1$$

Αρκεί γι' αυτόν τον σκοπό να θεωρήσουμε το O ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων (x,y,z) και να γράψουμε τα $\mathbf{N}$ και $\mathbf{r}$ με τη βοήθεια των συνιστωσών τους N_x, N_y, N_z και x, y, z. Τότε η Εξ. (2.9) παίρνει τη μορφή

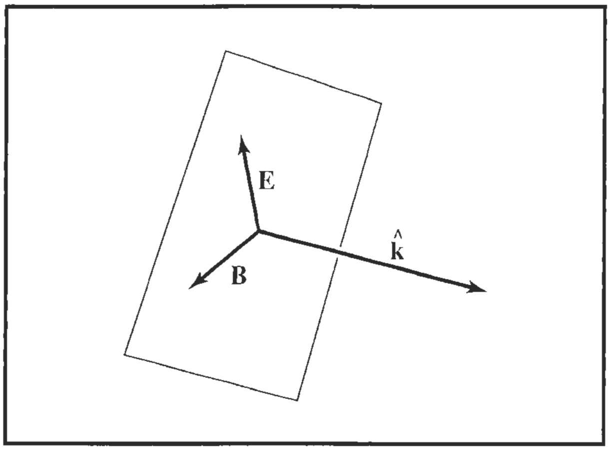


(β) Ο νόμος του συνημιτόνου, για εξωτερική γωνία τριγώνου:

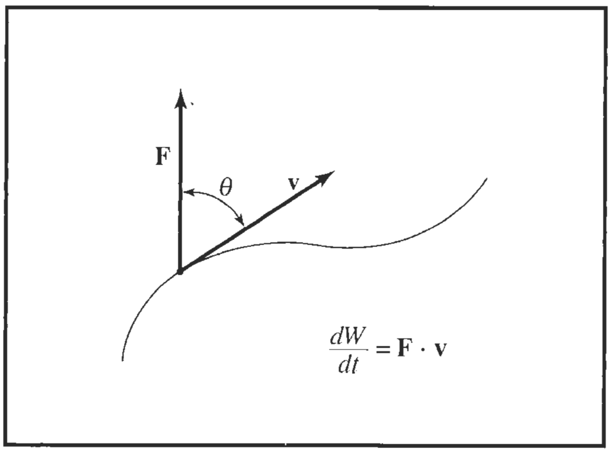
$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = D^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$



Σχ. 2.13 Εξίσωση ενός επιπέδου. $\mathbf{N}$ είναι το διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο, με αρχή το σημείο O και τέλος πάνω στο επίπεδο. Η εξίσωση του επιπέδου είναι $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = N^2$.



Σχ. 2.14 Ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον ελεύθερο χώρο. Τα δύο πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και προς την κατεύθυνση διάδοσης $\hat{\mathbf{k}}$. Έτσι $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.



Σχ. 2.15 Ρυθμός με τον οποίο μια δύναμη παράγει έργο. Η δύναμη $\mathbf{F}$ ασκείται σε ένα σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$.

$$(x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}) \cdot \left(N_x\,\hat{\mathbf{x}} + N_y\,\hat{\mathbf{y}} + N_z\,\hat{\mathbf{z}}\right) = N^2$$

που καταλήγει στην εξίσωση

$$x\,\frac{N_x}{N^2} + y\,\frac{N_y}{N^2} + z\,\frac{N_z}{N^2} = 1$$

η οποία έχει τη γνωστή μορφή.

3. *Ηλεκτρικά και μαγνητικά διανύσματα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος.* Έστω $\hat{\mathbf{k}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση διάδοσης ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον ελεύθερο χώρο (βλ. Σχ. 2.14). Τότε, τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$, βρίσκονται σε ένα επίπεδο κάθετο στο $\hat{\mathbf{k}}$ και είναι κάθετα μεταξύ τους. Μπορούμε να εκφράσουμε αυτές τις γεωμετρικές συνθήκες με τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

4. *Ρυθμός παραγωγής έργου.* Στη βασική Φυσική (βλ. επίσης Κεφ. 5), μαθαίνουμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο μια δύναμη $\mathbf{F}$ παράγει έργο, όταν εφαρμόζεται σε ένα σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, είναι ίσος με $F v \cos(\mathbf{F},\mathbf{v})$. Αναγνωρίζουμε σε αυτή την έκφραση το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Αν γράψουμε γενικά την παράγωγο dW/dt σαν σύμβολο του ρυθμού παραγωγής έργου, τότε (Σχ. 2.15)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{2.10}$$

5. *Ρυθμός με τον οποίο σαρώνεται ένας όγκος.* Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{S}$ κάθετο σε μια επίπεδη επιφάνεια, του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας. Έστω εξάλλου ότι η επιφάνεια μετακινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$ (χωρίς να μεταβάλλει τον προσανατολισμό της στο χώρο). Ο όγκος που καλύπτεται από την επιφάνεια S ανά μονάδα χρόνου είναι ένας κύλινδρος με βάση S και πλάγιο ύψος v (βλ. Σχ. 2.16), ή $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$. Επομένως, ο ρυθμός με τον οποίο σαρώνεται ο όγκος είναι:

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \tag{2.11}$$

Εξωτερικό γινόμενο

Υπάρχει κι ένα άλλο είδος γινομένου δύο διανυσμάτων, που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη Φυσική. Ως μέγεθος, το γινόμενο αυτό είναι διανυσματικό κι όχι βαθμωτό. Πάντως, ο διανυσματικός του χαρακτήρας είναι κάπως περιορισμένος. Το *εξωτερικό* (ή *διανυσματικό*) *γινόμενο* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (γράφεται και $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$) είναι εξ ορισμού ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.17 α, όταν αυτά τοποθετηθούν έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή. Το μέτρο του είναι $AB\,|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$.
Γράφουμε:

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\, AB\,|\sin(\mathbf{A}\,,\,\mathbf{B})|} \tag{2.12}$$

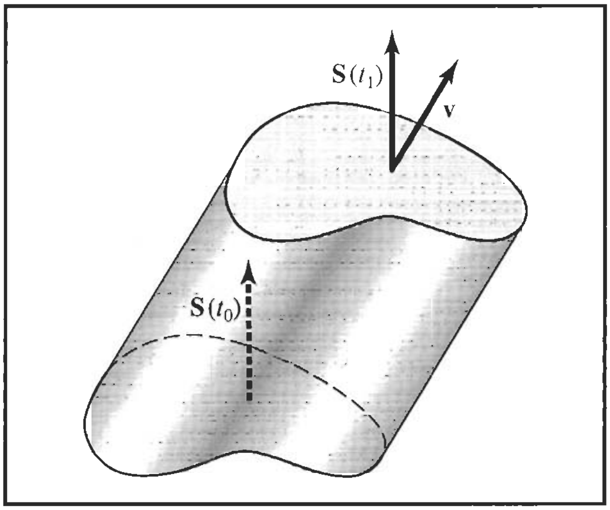
και διαβάζουμε "Α εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο Β".

Η φορά του $\mathbf{C}$ ορίζεται συμβατικά από τον λεγόμενο κανόνα του "δεξιόστροφου κοχλία": Το πρώτο από τα δύο διανύσματα ($\mathbf{A}$) στρέφεται προς το δεύτερο ($\mathbf{B}$), ακολουθώντας την συντομότερη γωνιάκη διαδρομή· η φορά του $\mathbf{C}$ ορίζεται τότε από τη διεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας, που υποθέτουμε ότι στρέφεται όπως ακριβώς το διάνυσμα $\mathbf{A}$ (βλ. Σχ. 2.17 β).

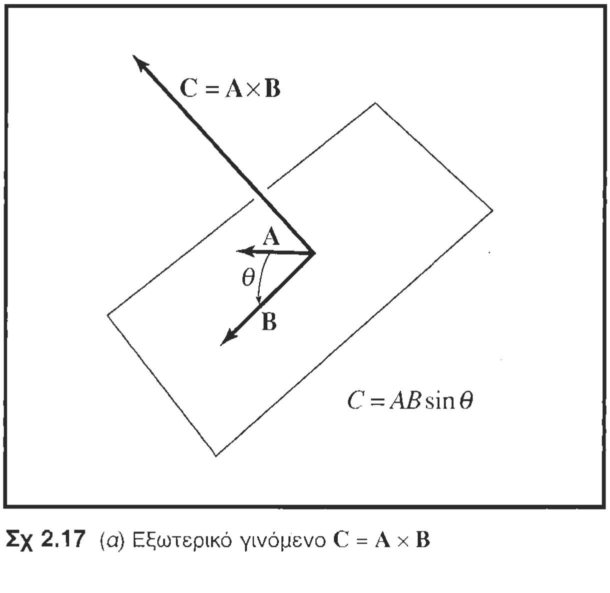
Μπορούμε να διατυπώσουμε τον κανόνα για την κατεύθυνση του $\mathbf{C}$ με διαφορετικό τρόπο: Μεταφέρουμε πρώτα τα δύο διανύσματα, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, ώστε να έχουν κοινή αρχή, ορίζοντας έτσι ένα επίπεδο. Το διάνυσμα $\mathbf{C}$ είναι κάθετο στο επίπεδο αυτό. Κατά συνέπεια, το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{A}$ και στο $\mathbf{B}$. Υποθέτουμε κατόπιν ότι στρέφουμε το $\mathbf{A}$ πρός το $\mathbf{B}$ κατά τη συντομότερη γωνιακή διαδρομή. Διπλώνουμε τα δάκτυλα του δεξιού χεριού (εκτός από τον αντίχειρα) έτσι, ώστε να δείχνουν τη φορά περιστροφής του $\mathbf{A}$ προς το $\mathbf{B}$ (Σχ. 2.17 β). Ο αντίχειρας δείχνει τότε τη φορά του $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Ας σημειωθεί ότι με αυτή τη σύμβαση για τη φορά του $\mathbf{C}$, το γινόμενο $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα αντίθετο του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (βλ. Σχ. 2.17 γ):

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\,\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{2.13}$$

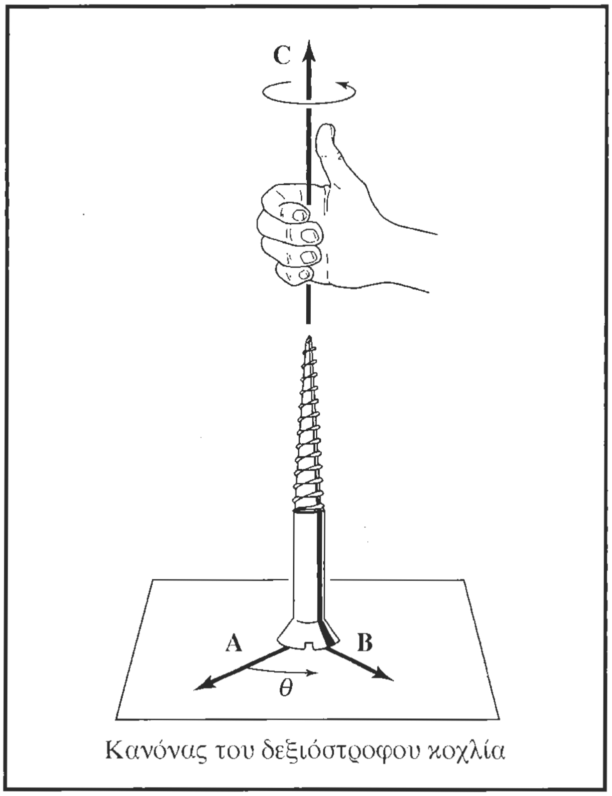
Επομένως, η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει για το εξωτερικό γινόμενο. Η σειρά με την οποία γράφουμε τα δύο διανύσματα στο εξωτερικό γινόμενο έχει σημασία. Από την Εξ. (2.12) προκύπτει ότι $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$. Ώστε, το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος επί το ίδιο το διάνυσμα είναι μηδέν. Το εξωτερικό γινόμενο ακολουθεί τον επιμεριστικό νόμο:



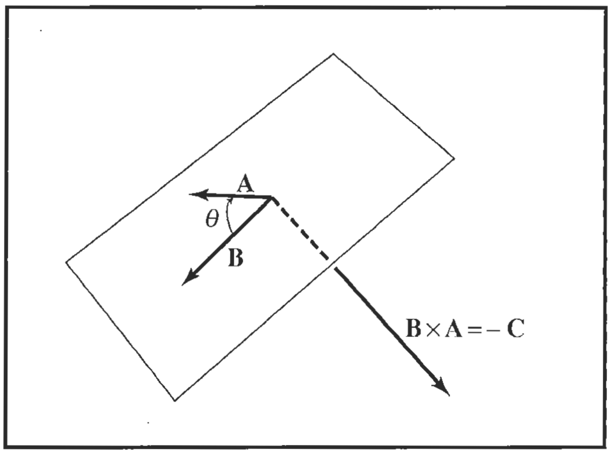
Σχ. 2.16 Σάρωση όγκου από την επιφάνεια $\mathbf{S}$, καθώς αυτή κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t_1.



Σχ 2.17 (*α*) Εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$



Σχ 2.17 (συνέχεια). (β) Τρόποι προσδιορισμού της φοράς του διανύσματος $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$



(γ) Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ είναι αντίθετο του $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

Η απόδειξη είναι λίγο μακροσκελής και μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο διανυσματικής ανάλυσης. Σημειώνουμε ότι, όταν αναπτύσσουμε ένα τέτοιο γινόμενο, φροντίζουμε να διατηρούμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα διανύσματα, σε κάθε βήμα.

Καρτεσιανές συνιστώσες εξωτερικού γινομένου. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προσδιορίσαμε τα διευθύνοντα συνημίτονα ενός διανύσματος **A** (βλ. Εξ. 2.6), μπορούμε τώρα να βρούμε και τα ημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το **A** με τους άξονες των συντεταγμένων. Ο τρόπος όμως αυτός δεν είναι και πολύ εξυπηρετικός· γι' αυτό προτιμάμε να βρίσκουμε τα ημίτονα αυτά από τα αντίστοιχα συνημίτονα. Συχνά είναι επίσης ωφέλιμο να εκφράζουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συνιστώσες αυτών των διανυσμάτων. Γράφουμε γι' αυτό το σκοπό:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \left(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}\right) \times \left(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}\right) \\
&= A_xB_y\left(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\right) + A_xB_z\left(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}\right) \\
&\quad + A_yB_x\left(\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}\right) + A_yB_z\left(\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}\right) \\
&\quad + A_zB_x\left(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}\right) + A_zB_y\left(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}\right)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$$

Τίθεται τώρα το ερώτημα: Με τι είναι ίσο το γινόμενο $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$; με $\hat{\mathbf{z}}$ ή με $-\hat{\mathbf{z}}$; Αυθαίρετα διαλέγουμε το $\hat{\mathbf{z}}$, οπότε αυτομάτως έχουμε ορίσει και τον προσανατολισμό των τριών καρτεσιανών αξόνων, έχουμε δηλαδή διαλέξει *δεξιόστροφο σύστημα αξόνων,* όπως λέγεται. Συμφωνούμε να χρησιμοποιούμε πάντοτε στη Φυσική το δεξιόστροφο σύστημα αξόνων (βλ. Σχ. 2.10 α και β).

Έχουμε $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$, κ.ο.κ. οπότε:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(A_xB_y - A_yB_x\right) \quad (2.14)$$

Σημειώνουμε ότι οι τρεις όροι A_xB_y, A_yB_z και A_zB_x, που εμφανίζονται με θετικό πρόσημο, αντιστοιχούν σε κυκλική εναλλαγή των δεικτών *x, y, z* κατά τη φορά $x \to y \to z$. Διαφορετικά το πρόσημο είναι αρνητικό. Την έκφραση (2.14) μπορούμε επίσης να τη δούμε και σαν ορίζουσα:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (2.15)$$

Αυτή η μορφή είναι ευκολότερη για απομνημόνευση. Στην πρώτη σειρά της ορίζουσας γράφουμε τα τρία μοναδιαία διανύσματα. Στη δεύτερη σειρά γράφουμε τις συνιστώσες του πρώτου διανύσματος, και στην τρίτη τις συνιστώσες του δεύτερου διανύσματος.

Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου. Στις αμέσως επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με μερικές εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου.

1. *Εμβαδόν παραλληλογράμμου.*
   Το μέτρο

   $$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})|$$

   είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές **A** και **B** (ή το διπλάσιο του εμβαδού τριγώνου με πλευρές **A** και **B**) (βλ. Σχ. 2.18 α). Η διεύθυνση του $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο του παραλληλογράμμου. Έτσι μπορούμε να δούμε το $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ σαν τη διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Επειδή εξάλλου οι πλευρές **A** και **B** διακρίνονται και από το στοιχείο της φοράς, έπεται ότι η διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού έχει κι αυτή τη φορά της. Υπάρχουν πολλά φυσικά προβλήματα όπου η έννοια της "κατευθυνόμενης επιφάνειας" διευκολύνει πολύ τη λύση [βλ. π.χ. Εξ. (2.11)].

2. *Όγκος παραλληλεπιπέδου.* Το βαθμωτό μέγεθος

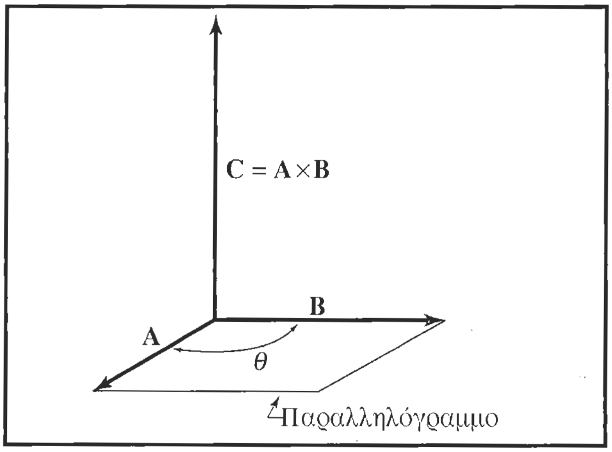
   $$|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}| = V$$

   είναι ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου με εμβαδόν βάσης $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ και πλάγιο ύψος **C** (Σχ. 2.18 β). Αν τα τρία διανύσματα **A**, **B**, **C** είναι συνεπίπεδα, ο όγκος είναι μηδέν. Και αντιστρόφως, αν ισχύει $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=0$, τότε τα τρία διανύσματα **A**, **B**, **C**, είναι συνεπίπεδα.

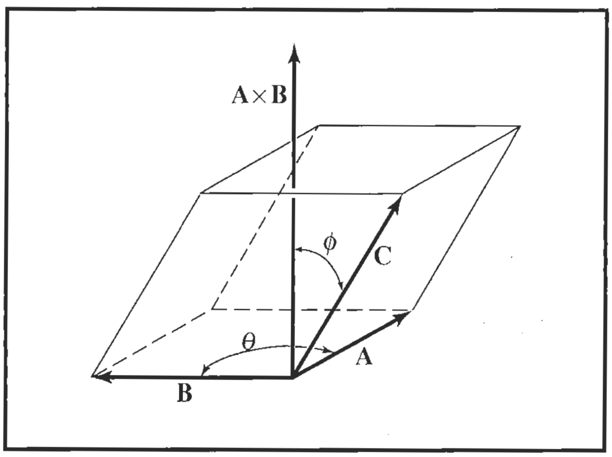
   Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

   $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

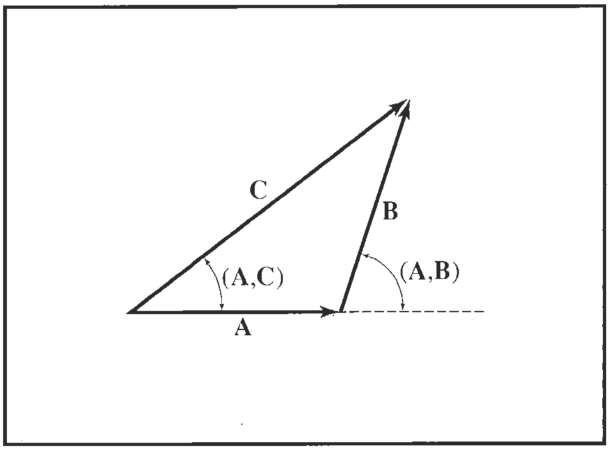
Συμπεραίνουμε ότι *τα σύμβολα $\cdot$ και $\times$ στο παραπάνω μεικτό γινόμενο μπορούν να εναλλαγούν, χωρίς να μεταβληθεί το αποτέλεσμα.* Υπενθυμίζουμε όμως ότι:



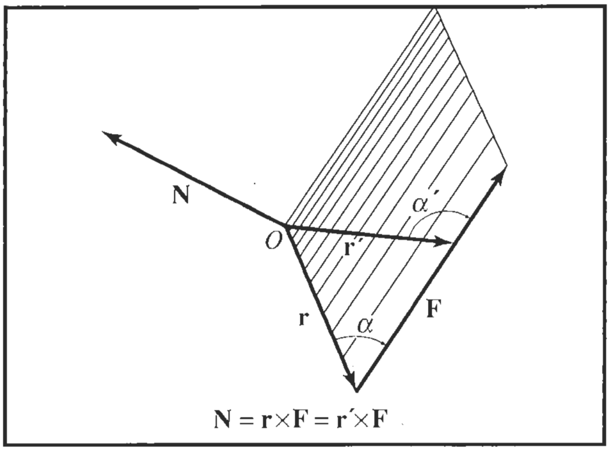
Σχ 2.18 (*α*) Διανυσματική απεικόνιση του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου: $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB|\sin\theta|\hat{\mathbf{C}}$



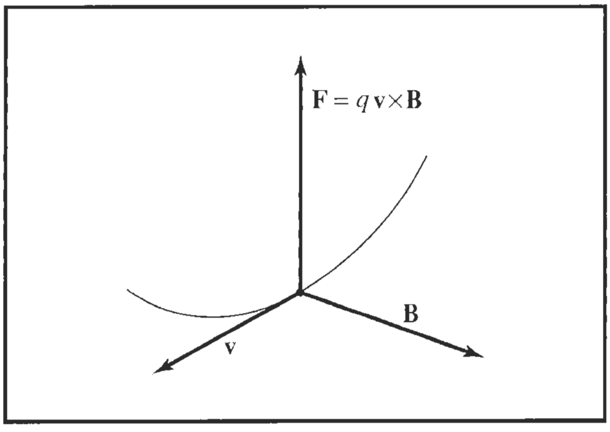
(*β*) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ = εμβαδόν βάσης × ύψος = όγκος παραλληλεπιπέδου. $V=|ABC\sin\theta\cos\phi|$.



(γ) Νόμος των ημιτόνων για το τρίγωνο. Ας σημειωθεί ότι $\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sin[\pi - (\mathbf{A},\mathbf{B})]$



(δ) Η ροπή ως εξωτερικό γινόμενο.



(ε) Η δύναμη που ασκεί ένα μαγνητικό πεδίο πάνω σε ένα κινούμενο θετικό φορτίο.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$$

Το μεικτό γινόμενο δεν μεταβάλλεται αν μεταθέσουμε κυκλικά τα τρία διανύσματα (κυκλικές μεταθέσεις του ABC είναι ή BCA και ή CAB). Όμως το γινόμενο αλλάζει πρόσημο, αν η μετάθεση δεν είναι κυκλική (μη κυκλικές μεταθέσεις του ABC είναι οι BAC, ACB και CBA).

[Το μεικτό γινόμενο εκφράζεται και ως:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, \qquad (\Sigma.\tau.\varepsilon.)]$$

3. *Νόμος των ημιτόνων.* Θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα διανύσματα **A**, **B**, **C** όπου $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ (Σχ. 2.18 γ). Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη, εξωτερικά, με το **A**:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Αλλά $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$, ενώ τα μέτρα των δύο μελών πρέπει να είναι ίσα. Άρα

$$AC \sin(\mathbf{A},\mathbf{C}) = AB \sin(\mathbf{A},\mathbf{B})$$

ή

$$\frac{\sin(\mathbf{A},\mathbf{C})}{B} = \frac{\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})}{C} \qquad (2.16)$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως *νόμος των ημιτόνων για ένα τρίγωνο.*

4. *Ροπή.* Η έννοια της ροπής έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη της κίνησης των στερεών σωμάτων (βλ. Κεφ. 8). Η ροπή μιας δύναμης (ή γενικότερα ενός διανύσματος) **F** ως προς κάποιο σημείο αναφοράς O, ορίζεται από τη διανυσματική σχέση:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (2.17)$$

όπου **r** είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο αναφοράς και τέλος το σημείο εφαρμογής της δύναμης **F**. Όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.18 δ, η ροπή είναι κάθετη στα **r** και **F**. Το μέτρο του **N** είναι $rF\sin\alpha$. Αλλά $r\sin\alpha$ είναι η κάθετη απόσταση του σημείου αναφοράς (O στο σχήμα) από την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το **F**. Επίσης, κατά το σχήμα: $r\sin\alpha = r'\sin\alpha'$. Επομένως, η ροπή είναι ανεξάρτητη, σε μέτρο και κατεύθυνση, από το σημείο της ευθείας εφαρμογής του **F** στο οποίο καταλήγει το **r**.

5. *Μαγνητική δύναμη πάνω σε κινούμενο φορτίο.* Σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σημειακό σωματίδιο, που κινείται με ταχύτητα **v** στην περιοχή ενός μαγνητικού πεδίου **B**, ασκείται μια δύναμη. Το μέτρο της είναι ανάλογο του γινομένου vB_1, όπου B_1 η συνιστώσα του **B** η κάθετη στο διάνυσμα **v**. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του εξωτερικού γινομένου, έχουμε (βλ. Σχ. 2.18 ε):

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{2.18}$$

όπου q είναι το ηλεκτρικό φορτίο του σωματιδίου.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Η ταχύτητα **v** ενός σωματιδίου είναι διανυσματικό μέγεθος. Το ίδιο και η επιτάχυνση **a**. Ως *ταχύτητα* ορίζουμε το ρυθμό της μεταβολής της θέσης ενός σωματιδίου ως προς το χρόνο. Η θέση του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή t καθορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$, που συνδέει κάποιο σταθερό σημείο αναφοράς O με το σωματίδιο (Σχ. 2.19 α). Το διάνυσμα **r** ονομάζεται *διάνυσμα θέσης* του σωματιδίου ως προς το σημείο O. Με την πάροδο του χρόνου, το σωματίδιο κινείται πάνω σε μια τροχιά, και το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης μεταβάλλει μέτρο και κατεύθυνση (Σχ. 2.19 β). Η διαφορά μεταξύ $\mathbf{r}(t_2)$ και $\mathbf{r}(t_1)$ είναι ένα διάνυσμα (βλ. Σχ. 2.19 γ):

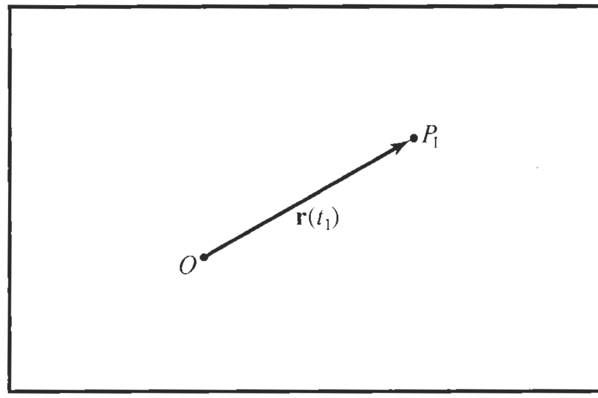
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$$

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα **r** ως συνάρτηση (μια διανυσματική συνάρτηση) μόνο της αριθμητικής μεταβλητής t, το διάνυσμα $\Delta\mathbf{r}$ θα είναι πλήρως καθορισμένο, όταν οι δύο τιμές t_1 και t_2 είναι γνωστές. Έτσι, στο Σχ. 2.19 δ, το $\Delta\mathbf{r}$ παριστάνεται από τη χορδή P_1P_2. Ο λόγος:

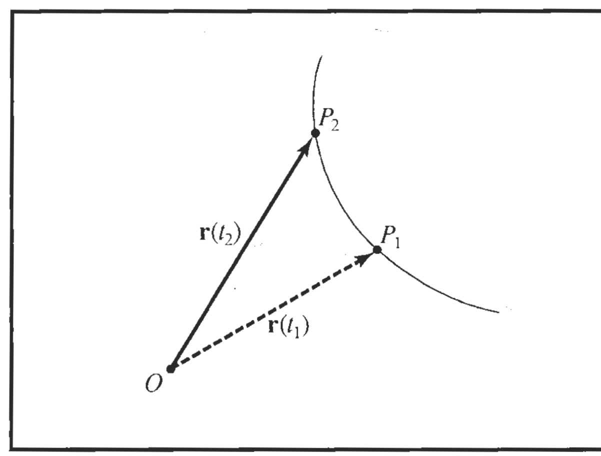
$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό με τη χορδή P_1P_2 αλλά πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $1/\Delta t$. Όταν το Δt τείνει στο μηδέν, το P_2 προσεγγίζει το P_1 και η χορδή P_1P_2 τείνει στην εφαπτομένη της τροχιάς του σωματιδίου στο σημείο P_1. Τότε το διάνυσμα

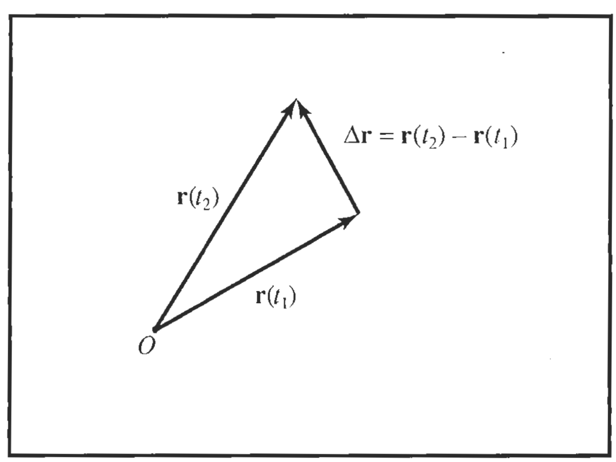
$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad \text{τείνει στο} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$



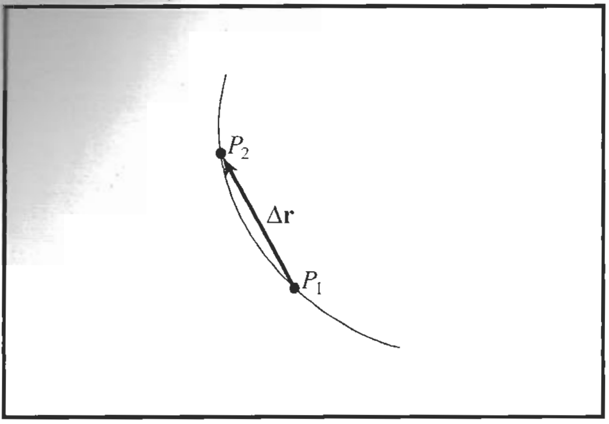
Σχ. 2.19 (*α*) Η θέση P_1 του σωματιδίου τη στιγμή t_1 καθορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}(t_1)$ που έχει αρχή το σταθερό σημείο O και τέλος το P_1.



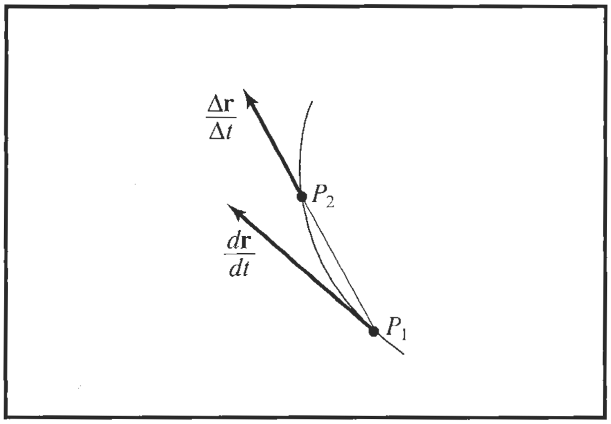
(*β*) Τη στιγμή t_2, το σωματίδιο έχει προχωρήσει στη θέση P_2.



(*γ*) Το διάνυσμα $\Delta\mathbf{r}$ είναι η διαφορά μεταξύ $\mathbf{r}(t_2)$ και $\mathbf{r}(t_1)$.



(δ) $\Delta\mathbf{r}$ είναι η χορδή μεταξύ των σημείων P_1 και P_2 που ανήκουν στην τροχιά του σωματιδίου.



(ε) Καθώς $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$, το διάνυσμα $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ (συγγραμμικό της χορδής) τείνει προς το διάνυσμα της ταχύτητας $d\mathbf{r}/dt$ (συγγραμμικό της εφαπτομένης της τροχιάς στο σημείο P_1).

Το $d\mathbf{r}/dt$ είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο της τροχιάς στο σημείο P. Η φορά του είναι εκείνη που αντιστοιχεί σε αύξηση της μεταβλητής t (δηλ. του χρόνου) κατά μήκος της τροχιάς (Σχ. 2.19 ε).

Ταχύτητα

Το διάνυσμα

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

ονομάζεται *παράγωγος του* **r** *ως προς το χρόνο*. Εξ ορισμού, η ταχύτητα (διανυσματικό μέγεθος) είναι:

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.19}$$

Το μέτρο της ταχύτητας $\upsilon = |\mathbf{v}|$ είναι προφανώς βαθμωτό μέγεθος. Με τη βοήθεια των συνιστωσών, το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα γράφονται:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \tag{2.20}$$

και

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{z}} = \upsilon_x\hat{\mathbf{x}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{y}} + \upsilon_z\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.21}$$

Επομένως και

$$\upsilon = |\mathbf{v}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

Έχουμε υποθέσει ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ του συστήματος συντεταγμένων είναι ανεξάρτητα του χρόνου, δηλαδή

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt} = 0$$

Γενικά, μπορούμε να γράψουμε το $\mathbf{r}(t)$ διανυσματικά, χωρίς να χρησιμοποιούμε συνιστώσες όπως στην Εξ. (2.20)· μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος $r(t)$ είναι το μήκος (ή μέτρο) του διανύσματος $\mathbf{r}(t)$, και $\hat{\mathbf{r}}(t)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{r}(t)$. Η παράγωγος του $\mathbf{r}(t)$ ορίζεται τώρα ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t)\,\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} \quad (2.22)$$

Μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή[1] διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους στα αναπτύγματα σε σειρές των $r(t + \Delta t)$ και $\hat{\mathbf{r}}(t+\Delta t)$:

$$\left[r(t) + \frac{dr}{dt}\Delta t\right]\left[\hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\Delta t\right] - r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t) =$$

$$= \Delta t\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right) + (\Delta t)^2\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτή την έκφραση στη σχέση (2.22), βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 καθώς $\Delta t \to 0$ και επομένως:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (2.23)$$

Το $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$. Η (2.23) αποτελεί παράδειγμα εφαρμογής του γενικού κανόνα για την παραγώγιση του γινομένου μιας βαθμωτής συνάρτησης $a(t)$ επί ένα διάνυσμα $\mathbf{b}(t)$:

$$\frac{d}{dt}a\mathbf{b} = \frac{da}{dt}\mathbf{b} + a\frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (2.24)$$

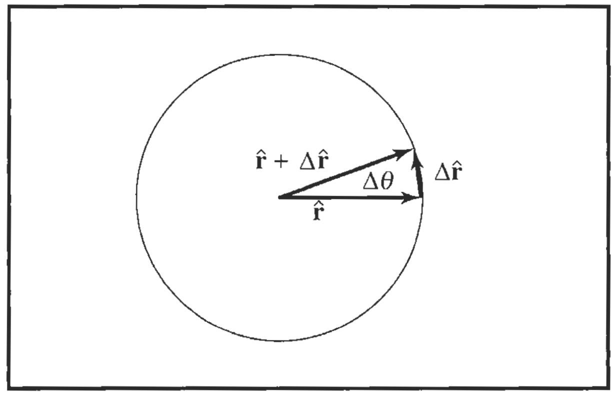
Δύο όροι λοιπόν συνεισφέρουν στην ταχύτητα κατά την Εξ. (2.23). Ο πρώτος προέρχεται από τη μεταβολή του μέτρου r, ο δεύτερος από τη μεταβολή της κατεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}$.

Στο Κεφ. 9 θα εφαρμόσουμε την Εξ. (2.23) ειδικά για την ταχύτητα $\mathbf{v}$ στην κίνηση σε ένα επίπεδο. Με αυτή την προοπτική, αναζητούμε να εκφράσουμε διαφορετικά το $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ με τη βοήθεια του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$ και του μοναδιαίου γωνιακού διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Το τελευταίο το ορίζουμε κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$, και με φορά αυτήν της αυξάνουσας θ.

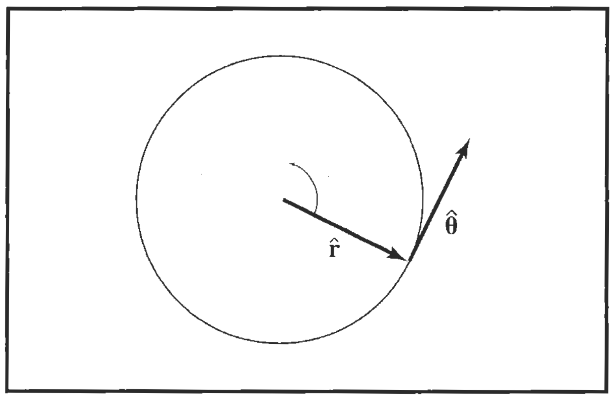
Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός των δύο αυτών μοναδιαίων διανυσμάτων, θεωρούμε την κίνηση ενός σημείου σε κυκλική τροχιά. Στην περίπτωση αυτή, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ μεταβάλλεται στο χρονικό διάστημα Δt κατά τη διανυσματική ποσότητα $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ και γίνεται $\hat{\mathbf{r}} + \Delta\hat{\mathbf{r}}$ (Σχ. 2.20 α). Αν το Δt θεωρηθεί απειροστό, τότε το $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ τείνει να γίνει συγγραμμικό με το εγκάρσιο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ που δείχνει το Σχ. 2.20 β.

Προχωρώντας, βρίσκουμε ότι, καθώς το Δt (και συγχρόνως

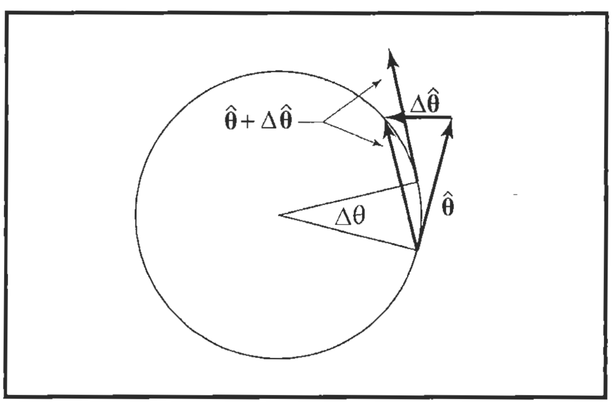
[1] Βλ. στο τέλος αυτού του κεφαλαίου για το ζήτημα της ανάπτυξης σε σειρά



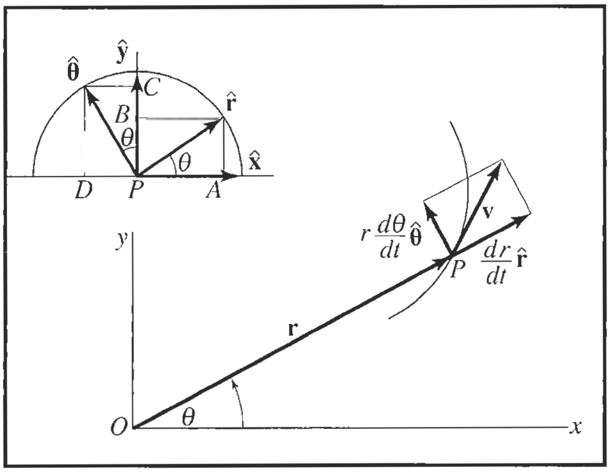
Σχ. 2.20 (*α*) $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ είναι η μεταβολή του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$.



(*β*) Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$ και κατευθύνεται κατά την έννοια που αυξάνει το θ.



(*γ*) $\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι η μεταβολή του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.



Σχ 2.21 Συνιστώσες του διανύσματος **v** εκπεφρασμένες με τη βοήθεια των $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Φαίνεται επίσης η σχέση ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$.

το $\Delta\theta$) τείνει στο μηδέν, το μέτρο του $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ παίρνει την απλή έκφραση:

$$|\Delta\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\mathbf{r}}|\,\Delta\theta = \Delta\theta$$

(επειδή $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$). Έτσι, το διάνυσμα $\Delta\hat{\mathbf{r}}$ και ο λόγος $\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t$ γράφονται:

$$\Delta\hat{\mathbf{r}} = \Delta\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Στο όριο $\Delta t \to 0$, βρίσκουμε τελικά ότι η παράγωγος του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$ ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.25}$$

Με τη βοήθεια του Σχ. 2.20 γ και με ανάλογους συλλογισμούς, βρίσκουμε ότι η παράγωγος του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{2.26}$$

[Μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και ως εξής (με αναφορά στο Σχ. 2.21)

$$\hat{\mathbf{r}} = (PA)\,\hat{\mathbf{x}} + (PB)\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -(PD)\,\hat{\mathbf{x}} + (PC)\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

επειδή τα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ έχουν μοναδιαίο μήκος.
Παραγωγίζοντας ως προς θ,

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{y}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{r}}$$

Επομένως και

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\theta}{dt}$$

όπως έχει ήδη βρεθεί. (Σ.τ.ε.)]

Θεωρούμε τώρα μια τυχαία επίπεδη κίνηση ενός σημείου (Σχ. 2.21). Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.25), η έκφραση (2.23) για το **v** γράφεται:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.27}$$

Διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v}$, σε κάθε στίγμη, προκύπτει από σύνθεση δύο διανυσματικών όρων, της ακτινικής συνιστώσας $(dr/dt)\,\hat{\mathbf{r}}$ και της εγκάρσιας συνιστώσας $r\,d\hat{\mathbf{r}}/dt = r\,(d\theta/dt)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι επίσης ένα διανυσματικό μέγεθος. Έχει την ίδια σχέση με το $\mathbf{v}$, που έχει το $\mathbf{v}$ με το $\mathbf{r}$. Η εξίσωση ορισμού της επιτάχυνσης είναι:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{2.28}$$

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συνιστώσες και τη σχέση (2.21), βρίσκουμε:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.29}$$

Μελλοντικά (βλ. Κεφ. 9) θα χρειαστούμε επίσης το $\mathbf{a}$ σαν συνάρτηση των r και θ. Από την (2.27) έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.25) και (2.26) για τα $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ και $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt$, η παραπάνω έκφραση γράφεται ως:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}}$$

Επομένως

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{r}} + \left|r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right|\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

όπου, σύμφωνα με την ευρέως χρησιμοποιούμενη σύμβαση, κάθε μια τελεία πάνω από ένα σύμβολο υποδηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο.

Ύστερα από ορισμένες απλές μαθηματικές πράξεις, καταλήγουμε στη συνηθισμένη μορφή:

$$\boxed{\mathbf{a} = \left|\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right|\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left|\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right)\right|\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{2.30}$$

Αυτή η έκφραση είναι χρήσιμη για τις κυκλικές κινήσεις (βλ. παρακάτω) και για τη μελέτη της κίνησης ενός σωματιδίου γύρω από ένα κέντρο δύναμης (βλ. Κεφ. 9), γιατί τότε ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και $r^2 \frac{d\theta}{dt} =$ σταθ.

■ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κυκλική κίνηση

Αυτό το παράδειγμα είναι εξαιρετικά σημαντικό, γιατί υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κυκλικής κίνησης στη Φυσική και στην Αστρονομία. Αναζητούμε συγκεκριμένες εκφράσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωματιδίου, που κινείται με ταχύτητα που έχει σταθερό μέτρο, σε κυκλική τροχιά με σταθερή ακτίνα r (βλ. Σχ. 2.22). Μια τέτοια κίνηση σε κυκλική τροχιά μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$\mathbf{r}(t) = r\,\hat{\mathbf{r}}(t) \tag{2.31}$$

όπου το r είναι σταθερό, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό.

Μπορούμε να προχωρήσουμε με μια από τις εξής δύο μεθόδους: ή να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις (2.27) και (2.30) που είναι συναρτήσεις των r και θ, ή να χρησιμοποιήσουμε σταθερούς άξονες στο χώρο (με μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$) και να εφαρμόσουμε τις Εξ. (2.21) και (2.29)

Μέθοδος 1. Εφόσον $r =$ σταθ., η Εξ. (2.27) μας δίνει $\mathbf{v} = r\,(d\theta/dt)\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Συνήθως παριστάνουμε τη γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt$ με το γράμμα ω και τη μετράμε σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s). Ειδικά στην περίπτωσή μας, η ω είναι σταθερή. Επομένως

$$\mathbf{v} = r\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

οπότε έχουμε για το σταθερό μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου:

$$v = \omega r \tag{2.32}$$

Για την επιτάχυνση, η Εξ. (2.30) με $r =$ σταθ. και $d\theta/dt = \omega$ γράφεται

$$\boxed{\mathbf{a} = -r\omega^2\hat{\mathbf{r}}} \tag{2.33}$$

δηλαδή η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο και κατευθύνεται προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Μέθοδος 2. Γράφουμε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε χρονική στιγμή t, χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες και τη σχέση (2.20), ως:

$$\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}} \tag{2.34}$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας θα είναι, όπως προκύπτει από την Εξ. (2.21) με $r =$ σταθ.,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{x}} + \omega r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{y}} \tag{2.35}$$

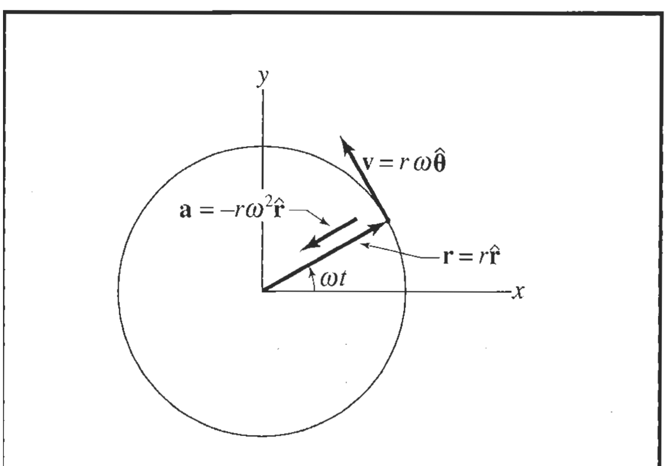
Για το μέτρο της ταχύτητας έχουμε:

$$v = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \omega r\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \omega r \tag{2.36}$$

σε συμφωνία με την Εξ. (2.32). Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{r}$ δείχνοντας ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Εφαρμόζοντας την Εξ. (2.29), βρίσκουμε την επιτάχυνση σαν παράγωγο του $\mathbf{v}$ ως προς το χρόνο. Η παραγώγιση της Εξ. (2.35) δίνει:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{x}} - \omega^2 r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{y}}$$



Σχ. 2.22 Σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r. Η σταθερή γωνιακή ταχύτητα είναι ω. Φαίνονται επίσης η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου.

$$= -\omega^2 (r \cos \omega t \, \hat{\mathbf{x}} + r \sin \omega t \, \hat{\mathbf{y}})$$

$$= -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 r \, \hat{\mathbf{r}} \qquad (2.37)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο με εκείνο της μεθόδου 1 (Εξ. 2.33). Η επιτάχυνση έχει το σταθερό μέτρο $a = \omega^2 r$ και κατευθύνεται προς το κέντρο, όπως υποδεικνύει η παρουσία του $-\hat{\mathbf{r}}$. Επειδή $v = \omega r$ (Εξ. 2.36 ή 2.32), μπορούμε να γράψουμε το μέτρο a με τη μορφή:

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (2.38)$$

Την επιτάχυνση αυτή την ονομάζουμε *κεντρομόλο*.

Η γωνιακή ταχύτητα ω συνδέεται πολύ απλά με τη συχνότητα f. Στη μονάδα του χρόνου, το διάνυσμα της Εξ. (2.34) σαρώνει ω rad. Δηλαδή το ω εκφράζει τον αριθμό ακτινίων που σαρώνονται στη μονάδα του χρόνου. Αλλά η συχνότητα f ορίζεται ως ο αριθμός πλήρων περιστροφών ανά μονάδα χρόνου. Εφόσον μια πλήρης περιστροφή αντιστοιχεί σε 2π ακτίνια, θα έχουμε:

$$2\pi f = \omega$$

Η *περίοδος* T της κίνησης είναι εξ ορισμού ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη περιστροφή. Από την Εξ. (2.34) συμπεραίνουμε ότι μια περιστροφή συμπληρώνεται σε χρόνο T, τέτοιον ώστε $\omega T = 2\pi$, άρα:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Σαν αριθμητικό παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι $f = 60$ κύκλοι ανά δευτερόλεπτο ή 60 hertz (Hz). Τότε η περίοδος είναι:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017 \text{ s}$$

και η γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/s}$$

Αν η κυκλική τροχιά έχει ακτίνα 10 cm, τότε το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$v = \omega r \approx (377)(10) \approx 3{,}8 \times 10^3 \text{ cm/s}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς είναι:

$$a = \omega^2 r \approx (377)^2 (10) \approx 1{,}42 \times 10^6 \text{ cm/s}^2$$

Στο Κεφ. 4 θα συναντήσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα που δείχνει ότι ένα σταθερό σημείο πάνω στον ισημερινό της Γης έχει επιτάχυνση, εξαιτίας της περιστροφής της Γης περί τον άξονά της, με μέτρο 0,034 m/s^2 περίπου.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η μη εξάρτηση των νόμων της Φυσικής από το συγκεκριμένο σύστημα αξόνων που επιλέγουμε κάθε φορά, έχει πολύ βασική σημασία. Γι' αυτό το λόγο είναι προτιμότερος ο διανυσματικός συμβολισμός. Ας θεωρήσουμε το μέτρο ενός διανύσματος σε δύο διαφορετικά συστήματα αξόνων, με κοινή αρχή, και τέτοια ώστε το δεύτερο να προκύπτει από το πρώτο ύστερα από μια ορισμένη περιστροφή (βλ. Σχ. 2.23). Στα δύο αυτά συστήματα μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

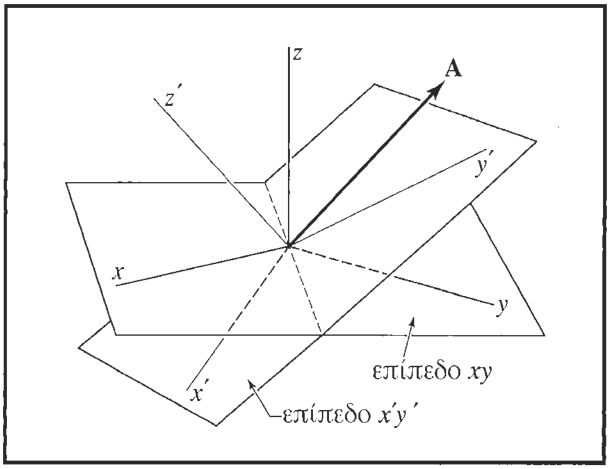
και

$$\mathbf{A} = A_{x'} \hat{\mathbf{x}}' + A_{y'} \hat{\mathbf{y}}' + A_{z'} \hat{\mathbf{z}}'$$

Εφόσον το $\mathbf{A}$ παραμένει αμετάβλητο, το A^2 πρέπει επίσης να μη μεταβάλλεται. Επομένως:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$$

Με άλλα λόγια, το μέτρο ενός διανύσματος είναι το ίδιο ως προς όλα τα καρτεσιανά συστήματα αναφοράς που διαφέρουν



Σχ. 2.23 Το διάνυσμα $\mathbf{A}$ μπορεί να περιγραφεί είτε στο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) είτε στο (x',y',z'). Το σύστημα αξόνων (x',y',z') προκύπτει από το (x,y,z) με μια αυθαίρετη περιστροφή. Λέμε ότι το A^2 είναι ένα αναλλοίωτο μέγεθος ως προς την περιστροφή. Αυτό σημαίνει ότι

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2 \, .$$

μόνο κατά μια περιστροφή των αξόνων. Ένα τέτοιο μέγεθος ονομάζεται αναλλοίωτο. Στο πρόβλημα 20 (βλ. τέλος αυτού του κεφαλαίου) θα εξετάσουμε μια μέθοδο για τη διαπίστωση του αναλλοίωτου. Χάρη στους ορισμούς τους, τόσο το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων όσο και το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των, αποτελούν αναλλοίωτες μορφές. Υποθέτουμε ότι οι κλίμακες για τη μέτρηση μηκών στα δύο συστήματα δεν μεταβάλλονται εξαιτίας της περιστροφής, οπότε, ειδικότερα, το μοναδιαίο μήκος παραμένει το ίδιο.

Αναφερόμαστε σε μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσης, όπως η θερμοκρασία $T(x,y,z)$ στο σημείο (x,y,z) ως *βαθμωτό πεδίο*. Ομοίως, ένα διάνυσμα του οποίου η τιμή είναι συνάρτηση της θέσης, όπως η ταχύτητα $\mathbf{v}(x,y,z)$ ενός σωματιδίου που βρίσκεται στο σημείο (x,y,z), ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο*. Ένα μεγάλο μέρος της διανυσματικής ανάλυσης αναφέρεται σε βαθμωτά και διανυσματικά πεδία και στις πράξεις παραγώγισης διανυσμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

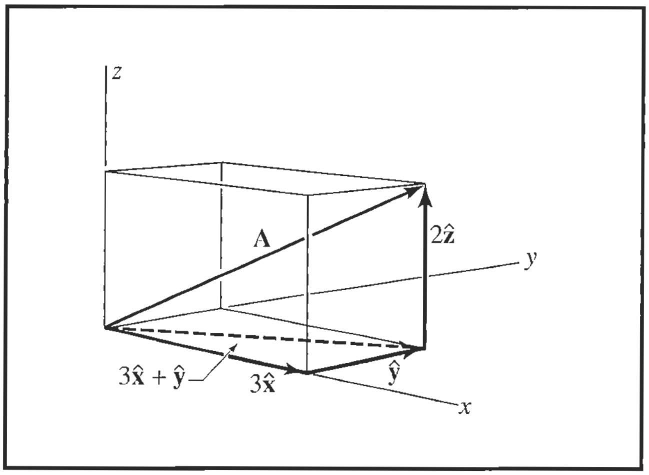
Παραδείγματα με στοιχειώδεις διανυσματικές πράξεις

Θεωρούμε το διάνυσμα **A** του Σχ. (2.24):

$$\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$$

(1) Αναζητούμε το μήκος του, A. Σχηματίζουμε το A^2:

$$A^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14$$

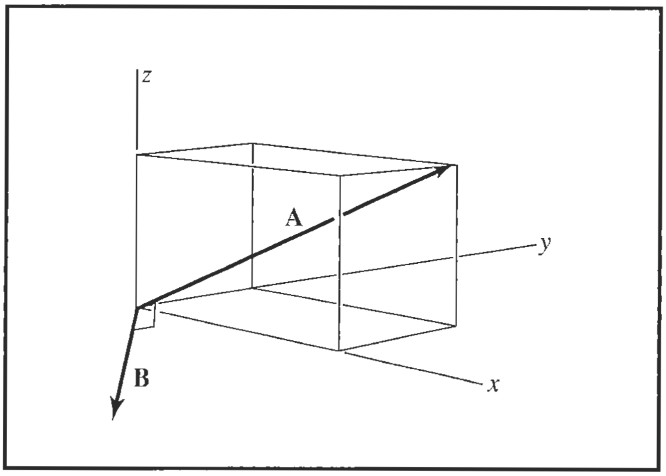


Σχ. 2.24 Το διάνυσμα $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$ και η προβολή του στο επίπεδο xy.

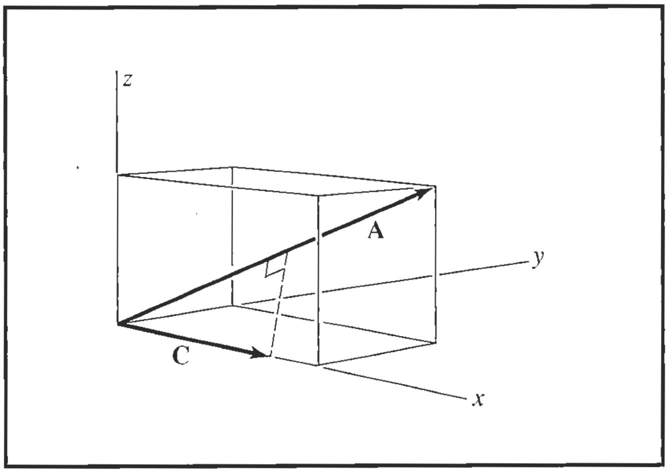
Επομένως το μήκος του **A** είναι $A = \sqrt{14}$.

(2) Ποιο είναι το μήκος της προβολής του **A** στο επίπεδο xy; Το διάνυσμα που αποτελεί την προβολή του **A** στο επίπεδο xy είναι $3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$. Το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος αυτού είναι $3^2 + 1^2 = 10$. Το ζητούμενο μήκος είναι επομένως $\sqrt{10}$.

(3) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα πάνω στο επίπεδο xy, που να είναι κάθετο στο **A**. Αναζητούμε ένα διάνυσμα της μορφής:



Σχ. 2.25 Το διάνυσμα **B** βρίσκεται στο επίπεδο xy και είναι κάθετο στο **A**.



Σχ. 2.26 Προβολή του διανύσματος $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$ στο διάνυσμα **A**. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ = (προβολή του **C** πάνω στο **A**) επί A.

$$\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}}$$

τέτοιο ώστε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ή

$$(3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}}) = 0$$

Αν κάνουμε τις πράξεις, βρίσκουμε

$$3B_x + B_y = 0$$

ή

$$\frac{B_y}{B_x} = -3$$

Το μήκος του διανύσματος **B** δεν καθορίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος (βλ. Σχ. 2.25). Επομένως $\mathbf{B} = k\,(\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}})$ όπου k μια σταθερά.

(4) Κατασκευάστε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{B}}$. Πρέπει να έχουμε $\hat{B}_x^2 + \hat{B}_y^2 = 1$ ή

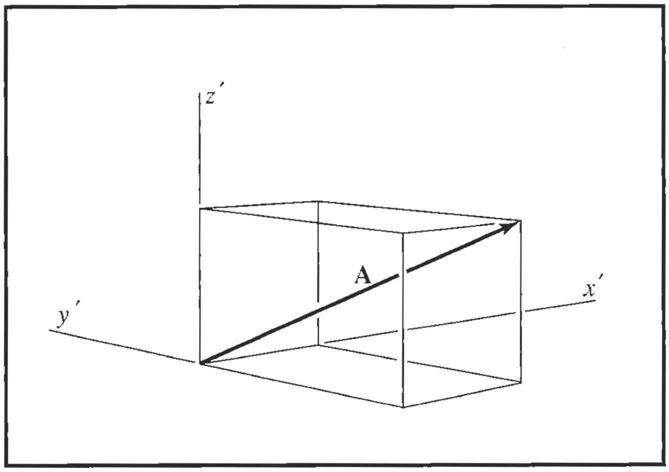
$$\hat{B}_x^2\left(1^2 + 3^2\right) = 10\,\hat{B}_x^2 = 1$$

Άρα

$$\hat{\mathbf{B}} = \sqrt{\frac{1}{10}}\,\hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{9}{10}}\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}} \qquad \left(= \frac{\mathbf{B}}{B}\right)$$

(5) Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}}$ με το διάνυσμα **A** (βλ. Σχ. 2.26). Εύκολα βρίσκουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι $2 \times 3 = 6$.

(6) Υπολογίστε τις συνιστώσες των διανυσμάτων **A** και **C** στο σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει αν το αρχικό σύστημα περιστραφεί γύρω από τον άξονα z κατά γωνία $\pi/2$, και με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού για παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στον θετικό άξονα z (Σχ. 2.27).



Σχ. 2.27 Το σύστημα συντεταγμένων (x', y', z') προκύπτει από το σύστημα (x, y, z) με περιστροφή κατά γωνία $+\pi/2$ γύρω από τον άξονα z.

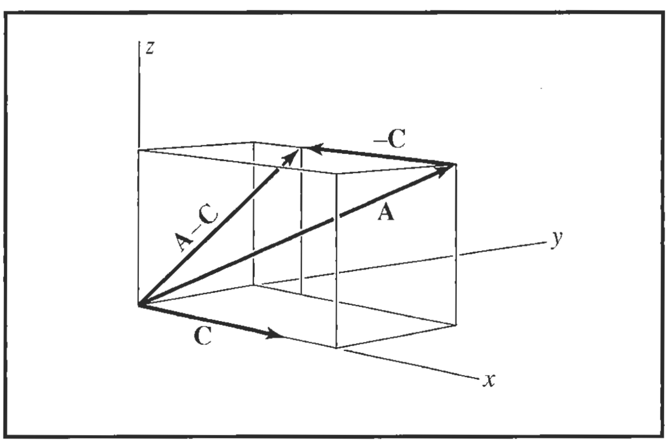
Τα νέα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ συνδέονται με τα αρχικά $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ μέσω των σχέσεων:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$$

Άρα θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\hat{\mathbf{x}}$ με το $-\hat{\mathbf{y}}'$ και το $\hat{\mathbf{y}}$ με $\hat{\mathbf{x}}'$, οπότε βρίσκουμε

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}' - 3\hat{\mathbf{y}}' + 2\hat{\mathbf{z}}', \qquad \mathbf{C} = -2\hat{\mathbf{y}}'$$

(7) Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ στο σύστημα συντεταγμένων (x', y', z'). Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου προβλήματος (6), βρίσκουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο ισούται με $(-3)\,(-2) = 6$, δηλαδή έχει την ίδια τιμή όπως και στο σύστημα συντεταγμένων (x, y, z).



Σχ. 2.28 Το διάνυσμα $\mathbf{A} - \mathbf{C}$.

(8) Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$. Στο σύστημα συντεταγμένων (x,y,z), το εξωτερικό γινόμενο είναι

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$$

Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα **A** και στο διάνυσμα **C**. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε, αν σχηματίσουμε τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

(9) Υπολογίστε το διάνυσμα $\mathbf{A} - \mathbf{C}$. Βρίσκουμε (βλ. Σχ. 2.28):

$$\mathbf{A} - \mathbf{C} = (3-2)\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\,\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\,\hat{\mathbf{z}}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Διανύσματα θέσης.* Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο άξονας x κατευθύνεται προς την ανατολή, ο άξονας y προς το βορρά, και ο άξονας z προς τα πάνω. Εκφράστε τα διανύσματα που αντιστοιχούν στα ακόλουθα σημεία:
(*α*) 10 km βορειοανατολικά και 2 km προς τα πάνω.
(*β*) 5 m νοτιοανατολικά και 5 m προς τα κάτω.
(*γ*) 1 cm βορειοδυτικά και 6 cm προς τα πάνω.
Υπολογίστε το μέτρο κάθε διανύσματος καθώς και τις συνιστώσες του αντίστοιχου σε κάθε περίπτωση μοναδιαίου διανύσματος.

2. *Συνιστώσες διανύσματος.* Στο σύστημα συντεταγμένων του Προβλήματος 1, να υπολογιστούν:
(*α*) Οι συνιστώσες ενός διανύσματος θέσης που βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο, κατευθύνεται νοτιοανατολικά, και έχει μήκος 5,0 m.
(*β*) Οι συνιστώσες ενός διανύσματος θέσης μήκους 15 m, και τέτοιο ώστε να σχηματίζει γωνία 45° με την κατακόρυφο και η προβολή του στο οριζόντιο επίπεδο να βρίσκεται στα δυτικά του άξονα y και να σχηματίζει με αυτόν γωνία 60° (ο άξονας y δείχνει το βορρά).

3. *Πρόσθεση διανυσμάτων.* Σχεδιάστε τα διανύσματα που προκύπτουν από την πρόσθεση των παρακάτω διανυσμάτων:
(*α*) Ενός διανύσματος με μήκος 2 cm που κατευθύνεται ανατολικά και ενός άλλου με μήκος 3 cm που κατευθύνεται βορειοδυτικά.
(*β*) Ενός διανύσματος με μήκος 8 cm που κατευθύνεται ανατολικά και ενός άλλου με μήκος 12 cm που κατευθύνεται βορειοδυτικά.
(*γ*) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των περιπτώσεων (*α*) και (*β*) και γενικεύσετε διατυπώνοντας ένα θεώρημα για την πρόσθεση δύο διανυσμάτων που είναι πολλαπλάσια δύο άλλων διανυσμάτων.

4. *Πολλαπλασιασμός με αριθμό.* Δίνεται το διάνυσμα **A** με μήκος 2,0 cm, που σχηματίζει με τη βόρεια κατεύθυνση γωνία 70° και βρίσκεται στο ανατολικό ημιεπίπεδο. Επίσης δίνεται το διάνυσμα **B** με μήκος 3,5 cm, που σχηματίζει με τη βόρεια κατεύθυνση γωνία 130° και βρίσκεται επίσης στο ανατολικό ημιεπίπεδο. Χρησιμοποιήστε για τη λύση ένα γωνιόμετρο ή χαρτί πολικών συντεταγμένων.
(*α*) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα, και δύο άλλα, 2,5 φορές μεγαλύτερα.
(*β*) Πολλαπλασιάστε το **A** με τον αριθμό –2, το **B** με τον αριθμό +3 και υπολογίστε το διανυσματικό τους άθροισμα.
Απ.: 9,2 cm, 152°.
(*γ*) Θεωρήστε ένα σημείο βόρεια της αρχής των συντεταγμένων και σε απόσταση 10 cm από αυτήν. Υπολογίστε τα πολλαπλάσια των διανυσμάτων **A** και **B** που έχουν διανυσματικό άθροισμα το διάνυσμα με αρχή την αρχή των συντεταγμένων και τέλος το παραπάνω σημείο.
(*δ*) Απαντήστε στα προηγούμενα σημεία (*β*) και (*γ*) με αναλυτικές μεθόδους.

5. *Εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.* Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ και $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}$. Υπολογίστε με διανυσματικές μεθόδους:
(*α*) Το μήκος κάθε διανύσματος. *Απ.:* $a = \sqrt{50}$, $b = \sqrt{41}$
(*β*) Το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. *Απ.:* –25
(*γ*) Τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **a** και **b**. *Απ.:* 123,5°
(*δ*) Τα διευθύνοντα συνημίτονα κάθε διανύσματος.
(*ε*) Το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ και τη διανυσματική διαφορά $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. *Απ.:* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\,\hat{\mathbf{x}} + 6\,\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$
(*στ*) Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Απ.:* $34\,\hat{\mathbf{x}} - 13\,\hat{\mathbf{y}} + 10\,\hat{\mathbf{z}}$

6. *Άλγεβρα διανυσμάτων.* Δίνονται δύο διανύσματα που ικανοποιούν τις σχέσεις $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ και $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$.
(*α*) Υπολογίστε τα διανύσματα **a** και **b**.
(*β*) Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **a** και **a+b**, με διανυσματικές μεθόδους.

7. *Διανυσματική πρόσθεση ταχυτήτων.* Ένας κωπηλάτης κινεί

μια βάρκα με ταχύτητα 5 km/h, όταν το νερό είναι ακίνητο.

(*α*) Σε κάποια απόσταση από τον κωπηλάτη υπάρχει ένα ρεύμα που κινείται με ταχύτητα 2 km/h και με διεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση της βάρκας. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας της βάρκας μετά την είσοδό της στο ρεύμα.

(*β*) Προσδιορίστε την κατεύθυνση κατά την οποία πρέπει να κινείται η βάρκα, προτού φτάσει στο ρεύμα, έτσι ώστε μετά την είσοδό της στο ρεύμα να προχωρεί κάθετα προς τη διεύθυνση του ρεύματος. Υπολογίστε επίσης το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας μετά την είσοδό της στο ρεύμα.

8. *Σύνθεση ταχυτήτων.* Ο πιλότος ενός αεροπλάνου πρέπει να διανύσει μια απόσταση 200 km προς τα ανατολικά. Από βορειοδυτικά φυσάει άνεμος με ταχύτητα 30 km/h. Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον αέρα, αν, σύμφωνα με το δρομολόγιο, το αεροπλάνο πρέπει να φτάσει στον προορισμό του σε 40 min.

Απ.: $\mathbf{v} = (279\hat{\mathbf{x}} + 21\hat{\mathbf{y}})$ km/h , $\hat{\mathbf{x}}$ = ανατολικά , $\hat{\mathbf{y}}$ = βόρεια

9. *Πράξεις με διανύσματα. Διανύσματα σχετικής θέσης.* Δύο σωματίδια που εκπέμπονται από την ίδια πηγή, βρίσκονται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, στις θέσεις:

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 8\hat{\mathbf{z}}\,, \qquad \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$$

(*α*) Σχεδιάστε τις θέσεις των σωματιδίων και εκφράστε το διάνυσμα **r** της θέσης του σωματιδίου (2) ως προς το σωματίδιο (1).

(*β*) Με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου, υπολογίστε το μέτρο του καθενός από τα παραπάνω διανύσματα

Απ.: $r_1 = 9{,}4$, $r_2 = 11{,}4$, $r = 7{,}9$.

(*γ*) Υπολογίστε όλες τις γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο τα τρία παραπάνω διανύσματα.

(*δ*) Υπολογίστε το μήκος της προβολής του διανύσματος **r** πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{r}_1$. *Απ.:* −1,2

(*ε*) Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

Απ.: $-65\,\hat{\mathbf{x}} - 4\,\hat{\mathbf{y}} + 34\,\hat{\mathbf{z}}$

10. *Ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων.* Δύο σωματίδια κινούνται πάνω στους άξονες x και y αντίστοιχα με ταχύτητες $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{x}}$ m/s και $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{y}}$ m/s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_1 = -3\ \text{m}\,,\quad y_1 = 0 \quad \text{και} \quad x_2 = 0\,,\quad y_2 = -3\ \text{m}$$

(*α*) Υπολογίστε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου (2) ως προς το σωματίδιο (1), δηλαδή το $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, σαν συνάρτηση του χρόνου. *Απ.:* $\mathbf{r} = (3 - 2t)\,\hat{\mathbf{x}} + (3t - 3)\,\hat{\mathbf{y}}$ m

(*β*) Σε ποια χρονική στιγμή η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι η ελάχιστη δυνατή, και ποια είναι η θέση των σωματιδίων εκείνη τη στιγμή; *Απ.:* $t = 1{,}15$ s.

11. *Εσωτερικές διαγώνιοι ενός κύβου.* Υπολογίστε τη γωνία με την οποία τέμνονται δύο εσωτερικές διαγώνιοι ενός κύβου. (Μια εσωτερική διαγώνιος ενός κύβου συνδέει δύο κορυφές του και περνά μέσα από το εσωτερικό του κύβου. Μια διαγώνιος έδρας συνδέει δύο κορυφές και βρίσκεται πάνω σε μια έδρα του κύβου).

Απ.: $\cos^{-1}\frac{1}{3}$

12. *Συνθήκη για να έχουμε* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Δείξετε ότι τα διανύσματα **a** και **b** είναι κάθετα, αν $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

13. *Παράλληλα και κάθετα διανύσματα.* Υπολογίστε τα x και y, ώστε τα διανύσματα $\mathbf{B} = x\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}$ να είναι κάθετα προς το διάνυσμα $\mathbf{A} = 5\,\hat{\mathbf{x}} + 6\,\hat{\mathbf{y}}$. Κατόπιν, δείξετε ότι τα διανύσματα **B** και **C** είναι παράλληλα. Ισχύει το ίδιο σε χώρο τριών διανυσμάτων; (δηλαδή, αν δύο διανύσματα είναι κάθετα προς ένα τρίτο, είναι παράλληλα μεταξύ τους;).

14. *Όγκος παραλληλεπιπέδου.* Οι ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, που ξεκινούν από την αρχή των συντεταγμένων, περιγράφονται από τα διανύσματα $\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$, $4\hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$. Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου. *Απ.:* 12.

15. *Ισορροπία δυνάμεων.* Τρεις δυνάμεις, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, και $\mathbf{F}_3$, δρουν ταυτόχρονα σε ένα σημειακό σωματίδιο. Η συνισταμένη δύναμη $\mathbf{F}_\Sigma$, είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων. Το σωματίδιο ισορροπεί, όταν $\mathbf{F}_\Sigma = 0$.

(*α*) Δείξετε ότι, αν $\mathbf{F}_\Sigma = 0$, τα διανύσματα που αντιπροσωπεύουν τις τρεις δυνάμεις σχηματίζουν ένα τρίγωνο.

(*β*) Αν $\mathbf{F}_\Sigma = 0$ όπως παραπάνω, είναι δυνατόν ένα από τα διανύσματα να βρίσκεται έξω από το επίπεδο που ορίζουν τα άλλα δύο;

(*γ*) Σε ένα σωματίδιο ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη 10 N με κατεύθυνση προς τα κάτω. Το σωματίδιο είναι κρεμασμένο από ένα σκοινί (τάση του σκοινιού 15 N) που σχηματίζει γωνία 0,1 rad με την κατακόρυφο. Υπό τις συνθήκες αυτές το σωματίδιο δεν μπορεί να ισορροπεί. Υπολογίστε την τρίτη δύναμη που είναι απαραίτητη για την ισορροπία.

16. *Έργο που παράγεται από δυνάμεις.* Οι σταθερές δυνάμεις $\mathbf{F}_1 = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ (N) και $\mathbf{F}_2 = 4\hat{\mathbf{x}} - 5\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$ (N) δρουν συγχρόνως σε ένα σωματίδιο κατά τη διάρκεια της μετατόπισής του από το σημείο $A(20,15,0)$ (m) στο σημείο $B(0,0,7)$ (m).

(α) Πόσο είναι το έργο (σε J) που παράγουν οι ασκούμενες στο σωματίδιο δυνάμεις; Το έργο δίνεται, σε αυτή τη περίπτωση, από την έκφραση (Κεφ. 5) $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F}$ είναι η συνισταμένη δύναμη (στην περίπτωσή μας $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) και $\mathbf{r}$ η μετατόπιση *Απ.:* –48 J

(β) Υπολογίστε χωριστά το έργο που παράγουν οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$.

(γ) Υποθέτουμε ότι δρουν οι ίδιες δυνάμεις, αλλά ότι η μετατόπιση γίνεται από το σημείο B στο σημείο A. Πόσο είναι το έργο που παράγουν οι δυνάμεις στην περίπτωση αυτή;

17. *Ροπή δύναμης ως προς σημείο.* Η ροπή $\mathbf{N}$ μιας δύναμης ως προς ένα δεδομένο σημείο ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα από το δεδομένο σημείο ως το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη $\mathbf{F}$. Θεωρούμε μια δύναμη $\mathbf{F} = -3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ (N) που εφαρμόζεται στο σημείο $\mathbf{r} = 7\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ (m). Μη ξεχνάτε ότι $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\,\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

(α) Ποια είναι η ροπή της $\mathbf{F}$ (σε N m) ως προς την αρχή των συντεταγμένων; (Εκφράστε τη ροπή $\mathbf{N}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, και $\hat{\mathbf{z}}$). *Απ.:* $14\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} - 16\hat{\mathbf{z}}$.

(β) Ποια είναι η ροπή ως πρός το σημείο (0,10,0);
Απ.: $-36\hat{\mathbf{x}} - 38\hat{\mathbf{y}} - 14\hat{\mathbf{z}}$.

18. *Ταχύτητα και επιτάχυνση. Παραγώγιση διανυσμάτων.* Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωματιδίου, του οποίου η θέση καθορίζεται από ένα από τα παρακάτω διανύσματα (συναρτήσεις του χρόνου t).

(α) $\mathbf{r} = 16\,t\,\hat{\mathbf{x}} + 25\,t^2\hat{\mathbf{y}} + 33\hat{\mathbf{z}}$,

(β) $\mathbf{r} = 10\sin(15\,t)\,\hat{\mathbf{x}} + 35\,t\,\hat{\mathbf{y}} + e^{6t}\hat{\mathbf{z}}$,

(Για τις παραγώγους, βλέπε το Μαθηματικό Συμπλήρωμα στο τέλος του κεφαλαίου).

19. *Τυχαίες κινήσεις.* Ένα σωματίδιο, κατά την κίνησή του στο χώρο, διαγράφει τροχιά που αποτελείται από N ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Το μήκος κάθε τμήματος είναι s. Ο προσανατολισμός κάθε τμήματος στο χώρο, είναι εντελώς τυχαίος, χωρίς να υπάρχει καμία σχέση ή συσχετισμός μεταξύ δύο οποιωνδήποτε τμημάτων. Η ολική μετακίνηση είναι:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i$$

Να δείξετε ότι η μέση τετραγωνική τιμή της μετακίνησης μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης, είναι $\langle S^2 \rangle = Ns^2$, όπου το σύμβολο $\langle\ \rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή. [Υπόδειξη: Η υπόθεση ότι η κατεύθυνση κάθε τμήματος είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση κάθε άλλου τμήματος, σημαίνει ότι $\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle = 0$ για όλους τους δείκτες i και j, εκτός από την περίπτωση $i = j$].

20. *Αναλλοίωτες μορφές.* Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{A}$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{z}}$. Περιστρέφουμε το σύστημα κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα $\hat{\mathbf{z}}$, με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, για παρατηρητή πάνω στο θετικό ημιάξονα z.

(α) Εκφράστε τα νέα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}'$ και $\hat{\mathbf{y}}'$ σαν συναρτήσεις των $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ και θ, $(\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}})$.

(β) Εκφράστε το $\mathbf{A}$ σαν συνάρτηση των $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$ και των $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$. Εφαρμόστε τον μετασχηματισμό που αντικαθιστά τα $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$, $\hat{\mathbf{z}}'$ με τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, και με τον τρόπο αυτό βρείτε τη σχέση μεταξύ των $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$ και A_x, A_y, A_z.

(γ) Δείξετε ότι $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$

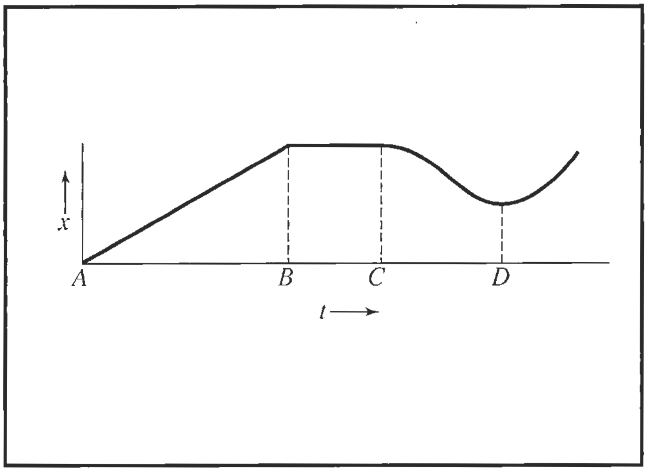
(Αυτό το πρόβλημα, για μια αυθαίρετη περιστροφή στον τριδιάστατο χώρο, είναι πολύπλοκο. Μια μέθοδος επίλυσης είναι να χρησιμοποιηθούν τα διευθύνοντα συνημίτονα. Μεταξύ των εννέα συνημιτόνων υπάρχουν έξι σχέσεις. Τρεις από τις σχέσεις αυτές οφείλονται στην ορθογωνιότητα των και τρεις στο γεγονός ότι το άθροισμα των τετραγώνων των $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ και $\hat{\mathbf{z}}'$, διευθυνόντων συνημιτόνων ισούται με τη μονάδα).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Χρονικές παράγωγοι, ταχύτητα και επιτάχυνση

Η Δυναμική εξετάζει την κίνηση σωματιδίων και σωμάτων και επομένως την εξέλιξη με το χρόνο, δηλαδη με ποιο τρόπο ορισμένα μεγέθη που περιγράφουν τα σωματίδια ή τα σώματα μεταβάλλονται με το χρόνο. Πολύ συχνά θα χρησιμοποιήσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων. Δύο άλλα σπουδαία συστήματα συντεταγμένων, οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και οι κυλινδρικές συντεταγμένες, εισάγονται στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Δυναμική περιγραφή σημαίνει να υπολογιστούν οι συντεταγμένες x, y, z σαν συναρτήσεις του χρόνου. Το Σχ. 2.29, στο οποίο το x έχει σχεδιαστεί σαν συνάρτηση του χρόνου, παριστάνει μια τέτοια περιγραφή. Σημαντικό στοιχείο για την κατανόηση του τρόπου ματαβολής του x είναι η κλίση της κα-



Σχ. 2.29 Γραφική παράσταση του x σαν συνάρτηση του t.

μπύλης (x, t). Μεταξύ των σημείων A και B, το x αυξάνει μονότονα και η κλίση, που είναι ο ρυθμός μεταβολής του x ως προς το χρόνο (δηλαδή ο λόγος $\Delta x/\Delta t$), είναι σταθερή. Μεταξύ B και C η καμπύλη είναι παράλληλη προς τον άξονα των t και η κλίση είναι μηδέν. Παρατηρούμε ότι, τότε, το x δεν μεταβάλλεται, άρα και η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x μηδενίζεται. Μεταξύ C και D η κλίση γίνεται αρνητική, αφού το x ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου. Στο D η κλίση είναι μηδέν, ενώ κατόπιν μεγαλώνει.

Κατά την Εξ. (2.21), ο λόγος dx/dt ορίζει την ταχύτητα κατά την κατεύθυνση x. Αυτός ο ορισμός συμπίπτει με τον ορισμό της κλίσης στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης (x, t). Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η ταχύτητα, προς μια οποιαδήποτε κατεύθυνση, έχει τιμή που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Θα χρειαζόταν πολύς χρόνος και πολύ χαρτί, αν έπρεπε να χαράζουμε μια καμπύλη κάθε φορά που θα θέλαμε να περιγράψουμε μια κίνηση. Γι' αυτό, συνήθως δίνουμε μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ κάθε συντεταγμένης x, y, z και του χρόνου t. Μια τέτοια σχέση είναι π.χ. η $x = vt$. Έχουμε τότε $dx/dt = v$ οπότε η ταχύτητα v, κατά τον άξονα x, είναι σταθερή. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η σχέση $x = \frac{1}{2}at^2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $dx/dt = at = v$. Μπορούμε να σχεδιάσουμε την ταχύτητα v σαν συνάρτηση του t. Τι παριστάνει η κλίση μιας τέτοιας καμπύλης; Αυτό το έχουμε συζητήσει [βλ. Εξ. (2.28)] και ξέρουμε ότι πρόκειται για την επιτάχυνση κατά την κατεύθυνση x. Άρα $d^2x/dt^2 = dv/dt = a$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφέρουμε και θα χρησιμοποιούμε την επιτάχυνση πολύ συχνά.

Ας υπενθυμίσουμε εδώ ότι οι διαστάσεις της ταχύτητας είναι (απόσταση) διά (χρόνος). Υπάρχουν φυσικά πολλές μονάδες για το χρόνο. Όπως αναφέραμε στο Κεφ. 1, θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα μονάδων S.I. Στο σύστημα αυτό, μονάδα μήκους είναι το μέτρο και μονάδα χρόνου το δευτερόλεπτο. Επομένως, μονάδα της ταχύτητας στο S.I. είναι το μέτρο ανά δευτερόλεπτο (m/s). Πάντως, θα μπορούσαμε να φανταστούμε και άλλες μονάδες για την ταχύτητα, όπως το χιλιόμετρο ανά ώρα (km/h), το μέτρο ανά αιώνα, το χιλιόμετρο ανά μικροδευτερόλεπτο (km/μs), κλπ.

Είναι απαραίτητο να θυμάται κανείς τον κανόνα παραγώγισης ενός γινομένου πολλών συναρτήσεων. Η παράγωγος ενός γινομένου είναι η παράγωγος του πρώτου πράγοντα επί όλους τους άλλους παράγοντες, συν την παράγωγο του δεύτερου παράγοντα επί όλους τους άλλους παράγοντες, συν την παράγωγο του τρίτου παράγοντα επί όλους τους άλλους παράγοντες, κλπ.

Σαν άσκηση, υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση κατά τις κατευθύνσεις x, y, z, όταν:

$$
\begin{array}{lll}
x = 35t & y = \frac{1}{2}At^2 & z = \frac{1}{2}Ct^4 + \frac{1}{4}Dt^3 \\
x = 5\cos 8t & y^2 = 25t & z = 7e^{-t} \\
x = t^2 \sin 6t & y = t^{1/2}\tan 5t & z = A\ln t
\end{array}
$$

με τα x, y, z, σε m, όταν το t είναι σε s.

Δίνουμε παρακάτω την απόδειξη του τύπου για την παράγωγο του ημιτόνου και τον τύπο για την παράγωγο του συνημιτόνου, για όσους δεν γνωρίζουν αυτές τις παραγώγους:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sin t &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t\cos\Delta t+\cos t\sin\Delta t-\sin t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t+\cos t\,\Delta t-\sin t}{\Delta t} \\
&= \cos t
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Βλέπε Εξ. (2.44) και (2.45) για το $\sin\Delta t$ και το $\cos\Delta t$. Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t \tag{2.40}$$

Αν θέλουμε να παραγωγίσουμε το $\sin\omega t$, θέτουμε $\omega t = z$, οπότε:

$$\frac{d}{dt}\sin\omega t = \frac{d}{dz}\sin z\,\frac{dz}{dt} = \omega\cos z = \omega\cos\omega t \tag{2.41}$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε ότι

$$\frac{d}{dt}\tan t = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{\cos t}{\cos t} + \frac{\sin t\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

Γωνίες

Για την περιγραφή της θέσης ενός σωματιδίου, οι γωνίες είναι πολύ συχνά χρήσιμες σαν στοιχεία της περιγραφής, όπως π.χ. στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης (Σχ. 2.22). Η γωνιακή ταχύτητα είναι η παράγωγος της γωνίας ως προς το χρόνο. Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι συγγραμμικό με τον άξονα της περιστροφής. Για τη μέτρηση μιας γωνίας υπάρχει μια φυσική μονάδα, που χρησιμοποιείται σε όλους τους κλάδους της Φυσικής. Η μονάδα αυτή είναι το *ακτίνιο* (rad). Το ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία στην οποία αντιστοιχεί τόξο κύκλου με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Επειδή το μήκος της περιφέρειας είναι 2π φορές η ακτίνα, η γωνία που αντιστοιχεί σε ένα πλήρη κύκλο (και που την ονομάζουμε επίσης γωνία 360°), είναι ίση με 2π rad. Το πηλίκο $360°/2\pi = 57{,}3°$ εκφράζει σε μοίρες μια γωνία ίση με ένα ακτίνιο. Η γωνιακή ταχύτητα μετράται σε rad/s. Αν ξέρουμε τη γωνιακή ταχύτητα και αν η ακτίνα είναι σταθερή, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τη γραμμική ταχύτητα, που είναι το γινόμενο της γωνιακής ταχύτητας επί την ακτίνα [βλ. Εξ. (2.32)]. Ας σημειωθεί ότι τα ακτίνια είναι αριθμοί χωρίς φυσικές διαστάσεις. Πράγματι, τα ακτίνια εκφράζουν το πηλίκο ενός μήκους διά κάποιου άλλου μήκους, και συγκεκριμένα το πηλίκο του μήκους ενός τόξου δια του μήκους της ακτίνας.

Ακολουθούν μερικά προβλήματα που αναφέρονται σε γωνιακά μεγέθη:

1. Να υπολογιστούν σε ακτίνια οι γωνίες 90°, 240° και 315°.

2. Αν $\theta = \frac{1}{5}t$, να υπολογιστεί η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα. Αν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια, να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα σε μοίρες ανά δευτερόλεπτο (°/s).

3. Ένα σωματίδιο κινείται σε κύκλο με ακτίνα 15 m και έχει γραμμική ταχύτητα 5 m/s. Να υπολογιστεί η γωνιακή του ταχύτητα.

Η συνάρτηση e^x

Ένα ενδιαφέρον ζήτημα, από μαθηματική άποψη, είνα το εξής: Ποιας συνάρτησης η παράγωγος είναι ίση με την ίδια τη συνάρτηση; Αν φανταστούμε ότι η ζητούμενη συνάρτηση μπορεί να γραφεί σαν μια σειρά με άπειρους όρους, τότε είναι δυνατό να μαντέψουμε ποια πρέπει να είναι μια τέτοια σειρά:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Αν παραγωγίσουμε αυτή τη σειρά ως προς x, βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος δίνει μηδέν, ο δεύτερος δίνει 1, ο τρίτος x, ο τέταρτος $x^2/2!$ και ούτω καθεξής, ώστε ξαναπαίρνουμε τη σειρά με την οποία αρχίσαμε. Η πιο πάνω σειρά ορίζει τη συνάρτηση e^x. Αλλά με τι ισούται το e ; Αν θέσουμε $x = 1$, έχουμε $e^1 = e$. Άρα $e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! \ldots = 2{,}71828\ldots$ Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $e^{x+y} = e^x e^y$. Θα απορούσε ίσως κανείς γιατί η 10^x δεν είναι μια συνάρτηση σαν την e^x. Με άλλα λόγια, από πού προέρχεται ο αριθμός e ; Ας υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο $d(10^x)/dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{x+\Delta x} - 10^x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x 10^{\Delta x} - 10^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^x\left(10^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \\ &= 10^x \times 2{,}30 \cdots = 2{,}30 \cdots \times 10^x \ ^{(1)}\end{aligned}$$

Από την άποψη αυτή, βλέπουμε ότι ο αριθμός e είναι ακριβώς μια ποσότητα τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \tag{2.42}$$

Ένας από τους λόγους για τους οποίους αυτός ο αριθμός είναι σπουδαίος στη Φυσική, είναι ότι πολύ συχνά συναντάμε εξισώσεις της μορφής $dy/dx = ky$, όπου δηλαδη η παράγωγος του y είναι ίση με μια σταθερά επί το y. Βλέπουμε ότι μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση αυτή στη μορφή $dy/kdx = y$ ή, αντικαθιστώντας το kx με την ανεξάρτητη μεταβλητή z, στη μορφή $dy/dz = y$. Αν λάβουμε υπόψη μας την Εξ. (2.42), διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $y = e^z = e^{kx}$ είναι συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωσή μας. Άρα έχουμε "βρει μια λύση" της εξίσωσης $dy/dx = kx$.

Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης e^x είναι οι εξής: $e^0 = 1$, $e^{-\infty} = 0$, $e^1 = e$ και, αν α είναι γειτονικό στο μηδέν, $e^\alpha \approx 1 + \alpha$. Παρατηρούμε ότι η σειρά στην οποία αναπτύσσεται το e^x, μοιάζει λίγο με τις σειρές στις οποίες αναπτύσσονται το ημίτονο και το συνημίτονο, εκτός από το ότι στις σειρές του ημιτόνου και του συνημιτόνου κάθε όρος έχει πρόσημο αντίθετο από το

[1] Ο συντελεστής 2,30... είναι ο φυσικός λογάριθμος του 10 (με βάση το e). Αν $10^{\Delta x} = 1 + \alpha$, όπου Δx και α είναι αριθμοί γειτονικοί με το μηδέν, θα έχουμε από τη μια μεριά

$$\log_e 10^{\Delta x} = 2{,}30 \ldots \log_{10}(10^{\Delta x}) = 2{,}30\ldots \Delta x$$

και από την άλλη μεριά:

$$\log_e(1 + \alpha) = \alpha$$

Άρα $\alpha = 2{,}30\ldots\Delta x$. Μπορείτε να ελέγξετε αυτό το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας ένα πίνακα λογαρίθμων.

πρόσημο του προηγούμενου όρου και ότι πρόκειται για σειρές μόνο περιττών ή μόνο άρτιων δυνάμεων του x, αντίστοιχα. Όσοι έχουν κάποια πείρα στα μαθηματικά, ξέρουν ότι το $\sqrt{-1} = i$ έχει μια τέτοια συμπεριφορά όταν υψώνεται σε αύξουσες δυνάμεις. Ας δούμε με τι ισούται το

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \cdots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} \cdots \quad (2.43)$$

Παρατηρούμε την εναλλαγή των προσήμων + και – και διαπιστώνουμε ότι η δύναμη $e^{i\theta}$ ισούται με $\cos\theta + i\sin\theta$. Η σχέση

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

είναι γνωστή ως *τύπος του Euler*. Θα μας δοθεί η ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση στο Κεφ. 7 (στο Μαθηματικό Συμπλήρωμα).

Στην απόδειξη της Εξ. (2.39) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta \approx \sin\theta + \cos\theta \cdot \Delta\theta$, όπου $\Delta\theta$ είναι μια μικρή μεταβολή του θ. Με άλλα λόγια, δεχτήκαμε ότι $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ και $\cos\Delta\theta \approx 1$ αφού υποθέσαμε ότι $\Delta\theta$ είναι μια μικρή γωνία. Ας μη ξεχνάμε ότι τις γωνίες τις μετράμε σε ακτίνια. Ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τους πίνακες που δίνουν τα ημίτονα και τα συνημίτονα για να πεισθεί ότι οι προηγούμενες προσεγγίσεις είναι σωστές. Τις προσεγγίσεις αυτές τις παίρνουμε, αν κρατήσουμε τους πρώτους μόνο όρους των παρακάτω σειρών, στις οποίες αναπτύσσονται το ημίτονο και το συνημίτονο:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \quad (2.44)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \quad (2.45)$$

Για παράδειγμα, αν η γωνία θ είναι ίση με 0,1 του ακτινίου, τότε ο δεύτερος όρος της σειράς του ημιτόνου είναι $\theta^3/6$ = 1/6000, δηλαδή 1/600 του πρώτου όρου. Άρα, αν παραλείψουμε τον δεύτερο όρο, κάνουμε ένα μικρό μόνο λάθος, και όταν το θ τείνει στο μηδέν η προσέγγιση γίνεται πια ακρίβεια.

Ανάπτυξη σε σειρά

Στη Φυσική είναι πολύ συχνά χρήσιμο να μπορεί κανείς, όταν γνωρίζει την τιμή μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, να υπολογίσει την τιμή της συνάρτησης σε ένα άλλο, γειτονικό σημείο. Ο σκοπός αυτός εξυπηρετείται με την ανάπτυξη σε *σειρά Taylor*. Η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στη γειτονιά του σημείου x_0, δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots \quad (2.46)$$

Ο λόγος του τρίτου όρου προς τον δεύτερο είναι:

$$\frac{\frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}}{(x - x_0)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}} \sim (x - x_0)$$

εκτός αν οι παράγωγοι έχουν ειδική συμπεριφορά. Επομένως, αν η διαφορά $x - x_0$ είναι αρκετά μικρή, μπορούμε με μικρό σφάλμα (που είναι πάντως δυνατό να υπολογιστεί) να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με το ανάπτυγμα

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \quad (2.47)$$

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $y = Ax^5$ και ότι γνωρίζουμε την τιμή $y_0 = Ax_0^5$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση y στο σημείο $x = x_0 + \Delta x$. Έχουμε όμως,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = 5Ax_0^4 \qquad (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = \Delta x\, 5Ax_0^4$$

Άρα

$$y = Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots \quad (2.48)$$

Για εκφράσεις της μορφής

$$(a + bx)^n = a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου, οπότε παίρνουμε

$$a^n\left(1 + \frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left|1 + n\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 \cdots\right| \quad (2.49)$$

Όταν το bx/a είναι μικρό σε σύγκριση με τη μονάδα, μπορούμε να πάρουμε μια καλή προσέγγιση, παραλείποντας όλους τους όρους μετά το $n(bx/a)$. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου στο προηγούμενο παράδειγμα δίνει:

$$y = A(x_0 + \Delta x)^5 = Ax_0^5\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^5 = Ax_0^5\left(1 + 5\frac{\Delta x}{x_0} \cdots\right)$$

$$= Ax_0^5 + 5Ax_0^4\,\Delta x \cdots$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με την Εξ. (2.48).

Αποδείξετε τις εξής προσεγγιστικές σχέσεις, όταν το x είναι μικρό σε σύγκριση με τη μονάδα:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \tfrac{1}{2}x \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{2}x \cdots \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{3}x \cdots$$

Διανύσματα και πολικές συντεταγμένες

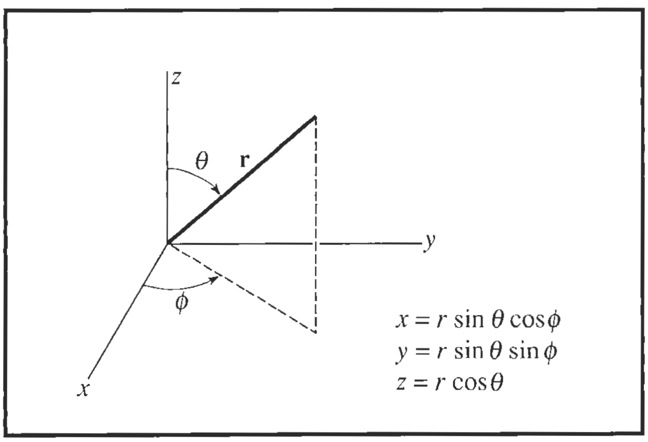
Η θέση ενός σωματιδίου σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες προσδιορίζεται από τα μεγέθη r, θ και ϕ. Το r είναι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r}$ από την αρχή των συντεταγμένων ως το σωματίδιο. Το θ είναι η γωνία μεταξύ του $\mathbf{r}$ και του πολικού άξονα z, και $0 \le \theta \le \pi$. Η ϕ είναι η γωνία μεταξύ του άξονα x και της προβολής του $\mathbf{r}$ στο επίπεδο του ισημερινού, δηλαδή στο επίπεδο xy. Το μέτρο της προβολής του $\mathbf{r}$ στο επίπεδο xy ισούται με $r \sin\theta$. Διαπιστώνουμε ότι η θέση του σωματιδίου σε ορθογώνιες συντεταγμένες καθορίζεται από τις σχέσεις:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = r \sin\theta \sin\phi \qquad z = r\cos\theta \qquad (2.50)$$

όπως φαίνεται στο Σχ. 2.30

1. Έστω ότι ένα πρώτο σωματίδιο είναι στη θέση $\mathbf{r}_1 \equiv (r_1, \theta_1, \phi_1)$ και ένα δεύτερο σωματίδιο στη θέση $\mathbf{r}_2 \equiv (r_2, \theta_2, \phi_2)$. Έστω εξάλλου θ_{12} η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$. Εκφράζοντας το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 = \cos\theta_{12}$ σαν συνάρτηση των $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$, δείξετε ότι:

$$\cos\theta_{12} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \qquad (2.51)$$



Σχ. 2.30 Σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.

Στην πορεία της απόδειξης είναι χρήσιμη η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \qquad (2.52)$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει αρκετά καλά τη δύναμη των διανυσματικών μεθόδων. Για να το καταλάβετε, προσπαθήστε να καταλήξετε στην Εξ. (2.51) με μια άλλη μέθοδο!

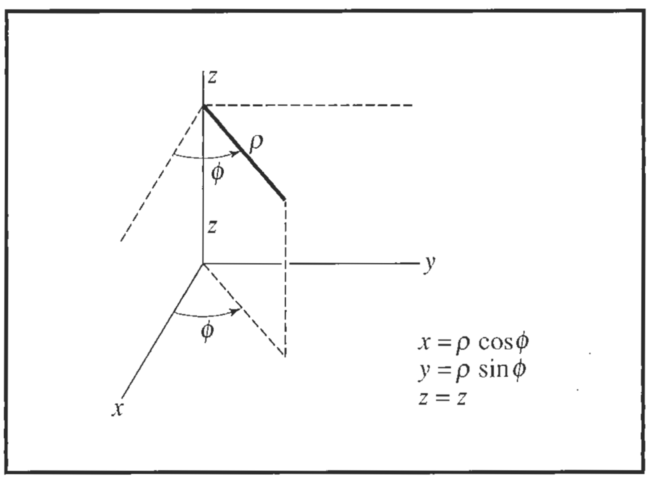
2. Κατά ανάλογο τρόπο, σχηματίζοντας το εξωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$, βρείτε μια άλλη έκφραση για το $\sin\theta_{12}$.

Οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες ρ, ϕ, z αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα και ορίζονται από τις σχέσεις $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ και $z = z$, όπως στο Σχ. 2.31. Σε δύο διαστάσεις, οι κυλινδρικές συντεταγμένες περιορίζονται στις ρ και ϕ μόνο. Όμως, σε δύο διαστάσεις, χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό r και θ αντί ρ και ϕ (βλέπε π.χ. τους παρακάτω τύπους).

Τύποι από την αναλυτική γεωμετρία

Ευθεία στο επίπεδο xy:	$ax + by = 1$
Ευθεία στο επίπεδο xy, που περνά από την αρχή των συντεταγμένων:	$y = ax$
Επίπεδο:	$ax + by + cz = 1$
Επίπεδο που περνά από την αρχή των συντεταγμένων:	$ax + by + cz = 0$

Ακολουθεί πίνακας των εξισώσεων των κωνικών τομών σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:



Σχ. 2.31 Κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες.

	Καρτεσιανές συντεταγμένες	Πολικές συντεταγμένες
Κύκλος με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων:	$x^2 + y^2 = r_0^2$	$r = r_0$
Έλλειψη:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με κέντρο την αρχή	$\frac{1}{r} = \frac{1 - \varepsilon \cos\theta}{s}$ $\varepsilon < 1$, η αρχή στην εστία
Παραβολή:	$y^2 = mx$ με κορυφή στην αρχή	$\frac{1}{r} = \frac{1 - \cos\theta}{s}$ η αρχή στην εστία
Υπερβολή:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με κέντρο την αρχή	$\frac{1}{r} = \frac{1 - \varepsilon \cos\theta}{s}$ $\varepsilon > 1$, η αρχή στην εστία

Χρήσιμες διανυσματικές ταυτότητες

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.53}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{\mathbf{x}} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \hat{\mathbf{y}} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{\mathbf{z}} \tag{2.54}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{A} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C} \tag{2.56}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.57}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\,\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\,\mathbf{D} \tag{2.58}$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.59}$$

ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΗ ΜΕΛΕΤΗ

PSSC, "Physics". (D. C. Heath and Company, Boston, 1965). Κεφ. 6.

Banesh Hoffmann, "About Vectors". (Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966). Δεν είναι εγχειρίδιο, αλλά το διάβασμά του κάνει τον αναγνώστη να σκεφτεί. Απευθύνεται σε αναγνώστες που έχουν ορισμένες γνώσεις σχετικές με τα διανύσματα.

G. E. Hay, "Vector and Tensor Analysis". (Dover Publications, Inc., New York, 1953).

D. E. Rutherford, "Vector Methods". (Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, ή Interscience Publishers, Inc., New York, 1949).

H. B. Phillips, "Vector Analysis". (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1933). Είναι ένα παλαιό βιβλίο, που χρησιμοποιήθηκε πολύ στον καιρό του.

[M. R. Spiegel, "Ανώτερα μαθηματικά". (ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982). Περίληψη θεωρίας και λυμένες και άλυτες ασκήσεις μαθηματικών στο επίπεδο που χρειαζόμαστε για το βιβλίο αυτό. (Σ.τ.ε.)]