

**EDWARD M. PURCELL**  
Gerhard Gade University Professor Emeritus  
Harvard University

## ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΣΕΙΡΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΟΥ BERKELEY  
ΤΟΜΟΣ 2  
ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΓΓΛΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

**Μετάφραση:**

Θόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Εμμανουήλ Δρης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Αμαλία Κώνστα, Ομότιμη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.  
Αναστάσιος Φίλιππας, Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Εμμανουήλ Φοκίτης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

**Επιστημονική Επιμέλεια:**

Αμαλία Κώνστα, Ομότιμη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Ε.Μ.Π.  
ΑΘΗΝΑ 2004

# 1

## ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ: ΦΟΡΤΙΑ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ

1.1	Ηλεκτρικό φορτίο.....	2
1.2	Διατήρηση του φορτίου.....	5
1.3	Κβάντωση του φορτίου.....	6
1.4	Νόμος Coulomb.....	8
1.5	Ενέργεια συστήματος φορτίων.....	12
1.6	Ηλεκτρική ενέργεια κρυσταλλικού πλέγματος.....	15
1.7	Το ηλεκτρικό πεδίο.....	17
1.8	Κατανομές φορτίου.....	20
1.9	Ροή.....	22
1.10	Νόμος Gauss.....	23
1.11	Πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου.....	26
1.12	Πεδίο γραμμικού φορτίου.....	27
1.13	Πεδίο επίπεδου φύλλου φορτίου απειρών διαστάσεων.....	29
1.14	Δύναμη ασκούμενη σε στρώση φορτίου.....	29
1.15	Ενέργεια συσχετισμένη με το ηλεκτρικό πεδίο.....	32
	Προβλήματα.....	35

## ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

### ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

**1.1** Στους πρώτους ερευνητές του ο ηλεκτρισμός φάνταζε σαν ένα εκπληκτικό φαινόμενο. Το να βγάλει κάποιος από τα σώματα την «αέρινη φωτιά», όπως συχνά τον αποκαλούσαν, το να φέρει ένα σώμα σε εξαιρετικά υψηλή κατάσταση ηλεκτρίσης, το να παραγάγει ένα συνεχές ρεύμα, απαιτούσε ιδιαίτερη επινοητικότητα. Εκτός από τον φαντασμαγορικό κεραυνό, οι συνηθισμένες εκδηλώσεις της φύσης, από το πάγωμα του νερού ως το μέγαλωμα ενός δένδρου, δεν φαίνονταν να έχουν καμιά σχέση με την παράξενη συμπεριφορά των ηλεκτρισμένων αντικειμένων. Σήμερα γνωρίζουμε ότι οι ηλεκτρικές δυνάμεις καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις φυσικές και τις χημικές ιδιότητες της ύλης σε όλη την περιοχή, από το άτομο ως το ζωντανό κύτταρο. Γι' αυτή τη γνώση οφείλουμε να ευχαριστήσουμε τους επιστήμονες του δέκατου ένατου αιώνα, τους Ampère, Faraday, Maxwell, και πολλούς άλλους, οι οποίοι ανακάλυψαν τη φύση του ηλεκτρομαγνητισμού, καθώς επίσης και τους φυσικούς και τους χημικούς του εικοστού αιώνα, οι οποίοι αποκάλυψαν την ατομική δομή της ύλης.

Ο κλασικός ηλεκτρομαγνητισμός μελετά τα ηλεκτρικά φορτία, τα ρεύματα και τις αλληλεπιδράσεις τους, θεωρώντας ότι όλες οι ποσότητες που συμμετέχουν μπορούν να μετρηθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη, με απεριόριστη ακρίβεια. Εδώ, η λέξη *κλασικός* σημαίνει απλώς «μη κβαντικός». Ο κβαντικός νόμος που περιέχει τη σταθερά  $h$  παραβλέπεται στην κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού, ακριβώς όπως συμβαίνει και στη συνηθισμένη μηχανική. Πράγματι, η κλασική θεωρία έφτασε πολύ νωρίς στη σημερινή της πληρότητα πριν από την ανακάλυψη του Planck. Έχει επιβιώσει με αξιοθαύμαστο τρόπο. Ούτε η επανάσταση της κβαντικής φυσικής, ούτε η εξέλιξη της ειδικής σχετικότητας θάμπωσαν τη λαμπρότητα των εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που έγραψε ο Maxwell πριν από 100 χρόνια.

Φυσικά η θεωρία ήταν στέρεα θεμελιωμένη στο πείραμα και, εξαιτίας αυτού, αρκετά ασφαλής στην αρχική της περιοχή εφαρμογών – όπως πηνία, πυκνωτές, εναλλασσόμενα ρεύματα και, αργότερα, ραδιοκύματα και οπτικά κύματα. Ακόμα όμως και αυτή η μεγάλη επιτυχία δεν εγγυάται εγκυρότητα σε άλλες περιοχές, όπως στο εσωτερικό ενός μορίου.

Το ότι η κλασική περιγραφή του ηλεκτρομαγνητισμού εξακολουθεί να έχει μεγάλη σημασία για τη σύγχρονη φυσική οφείλεται σε δύο γεγονότα. Το πρώτο είναι ότι η ειδική σχετικότητα δεν απαιτεί καμιά αναθεώρηση του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού. Από ιστορικής σκοπιάς, η ειδική σχετικότητα *ξεπήδησε* από τη θεωρία του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού και τα πειράματα που αυτή ενέπνευσε. Οι εξισώσεις πεδίου του Maxwell, που είχαν αναπτυχθεί πολύ πριν από την εργασία του Lorentz και του Einstein, αποδείχτηκαν απόλυτα συμβατές με την ειδική σχετικότητα. Το δεύτερο είναι ότι

οι κβαντικές τροποποιήσεις των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων αποδείχτηκαν ασήμαντες ακόμα και σε αποστάσεις μικρότερες από  $10^{-12}$  m, 100 φορές δηλαδή μικρότερες από το άτομο. Μπορούμε να περιγράψουμε τις απώσεις και τις έλξεις των σωματιδίων στο άτομο χρησιμοποιώντας τους ίδιους νόμους που ισχύουν για τα φύλλα ενός ηλεκτροσκοπίου, αν και χρειαζόμαστε την κβαντική μηχανική για να προβλέψουμε τον τρόπο με τον οποίο τα σωματίδια συμπεριφέρονται υπό την επίδραση αυτών των δυνάμεων. Σε ακόμα μικρότερες αποστάσεις, η συγχώνευση της ηλεκτρομαγνητικής και της κβαντικής θεωρίας, που πήρε το όνομα *κβαντική ηλεκτροδυναμική*, αποδείχτηκε εντυπωσιακά επιτυχής. Οι προβλέψεις της έχουν επαληθευτεί από το πείραμα και στις μικρότερες αποστάσεις που έχουν μέχρι τώρα ερευνηθεί.

Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης έχει κάποια εξοικείωση με τις στοιχειώδεις γνώσεις του ηλεκτρισμού. Δεν πρόκειται να επανεξετάσουμε όλα τα πειράματα με τα οποία έχει αποδειχθεί η ύπαρξη του ηλεκτρικού φορτίου, ούτε θα ανακεφαλαιώσουμε όλα τα τεκμήρια που μαρτυρούν την ηλεκτρική δομή της ύλης. Ωστόσο, θέλουμε πράγματι να μελετήσουμε προσεκτικά τα πειραματικά θεμέλια των βασικών νόμων από τους οποίους τα πάντα εξαρτώνται. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη φυσική των στάσιμων ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή την *ηλεκτροστατική*.

Βεβαίως μια θεμελιώδης ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου είναι η ύπαρξή του σε δύο μορφές, που από πολύ καιρό πριν έχουν ονομαστεί *θετική και αρνητική*. Το πειραματικό γεγονός είναι ότι όλα τα φορτισμένα σωματίδια μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες, τέτοιες ώστε όλα τα μέλη της ίδιας κατηγορίας να απωθούνται μεταξύ τους, ενώ να έλκονται από τα μέλη της άλλης. Εάν δύο μικρά ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια A και B, που βρίσκονται σε κάποια απόσταση, έλκονται και, εάν το A έλκει κάποιο άλλο ηλεκτρισμένο σώμα Γ, τότε βρίσκουμε πάντοτε ότι το B απωθεί το Γ. Αντιπαραθέστε αυτή την ιδιότητα με τη βαρύτητα: Υπάρχει ένα μόνο είδος βαρυτικής μάζας και κάθε μάζα έλκει οποιαδήποτε άλλη μάζα.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τα δύο είδη φορτίου, θετικό και αρνητικό, ως αντίθετες εκδηλώσεις μιας ιδιότητας, κατά τον ίδιο τρόπο που λέμε ότι *αριστερό και δεξί* είναι οι δύο ιδιότητες της «συμμετρίας του χεριού». Πράγματι, στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, ιδιότητες που σχετίζονται με το πρόσημο του φορτίου συνδέονται με την ιδιότητα της συμμετρίας του χεριού, καθώς και με μίαν άλλη θεμελιώδη συμμετρία, τη σχέση της αλληλουχίας των γεγονότων,  $\alpha$ , μετά  $\beta$ , μετά  $\gamma$ , με τη χρονικά αντεστραμμένη αλληλουχία,  $\gamma$ , μετά  $\beta$ , μετά  $\alpha$ . Εδώ μας ενδιαφέρει μόνο η ιδιότητα του φορτίου. Για κάθε είδος σωματιδίου στη φύση, από όσο τουλάχιστον γνωρίζουμε, μπορεί να υπάρξει ένα *αντισωματίδιο*, ένα είδος ηλεκτρικού «κατοπτρικού ειδώλου». Το αντισωματίδιο φέρει φορτίο με αντίθετο πρόσημο. Εάν οποιαδήποτε άλλη ενδογενής ιδιότητα έχει την αντίθετή της, το αντισωματίδιο έχει επίσης αυτήν την αντίθετη ιδιότητα, ενώ για ιδιότητες που δεν επιδέχονται αντίθετα, όπως λ.χ. η μάζα, το αντισωματίδιο και το σωματίδιο, είναι ακριβώς τα ίδια. Το

φορτίο του ηλεκτρονίου είναι αρνητικό· το αντισωματίδιό του, το *ποζιτρόνιο* έχει θετικό φορτίο, η μάζα του όμως είναι ακριβώς η ίδια με τη μάζα του ηλεκτρονίου. Το αντισωματίδιο του πρωτονίου ονομάζεται απλώς *αντιπρωτόνιο*· το ηλεκτρικό φορτίο του είναι αρνητικό. Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο ενώνονται και σχηματίζουν το συνηθισμένο άτομο του υδρογόνου. Κατά τον ίδιο τρόπο, ένα ποζιτρόνιο και ένα αντιπρωτόνιο ενώνονται και σχηματίζουν ένα αντιυδρογόνο. Με τους δεδομένους δομικούς λίθους ποζιτρονίων, αντιπρωτονίων και αντινετρονίων,<sup>†</sup> θα μπορούσε να κατασκευαστεί μια ολόκληρη ποικιλία αντιύλης, από αντιυδρογόνο μέχρι αντιγαλαξίες. Υπάρχει φυσικά μια πρακτική δυσκολία. Αν συμβεί ένα ποζιτρόνιο να συναντήσει ένα ηλεκτρόνιο, ή ένα αντιπρωτόνιο να συναντήσει ένα πρωτόνιο, θα εξαφανιστούν στη στιγμή μέσα σε μια έκρηξη ακτινοβολίας. Δεν είναι λοιπόν να απορεί κανείς γιατί ακόμα και τα ποζιτρόνια και τα αντιπρωτόνια, και πολύ περισσότερο τα ανιάτομα, είναι πολύ σπάνια και βραχύβια στον κόσμο μας. Πιθανόν να υπάρχει κάπου στο σύμπαν μια τεράστια συμπύκνωση αντιύλης. Εάν πράγματι αυτό συμβαίνει, το πού βρίσκεται αυτή αποτελεί ένα κοσμολογικό μυστήριο.

Το σύμπαν που μας περιβάλλει συνίσταται κατά συντριπτική πλειονότητα από ύλη και όχι από αντιύλη. Αυτό σημαίνει ότι πλειονότητα των αρνητικών φορτίων είναι ηλεκτρόνια και η πλειονότητα των θετικών φορτίων είναι πρωτόνια. Το πρωτόνιο είναι σχεδόν 2000 φορές βαρύτερο από το ηλεκτρόνιο και πολύ διαφορετικό ακόμα και ως προς μερικές άλλες ιδιότητες. Η ύλη στο ατομικό επίπεδο ενσωματώνει αρνητικό και θετικό ηλεκτρισμό με εντελώς διαφορετικούς τρόπους. Το θετικό φορτίο περιορίζεται εξολοκλήρου στον πυρήνα του ατόμου, δέσμιος μιας πυκνής δομής με μέγεθος όχι μεγαλύτερο από  $10^{-12}$  cm, ενώ το αρνητικό φορτίο απλώνεται, στην ουσία, σε μια περιοχή γύρω στις  $10^4$  φορές μεγαλύτερων διαστάσεων. Είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς πώς θα έμοιαζαν τα άτομα και τα μόρια – και όλη η χημεία – αν δεν υπήρχε αυτή η θεμελιώδης ασυμμετρία της ύλης.

Παρεμπιπτόντως, αυτό που αποκαλούμε αρνητικό φορτίο, θα μπορούσε το ίδιο καλά να ονομασθεί θετικό φορτίο. Το όνομα ήταν ένα τυχαίο ιστορικό γεγονός. Δεν υπάρχει τίποτα κατά βάση αρνητικό στο φορτίο του ηλεκτρονίου. Ούτε έχει τις ιδιότητες ενός αρνητικού αριθμού. Ένας αρνητικός ακέραιος, εφόσον έχει οριστεί η πράξη του πολλαπλασιασμού, διαφέρει κατά θεμελιώδη τρόπο από ένα θετικό αριθμό κατά το ότι το τετράγωνό του είναι ένας ακέραιος με αντίθετο πρόσημο. Όμως το γινόμενο δύο φορτίων δεν είναι φορτίο και επομένως δεν υπάρχει σύγκριση.

Δύο άλλες ιδιότητες του ηλεκτρικού φορτίου είναι θεμελιώδεις για την ηλεκτρική δομή της ύλης: Το φορτίο *διατηρείται* και το φορτίο είναι *κβαντισμένο*. Αυτές οι ιδιότητες έχουν να κάνουν με την *ποσότητα* του φορτίου και συνεπώς υποδηλώνουν κάποια μέτρησή

<sup>†</sup> Μολονότι το ηλεκτρικό φορτίο και των δύο είναι μηδέν, το νετρόνιο και το αντισωματίδιό του δεν είναι εναλλάξιμα. Ως προς ορισμένες ιδιότητες, που δεν μας αφορούν εδώ, είναι αντίθετα.

του. Παρακάτω θα αναπτύξουμε με ακρίβεια πώς μπορεί να μετρηθεί το φορτίο από τη δύναμη που αναπτύσσεται ανάμεσα σε φορτία που βρίσκονται σε κάποια απόσταση μεταξύ τους κ.ο.κ. Αλλά προς το παρόν ας το θεωρήσουμε αυτό δεδομένο, ώστε να μπορούμε να μιλάμε ελεύθερα για τα θεμελιώδη αυτά γεγονότα.

### ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

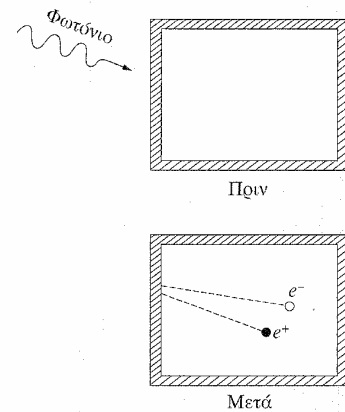
**1.2** Το συνολικό φορτίο ενός απομονωμένου συστήματος δεν αλλάζει ποτέ. Με τον όρο *απομονωμένο* εννοούμε ότι καμιά ύλη δεν επιτρέπεται να διαπεράσει την οριακή επιφάνεια του συστήματος. Θα μπορούσαμε να επιτρέψουμε στο φως να διαπεράσει την οριακή επιφάνεια, αφού τα «σωματίδια» του φωτός, που ονομάζονται *φωτόνια*, δεν έχουν καθόλου φορτίο. Μέσα στο σύστημα τα φορτισμένα σωματίδια μπορούν να εξαφανιστούν ή να ξαναπαρουσιαστούν, πάντα όμως ανά ζεύγη ίσου και αντίθετου φορτίου. Για παράδειγμα, ένα λεπτότοιχο κουτί στο κενό που εκτίθεται σε ακτινοβολία γ μπορεί να γίνει το σκηνικό ενός γεγονότος «δίδυμης γέννησης», κατά το οποίο ένα φωτόνιο υψηλής ενέργειας τετραματίζει την ύπαρξή του με τη δημιουργία ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου (Σχ. 1.1). Αν και δημιουργήθηκαν δύο νέα ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια, η καθαρή μεταβολή του ολικού φορτίου μέσα και πάνω στο κουτί είναι μηδενική. Ένα γεγονός που θα μπορούσε να παραβιάσει το νόμο που μόλις διατυπώσαμε θα ήταν η δημιουργία ενός θετικού φορτίου χωρίς την ταυτόχρονη δημιουργία ενός αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου. Ένα τέτοιο συμβάν όμως δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ.

Φυσικά, εάν τα ηλεκτρικά φορτία ενός ηλεκτρονίου και ενός ποζιτρονίου δεν ήταν ακριβώς ίσα κατά μέτρο, η δίδυμη γέννηση πάλι θα παραβίαζε τον αυστηρό νόμο της διατήρησης του φορτίου. Αυτή η ισότητα είναι μια εκδήλωση της διττότητας σωματιδίου-αντισωματιδίου, που έχουμε ήδη αναφέρει, είναι δηλαδή ένας παγκόσμιος νόμος.

Αυτό που θα αποσαφηνιστεί στη διάρκεια αυτής της μελέτης του ηλεκτρομαγνητισμού είναι ότι η μη διατήρηση του φορτίου θα ήταν εντελώς ασυμβίβαστη με τη δομή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας όπως τη γνωρίζουμε σήμερα. Ως εκ τούτου, μπορούμε να διατυπώσουμε, είτε ως αξίωμα της θεωρίας είτε ως εμπειρικό νόμο που τεκμηριώνεται χωρίς εξαίρεση από όλες τις μέχρι τώρα παρατηρήσεις, το νόμο διατήρησης του φορτίου:

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο σε ένα απομονωμένο σύστημα, δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των θετικών και των αρνητικών φορτίων που υπάρχουν σε αυτό οποιαδήποτε χρονική στιγμή, δεν αλλάζει ποτέ.

Αργά ή γρήγορα, θα πρέπει να αναρωτηθούμε κατά πόσον αυτός ο νόμος ικανοποιεί τις απαιτήσεις του σχετικιστικά αναλλοίωτου. Θα αναβάλουμε μία σε βάθος μελέτη αυτής της σημαντικής ερώτησης μέχρι το Κεφάλαιο 5. Όμως προς το παρόν η απάντηση είναι



ΣΧΗΜΑ 1.1

Φορτισμένα σωματίδια δημιουργούνται ανά ζεύγη με ίσα και αντίθετα φορτία.

ότι πράγματι τις ικανοποιεί, και όχι μόνο με την έννοια ότι η πιο πάνω διατύπωση ισχύει σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αλλά με την ισχυρότερη έννοια ότι παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα, όταν μετράνε το φορτίο, βρίσκουν τον ίδιο αριθμό. Με άλλα λόγια, το ολικό ηλεκτρικό φορτίο ενός απομονωμένου συστήματος είναι ένας σχετικιστικά αναλλοίωτος αριθμός.

### ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

**1.3** Τα ηλεκτρικά φορτία που βρίσκουμε στη φύση έχουν το ίδιο πρόσημο και τιμές πολλαπλάσιες μιας ποσότητας ίσης με την ποσότητα του φορτίου που φέρει ένα μόνο ηλεκτρόνιο. Συμβολίζουμε το μέτρο αυτού του φορτίου με  $e$ . (Αν μας ενδιαφέρει το πρόσημο, γράφουμε  $-e$  για το φορτίο του ίδιου του ηλεκτρονίου.) Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το ποζιτρόνιο φέρει την ίδια ακριβώς ποσότητα φορτίου, όπως και πραγματικά θα πρέπει να συμβαίνει για να διατηρηθεί το φορτίο όταν ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο εξαυλώνονται, αφήνοντας πίσω τους μόνο φως. Αυτό όμως που είναι ακόμη πιο αξιοσημείωτο είναι η κατά τα φαινόμενα ακριβής ισότητα των φορτίων που φέρουν όλα τα άλλα φορτισμένα σωματίδια — η ισότητα, για παράδειγμα, του θετικού φορτίου του πρωτονίου και του αρνητικού φορτίου του ηλεκτρονίου.

Αυτή η συγκεκριμένη ισότητα μπορεί εύκολα να ελεγχθεί πειραματικά. Μπορούμε να διαπιστώσουμε αν το καθαρό ηλεκτρικό φορτίο που φέρει το μόριο του υδρογόνου, το οποίο αποτελείται από δύο πρωτόνια και δύο ηλεκτρόνια, είναι μηδέν. Σε ένα πείραμα που έκανε ο J. G. King,<sup>†</sup> αέριο υδρογόνο συμπιέστηκε σε ένα δοχείο που ήταν ηλεκτρικά απομονωμένο από το περιβάλλον. Το δοχείο περιείχε  $5 \times 10^{24}$  μόρια (17 g περίπου) υδρογόνου. Μετά το αέριο αφέθηκε να διαφύγει με κάποιο τρόπο που εμπόδισε τη διαφυγή ιόντων — δηλαδή μορίων που έχουν είτε ένα ηλεκτρόνιο λιγότερο είτε ένα περισσότερο. Εάν το φορτίο του πρωτονίου διέφερε από το φορτίο του ηλεκτρονίου, ας πούμε κατά 1 προς ένα δισεκατομμύριο, το κάθε μόριο υδρογόνου θα έφερε φορτίο  $2 \times 10^{-9}e$  και η αφαίρεση της συνολικής μάζας του υδρογόνου θα άλλαζε το φορτίο του δοχείου κατά  $10^{16}e$ , ένα γιγαντιαίο αποτέλεσμα. Πράγματι το πείραμα θα μπορούσε να είχε αποκαλύψει ένα υπόλοιπο μοριακού φορτίου της τάξης του  $2 \times 10^{-20}e$ , όμως δεν παρατηρήθηκε καμία διαφορά. Το πείραμα απέδειξε ότι τα φορτία του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου δεν διαφέρουν κατά μέτρο περισσότερο από 1 προς  $10^{20}$ .

Πιθανόν η ισότητα αυτή να είναι απόλυτη για κάποιο λόγο που ακόμα δεν κατανοούμε. Είναι πιθανόν, σύμφωνα με πρόσφατες θεωρίες, να συνδέεται με τη δυνατότητα ότι ένα πρωτόνιο μπορεί, *πάρρα πολύ σπάνια*, να διασπαστεί σε ένα ποζιτρόνιο και μερικά αφόρτιστα σωματίδια. Αν πράγματι τούτο μπορούσε να συμβεί, ακόμα

<sup>†</sup> J. G. King, *Phys. Rev. Lett.* 5:562 (1960). Παραπομπές σε προηγούμενες εργασίες ελέγχου της ισότητας φορτίου βρίσκονται σε αυτό το άρθρο και στο κεφάλαιο του V. W. Hughes του βιβλίου «Gravity and Relativity». H. Y. Chieu and W. P. Hoffman (eds), του οίκου W. A. Benjamin, New York, 1964, Κεφ. 13.

και η πιο ανεπαίσθητη διαφορά μεταξύ του φορτίου του πρωτονίου και του ποζιτρονίου θα παραβίαζε τη διατήρηση του φορτίου. Πολλά πειράματα που σχεδιάστηκαν με σκοπό να ανιχνεύσουν τη διάσπαση του πρωτονίου απέτυχαν — μέχρι στιγμής τουλάχιστον καθώς το βιβλίο αυτό γράφτηκε το 1983 — να καταγράψουν με βεβαιότητα έστω και μία μόνο διάσπαση. Αν και όταν παρατηρηθούν τέτοια γεγονότα, θα φανεί ότι η ακριβής ισότητα των μέτρων του φορτίου του πρωτονίου και του φορτίου του ηλεκτρονίου (του αντισωματιδίου του ποζιτρονίου) μπορεί να θεωρηθεί ως επακόλουθο του γενικότερου νόμου της διατήρησης του φορτίου.

Παρ' όλα αυτά, υπάρχει σήμερα αδιάσειστη ένδειξη ότι η εσωτερική δομή όλων των ισχυρά αλληλεπιδρώντων σωματιδίων που τα ονομάζουμε *αδρόνια* — μια κατηγορία η οποία περιλαμβάνει τα πρωτόνια και τα νετρόνια — εμπεριέχει θεμελιώδεις μονάδες που τις ονομάζουμε *κουάρκ*, τα ηλεκτρικά φορτία των οποίων εμφανίζονται ως πολλαπλάσια της τιμής  $e/3$ . Το πρωτόνιο, λ.χ., σχηματίζεται από τρία κουάρκ, δύο με φορτίο  $2e/3$  και ένα με φορτίο  $-e/3$ .

Πολλοί πειραματικοί έψαξαν να βρουν μοναχικά κουάρκ, είτε ελεύθερα είτε προσκολλημένα σε συνηθισμένη ύλη. Το κλασματικό φορτίο ενός τέτοιου κουάρκ, μια και δεν μπορεί να εξουδετερωθεί από οποιονδήποτε αριθμό ηλεκτρονίων ή πρωτονίων, θα προδίκε την παρουσία του κουάρκ. Μέχρι τώρα κανένα σωματίδιο με κλασματικό φορτίο δεν έχει αδιαμφισβήτητα αναγνωρισθεί. Υπάρχει θεωρητικό υπόβαθρο που μας κάνει να πιστεύουμε ότι η απελευθέρωση ενός κουάρκ από ένα αδρόνιο είναι αδύνατη, το ερώτημα όμως παραμένει ανοιχτό προς το παρόν.

Φυσικά, η κβάντωση του φορτίου βρίσκεται έξω από το αντικείμενο του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού. Θα την παραβλέπουμε συνήθως και θα θεωρούμε ότι τα σημειακά φορτία  $q$  μπορούν να έχουν οποιαδήποτε τιμή. Αυτό δεν θα μας προκαλέσει κανένα πρόβλημα. Μολαταύτα, αξίζει να θυμόμαστε ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε πως η κλασική θεωρία μπορεί να ερμηνεύσει τη δομή των στοιχειωδών σωματιδίων. (Δεν είναι βέβαιο ούτε ότι η σύγχρονη κβαντική θεωρία μπορεί να το κάνει!) Το τι κρατάει το ηλεκτρόνιο ως αυτοτελές σωματίδιο είναι εξίσου μυστήριο με το τι καθορίζει την ακριβή τιμή του φορτίου του. Θα πρέπει να λαμβάνει μέρος κάτι περισσότερο από ηλεκτρικές δυνάμεις, γιατί οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις μεταξύ των διαφόρων τμημάτων του ηλεκτρονίου είναι απωστικές.

Κατά τη μελέτη του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού θα θεωρήσουμε τα φορτισμένα σωματίδια απλώς ως φορείς φορτίου, με διαστάσεις τόσο μικρές, ώστε η έκταση και η δομή τους να είναι για τις περισσότερες περιπτώσεις εντελώς ασήμαντες. Στην περίπτωση του πρωτονίου, λ.χ., γνωρίζουμε από πειράματα σκέδασης σε υψηλές ενέργειες ότι το ηλεκτρικό φορτίο δεν εκτείνεται αισθητά πέρα από μια ακτίνα  $10^{-13}$  cm. Υπενθυμίζουμε ότι η ανάλυση της σκέδασης Rutherford σωματιδίων άλφα έδειξε ότι ακόμα και σε βαρείς πυρήνες η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου εκτεινόταν σε περιοχή μικρότερη από  $10^{-11}$  cm. Για τον φυσικό του δέκατου ένατου αιώνα το «σημειακό φορτίο» παρέμενε μια αφηρημένη έννοια. Σήμερα έχου-



με εξοικειωθεί με τα ατομικά σωματίδια. Η κοκκώδης σύσταση του ηλεκτρισμού είναι τόσο ευδιάκριτη στη σημερινή περιγραφή της φύσης, ώστε να θεωρούμε το σημειακό φορτίο ως λιγότερο τεχνητή εξιδανίκευση από την ομαλά μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου. Όταν μιλάμε για τέτοιες ομαλές κατανομές φορτίου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελούν μέσες τιμές ενός μεγάλου αριθμού σημειακών φορτίων, με τον ίδιο τρόπο που μπορούμε να ορίσουμε τη μακροσκοπική πυκνότητα ενός υγρού, παραβλέποντας την κοκκώδη του υφή σε μοριακή κλίμακα.

## NOMΟΣ COULOMB

**1.4** Όπως πιθανόν ήδη γνωρίζετε, η αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων σε ηρεμία περιγράφεται από το νόμο Coulomb. Δύο στάσιμα ηλεκτρικά φορτία απωθούνται ή έλκονται με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μέτρων των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης.

Μπορούμε να διατυπώσουμε αυτήν τη σχέση συνοπτικά σε διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \quad (1)$$

όπου  $q_1$  και  $q_2$  είναι αριθμοί (βαθμωτά μεγέθη) που δίνουν το μέτρο και το πρόσημο των αντίστοιχων φορτίων,  $\hat{\mathbf{r}}_{21}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με φορά<sup>†</sup> από το φορτίο 1 στο φορτίο 2, και  $\mathbf{F}_2$  είναι η δύναμη που ασκείται πάνω στο φορτίο 2. Έτσι η Εξ. 1 εκφράζει, μεταξύ άλλων, το γεγονός ότι όμοια φορτία απωθούνται και ανόμοια έλκονται. Ακόμα, η δύναμη υπακούει στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλ.  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ .

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\mathbf{r}}_{21}$  δείχνει ότι η δύναμη είναι παράλληλη με τη γραμμή που ενώνει τα φορτία. Δεν θα μπορούσε να συμβαίνει διαφορετικά, εκτός αν ο χώρος είχε κάποια ενδογενή ιδιότητα κατεύθυνσης αφού, με μόνο δύο σημειακά φορτία σε κενό και ισοτροπικό χώρο, καμία άλλη κατεύθυνση δεν θα μπορούσε να ξεχωρίσει.

Εάν το ίδιο το σημειακό φορτίο είχε κάποια εσωτερική δομή με έναν άξονα που να καθορίζει κάποια διεύθυνση, τότε θα έπρεπε να περιγράφεται με κάτι παραπάνω από μian απλή βαθμωτή ποσότητα  $q$ . Είναι αλήθεια ότι κάποια στοιχειώδη σωματίδια, συμπεριλαμβανομένου και του ηλεκτρονίου, έχουν μian άλλη ιδιότητα που την ονομάζουμε σπιν. Το σπιν δημιουργεί μια μαγνητική δύναμη ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόνια επιπλέον της ηλεκτροστατικής άπωσης. Αυτή η μαγνητική δύναμη δεν δρα εν γένει κατά τη διεύθυνση που ενώνει τα δύο σωματίδια. Ελαττώνεται με το αντίστροφο της τέταρτης δύναμης της απόστασης και, σε ατομικές αποστάσεις της τάξης του

<sup>†</sup> Η σύμβαση που υιοθετούμε εδώ μπορεί να μη φαίνεται μια φυσική επιλογή, είναι όμως πιο συνεπής με τη χρήση της σε άλλα θέματα της φυσικής και θα προσπαθήσουμε να την ακολουθήσουμε σε όλη την έκταση αυτού του βιβλίου.

$10^{-8}$  cm, η δύναμη Coulomb είναι ήδη  $10^4$  φορές μεγαλύτερη από τη μαγνητική αλληλεπίδραση των σπιν. Μια πρόσθετη μαγνητική δύναμη εμφανίζεται όταν τα φορτία κινούνται – και γι' αυτό εφαρμόζουμε τον περιορισμό των στατικών φορτίων κατά τη διατύπωση του νόμου Coulomb. Θα επανέλθουμε σε αυτά τα μαγνητικά φαινόμενα σε επόμενα κεφάλαια.

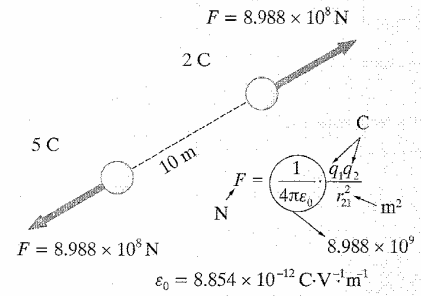
Φυσικά πρέπει να υποθέτουμε, όταν γράφουμε την Εξ. 1, ότι και τα δύο φορτία κατέχουν καλά καθορισμένες θέσεις στο χώρο και ότι το καθένα καταλαμβάνει μια περιοχή μικρή συγκρινόμενη με την απόσταση  $r_{21}$ . Στην αντίθετη περίπτωση δεν θα μπορούσαμε καν να καθορίσουμε με ακρίβεια την απόσταση  $r_{21}$ .

Η τιμή της σταθεράς  $k$  στην Εξ. 1 εξαρτάται από τις μονάδες που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε τις ποσότητες  $r$ ,  $F$ , και  $q$ . Στο *Système International* (SI) η μονάδα μέτρησης του φορτίου είναι το coulomb (C) και ορίζεται από την Εξ. 1, όπου το  $F$  μετριέται σε newton (N), το  $r_{21}$  σε m, και  $k = 1/4\pi\epsilon_0 \approx 8,988 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$  (Με  $\epsilon_0$ , όπως θα δούμε αργότερα, συμβολίζεται η διηλεκτρική σταθερά ή διαπερατότητα του κενού.) Με αυτές τις παραδοχές η Εξ. 1 γράφεται:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \quad (1)$$

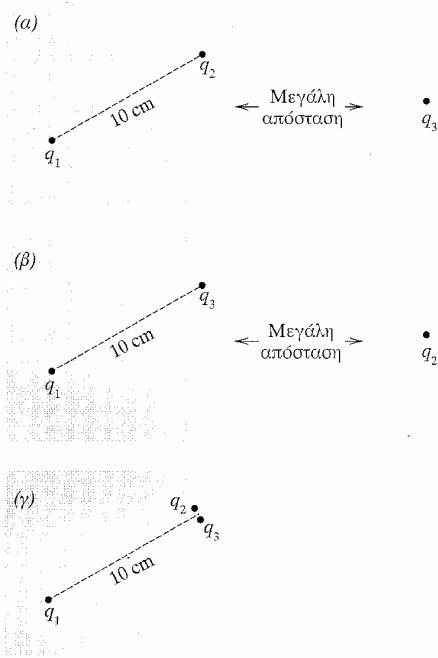
Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 1.2. Η σταθερά  $\epsilon_0$  εμφανίζεται σε πολλές σχέσεις που εκφράζονται σε μονάδες SI. Οι ακριβείς τιμές διαφόρων σταθερών δίνονται στο Παράρτημα Ε. Ευτυχώς το φορτίο του ηλεκτρονίου έχει μια αρκετά ευκολομνημόνευτη τιμή,  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

Ο μόνος τρόπος που διαθέτουμε για να μετράμε ηλεκτρικά φορτία είναι μέσω των αλληλεπιδράσεων φορτισμένων σωματιδίων. Θα μπορούσαμε ν' αναρωτηθούμε λοιπόν κατά πόσον, στην πράξη, ένα τμήμα του φυσικού περιεχομένου του νόμου του Coulomb είναι απλώς ορισμός. Όπως έχουν τα πράγματα, το σημαντικό φυσικό περιεχόμενο του νόμου Coulomb είναι η εξάρτηση από το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης και, κατά συνεκδοχή, το ότι η επίδραση του ηλεκτρικού φορτίου στο περιβάλλον του είναι *προσθετική*. Για να αναδείξουμε το τελευταίο αυτό σημείο πρέπει να θεωρήσουμε *περισσότερα* από δύο φορτία. Στο κάτω κάτω, αν είχαμε δύο μόνο φορτία σε όλο τον κόσμο για να πειραματιστούμε, δηλαδή τα  $q_1$  και  $q_2$ , δεν θα μπορούσαμε ποτέ να τα μετρήσουμε χωριστά. Θα μπορούσαμε μόνο να επιβεβαιώσουμε ότι η  $F$  είναι ανάλογη του  $1/r_{21}^2$ . Υποθέστε ότι έχουμε *τρία* σώματα που φέρουν φορτία  $q_1$ ,  $q_2$  και  $q_3$ . Μπορούμε να μετρήσουμε τη δύναμη που ασκείται στο  $q_1$  όταν το  $q_2$  απέχει από αυτό 10 cm και το  $q_3$  βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.3α. Μετά, μπορούμε ν' απομακρύνουμε το  $q_2$ , να φέρουμε το  $q_3$  στην προηγούμενη θέση του  $q_2$ , και να μετρήσουμε ξανά τη δύναμη που ασκείται στο  $q_1$ . Τέλος, φέρνουμε τα  $q_2$  και  $q_3$  πολύ κοντά και τοποθετούμε το συνδυασμό σε απόσταση 10 cm από το  $q_1$ . Βρίσκουμε πειραματικά ότι η δύναμη στο  $q_1$  είναι το άθροισμα των δυνάμεων που μετρήσαμε προηγουμένως. Αυτό είναι ένα σημαντικό γεγονός, που δεν θα μπορούσε να



ΣΧΗΜΑ 1.2

Ο νόμος Coulomb σε μονάδες SI. Η σταθερά  $\epsilon_0$  σχετίζεται, όπως θα δούμε παρακάτω, με την ταχύτητα του φωτός. Οι τιμές είναι στρογγυλοποιημένες σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Οι ακριβείς τιμές δίνονται στο Παράρτημα Ε.



ΣΧΗΜΑ 1.3

Η δύναμη πάνω στο  $q_1$  στο (γ) είναι το άθροισμα των δυνάμεων πάνω στο  $q_1$  στα (α) και (β).

προβλεφθεί με λογικά επιχειρήματα συμμετρίας, όπως αυτά που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω για να δείξουμε ότι η δύναμη μεταξύ δύο σημειακών φορτίων έπρεπε να συμπίπτει με τη γραμμή που τα ενώνει. Η δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν δύο σημειακά φορτία δεν αλλάζει από την παρουσία ενός τρίτου φορτίου.

Ανεξάρτητα από το πόσα φορτία έχουμε στο σύστημά μας, ο νόμος Coulomb (Εξ. 1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει την αλληλεπίδραση κάθε ζεύγους. Αυτή η ικανότητα είναι η βάση της αρχής της επαλληλίας, την οποία θα εφαρμόσουμε ξανά και ξανά στη μελέτη του ηλεκτρομαγνητισμού. Επαλληλία σημαίνει να συνδυάσουμε δύο σύνολα πηγών σε ένα σύστημα προσθέτοντας το δεύτερο «επάνω» στο πρώτο χωρίς να τροποποιήσουμε τη διάταξη κανενός. Η αρχή αυτή μάς διαβεβαιώνει ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο, τοποθετημένο σε οποιοδήποτε σημείο του συνδυασμού, θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που κάθε σύστημα από μόνο του ασκεί σε αυτό το σημείο. Αυτή η αρχή δεν πρέπει να λαμβάνεται αβασάνιστα ως δεδομένη. Μπορεί κάλλιστα να υπάρχει μια περιοχί δεδομένων, που χαρακτηρίζεται από πολύ μικρές αποστάσεις ή πολύ ισχυρές δυνάμεις, όπου η επαλληλία παύει να ισχύει. Γνωρίζουμε πράγματι κβαντικά φαινόμενα στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στα οποία η επαλληλία καταρρέει, όταν το φαινόμενο εξετάζεται από τη σκοπιά της κλασικής θεωρίας.

Επομένως, η φυσική των ηλεκτρικών αλληλεπιδράσεων μάς παρουσιάζεται σε πλήρη θέα, μόνο όταν έχουμε περισσότερα από δύο φορτία. Μπορούμε να πάμε πέρα από τη ρητή διατύπωση της Εξ. 1 και να ισχυριστούμε ότι, με τα τρία φορτία του Σχ. 1.3 που κατέχουν οποιοδήποτε θέσεις, η δύναμη που ασκείται σε κάποιο από αυτά, έστω στο  $q_3$ , δίνεται σωστά από την εξίσωση:

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_3 q_1 \hat{r}_{31}}{r_{31}^2} + \frac{q_3 q_2 \hat{r}_{32}}{r_{32}^2} \right) \quad (2)$$

Η πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου των ηλεκτρικών έλξεων και απώσεων έχει μια παράξενη ιστορία. Ο ίδιος ο Coulomb ανακοίνωσε το νόμο το 1786, όταν μέτρησε με ζυγό στρέψης τη δύναμη μεταξύ μικρών φορτισμένων σφαιρών. Είκοσι χρόνια νωρίτερα όμως ο Joseph Priestly, κάνοντας ένα πείραμα που του είχε υποδείξει ο Benjamin Franklin, είχε παρατηρήσει την απουσία ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης σε ένα φορτισμένο κοίλο δοχείο και έκανε μια εμπνευσμένη πρόβλεψη: «Μπορούμε να μη συμπεράνουμε από αυτό το πείραμα ότι η ηλεκτρική έλξη υπόκειται στους ίδιους νόμους με αυτούς της βαρύτητας και ότι, ως εκ τούτου, συμπεριφέρεται σύμφωνα με το τετράγωνο της απόστασης, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν η γη είχε τη μορφή κελύφους, ένα σώμα στο εσωτερικό της δεν θα ελκόταν προς την μία πλευρά πιο πολύ από ό,τι προς την άλλη;»<sup>†</sup>. Η ίδια ιδέα αποτέλεσε τη βάση ενός κομψού πειράματος το 1772 από τον Henry

<sup>†</sup> Joseph Priestly, «The History and Present State of Electricity,» vol. II, London, 1767.

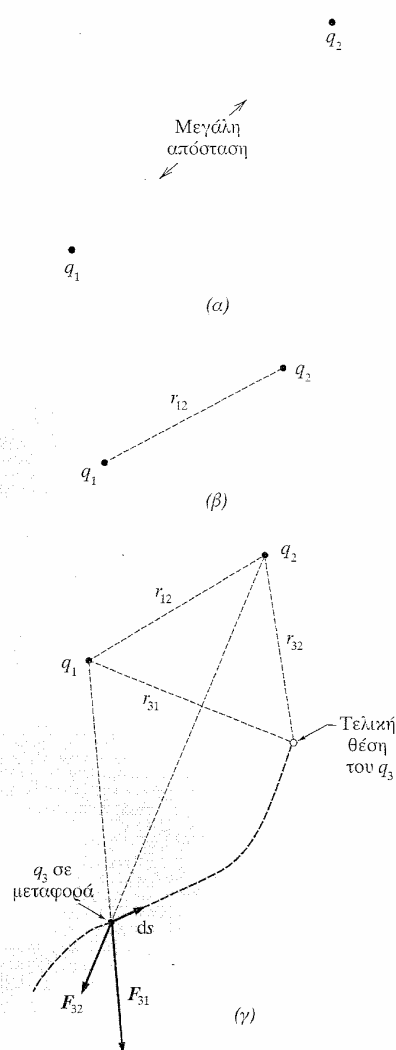
Cavendish. Ο Cavendish φρότισε ένα σφαιρικό αγωγίμο κέλυφος, το οποίο περιείχε στο εσωτερικό του μια μικρότερη σφαίρα, η οποία βρισκόταν προσωρινά σε επαφή με αυτό. Στη συνέχεια το κέλυφος χωρίστηκε σε δύο μισά που απομακρύνθηκαν με προσοχή, αφού προηγουμένως αποσυνδέθηκε η μικρή σφαίρα. Η σφαίρα αυτή ελέγχθηκε ως προς την ύπαρξη φορτίου, η απουσία του οποίου θα επιβεβαίωνε το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου. Υποθέτοντας ότι η απόκλιση από το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου θα μπορούσε να εκφραστεί ως διαφορά του εκθέτη, *ας πούμε*  $2 + \delta$ , αντί της τιμής 2, ο Cavendish συμπέρανε ότι το  $\delta$  έπρεπε να ήταν μικρότερο από 0,03. Το πείραμα του Cavendish παρέμεινε σχεδόν άγνωστο έως ότου ο Maxwell ανακάλυψε και δημοσίευσε τις σημειώσεις του Cavendish έναν αιώνα αργότερα (1876). Την ίδια εποχή ο ίδιος ο Maxwell επανέλαβε το πείραμα με βελτιωμένες συσκευές, σπρώχνοντας το όριο στην τιμή  $\delta < 10^{-6}$ . Οι πιο πρόσφατες από τις διάφορες σύγχρονες εκδόσεις του πειράματος του Cavendish<sup>†</sup> έδωσαν ως αποτέλεσμα το εξαιρετικά μικρό όριο  $\delta < 10^{-15}$ .

Μετά τον Cavendish, κατά τη διάρκεια του εικοστού αιώνα, το ερώτημα που κινούσε το ενδιαφέρον άλλαξε κατά κάποιον τρόπο. Ανεξάρτητα από το πόσο καλά ισχύει ο νόμος Coulomb για φορτισμένα σώματα στο εργαστήριο, υπάρχει κάποια περιοχή αποστάσεων στην οποία να καταρρέει ολοσχερώς; Υπάρχουν δύο περιοχές σε καθεμία από τις οποίες η πλήρης κατάρρευση δεν είναι αδιανόητη. Η πρώτη είναι η περιοχή των πολύ μικρών αποστάσεων, μικρότερων από  $10^{-14}$  cm, όπου η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, όπως τη γνωρίζουμε, μπορεί να μην ισχύει καθόλου. Όσον αφορά τις πολύ μεγάλες αποστάσεις, από γεωγραφικές, *ας πούμε*, έως αστρονομικές, ο έλεγχος του νόμου του Coulomb με τη μέθοδο του Cavendish δεν είναι προφανώς εφικτός. Παρ' ολ' αυτά, παρατηρούμε όντως κάποια ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα μεγάλης κλίμακας που αποδεικνύουν ότι οι νόμοι του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού ισχύουν σε πολύ μεγάλες αποστάσεις. Μία από τις πλέον αναμφισβήτητες αποδείξεις μάς δίνεται από τα πλανητικά μαγνητικά πεδία, και συγκεκριμένα από τα μαγνητικά πεδία του γιγάντιου πλανήτη Δία, ο οποίος είχε χαρτογραφηθεί κατά την αποστολή Pioneer 10. Η χωρική μεταβολή αυτού του πεδίου έχει αναλυθεί πολύ προσεκτικά<sup>‡</sup> και έχει βρεθεί ότι είναι απόλυτα συνεπής με την κλασική θεωρία σε απόσταση τουλάχιστον  $10^5$  km από τον πλανήτη. Τούτο είναι ταυτόσημο με έναν έλεγχο, αν και έμμεσο, της ισχύος του νόμου Coulomb έως αυτή την απόσταση.

Συνοψίζοντας, έχουμε κάθε λόγο να είμαστε σίγουροι για το νόμο Coulomb σε περιοχή 20 τάξεων μεγέθους, από  $10^{-12}$  m έως  $10^8$  m, αν όχι μακρύτερα, και το γεγονός αυτό το λαμβάνουμε ως το θεμέλιο της περιγραφής του ηλεκτρομαγνητισμού.

<sup>†</sup> E. R. Williams, J. G. Faller, and H. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**:721 (1971).

<sup>‡</sup> L. Davis, Jr., A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **35**:1402 (1975). Για μια ανασκόπηση της ιστορίας της εξερεύνησης των πιο απομακρυσμένων ορίων του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού, βλ. A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**:277 (1971).



ΣΧΗΜΑ 1.4

Τρία φορτία τοποθετούνται σε γειτονικές θέσεις. Πρώτα φέρνουμε το  $q_2$ . Μετά, με τα  $q_1$  και  $q_2$  στη θέση τους, φέρνουμε το  $q_3$ .

## ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ

1.5 Στα βασικά του σημεία ο νόμος Coulomb περιγράφει όλη την ηλεκτροστατική. Όταν δοθούν τα φορτία και οι θέσεις τους, μπορούμε να βρούμε όλες τις ηλεκτρικές δυνάμεις. Ή, όταν δοθεί ότι τα φορτία είναι ελεύθερα να κινούνται υπό την επίδραση και άλλου είδους δυνάμεων, μπορούμε να βρούμε τη διάταξη ισορροπίας στην οποία η κατανομή των φορτίων θα παραμείνει στάσιμη. Με την ίδια έννοια, οι νόμοι της κίνησης του Νεύτωνα περιγράφουν όλη τη μηχανική. Τόσο όμως στη μηχανική όσο και στον ηλεκτρομαγνητισμό κερδίζουμε σε αναλυτική ισχύ και διορατικότητα με την εισαγωγή άλλων εννοιών, και ειδικότερα της έννοιας της ενέργειας.

Η ενέργεια είναι εδώ μια χρήσιμη έννοια, επειδή οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι *διατηρητικές*. Όταν μετακινούνται φορτία σε διάφορα σημεία μέσα σε ηλεκτρικά πεδία, καμιά ποσότητα ενέργειας δεν χάνεται αμετάκλητα. Τα πάντα είναι εντελώς αναστρέψιμα. Θεωρήστε πρώτα το έργο που πρέπει να καταβληθεί *πάνω* στο σύστημα για να τοποθετηθούν κάποια φορτισμένα σώματα σε μια συγκεκριμένη διάταξη. Ας αρχίσουμε με δύο φορτισμένα σώματα ή σωματίδια που βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο επάνω μέρος του Σχ. 1.4, και έχουν φορτία  $q_1$  και  $q_2$ . Το πόση ενέργεια μπορεί να είχε χρειαστεί αρχικά για τη δημιουργία αυτών των δύο συγκεντρώσεων φορτίου δεν θα το λάβουμε καθόλου υπόψη. Πλησιάστε τα σωματίδια αργά έως ότου η απόστασή τους γίνει  $r_{12}$ . Πόσο έργο χρειάστηκε;

Δεν έχει καμιά διαφορά αν φέρουμε το  $q_1$  προς το  $q_2$  ή αντιστρόφως. Σε κάθε περίπτωση το έργο που καταβλήθηκε είναι το ολοκλήρωμα του γινομένου: δύναμη επί μετατόπιση κατά τη διεύθυνση της δύναμης. Η δύναμη που απαιτείται για να κινήσει το ένα φορτίο προς το άλλο είναι ίση και αντίθετη της δύναμης Coulomb.

$$W = \int \text{δύναμη} \times \text{μετατόπιση} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (3)$$

Επειδή το  $r$  μεταβάλλεται από το  $\infty$  έως το  $r_{12}$ , η αύξηση της απόστασης είναι  $-dr$ . Γνωρίζουμε ότι το έργο που προσφέρεται στο σύστημα πρέπει να είναι θετικό για φορτία με το ίδιο πρόσημο, επειδή πρέπει να σπρώξουμε το ένα προς το άλλο. Με τα  $q_1$  και  $q_2$  σε coulomb (C) και το  $r_{12}$  σε μέτρα (m), η Εξ. 3 δίνει το έργο σε joule (J).

Το έργο αυτό είναι πάντα το ίδιο, ανεξάρτητα από την πορεία της προσέγγισης. Ας δούμε πώς εφαρμόζεται αυτό το επιχειρήματα στα δύο φορτία του Σχ. 1.5. Στο σχήμα κρατάμε το  $q_1$  σταθερό και δείχνουμε το  $q_2$  να κινείται ως την ίδια τελική θέση κατά μήκος δύο διαφορετικών διαδρομών. Κάθε σφαιρικό κέλυφος, όπως αυτό που φαίνεται μεταξύ των  $r$  και  $r + dr$ , πρέπει να διασχίζεται και από τις δύο διαδρομές. Η αύξηση του έργου που καταβάλλεται,  $-F \cdot ds$  σε αυτό το κομμάτι της διαδρομής, είναι το ίδιο και για τις δύο διαδρομές.<sup>†</sup> Ο λόγος είναι ότι το  $F$  έχει το ίδιο μέτρο και στις δύο θέσεις

<sup>†</sup> Εδώ χρησιμοποιούμε για πρώτη φορά το βαθμωτό γινόμενο, ή εσωτερικό γινόμενο, δύο διανυσμάτων. Υπενθύμιση: το βαθμωτό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $A$  και

και κατεύθυνση κατά την ακτίνα με κέντρο το  $q_1$ , ενώ  $ds = dr/\cos \theta$ , επομένως  $F \cdot ds = F dr$ . Κάθε αύξηση του έργου κατά μήκος μιας διαδρομής ισούται ακριβώς με την αντίστοιχη αύξηση κατά μήκος της άλλης και έτσι τα αθροίσματα πρέπει να είναι ίσα. Το συμπέρασμα μας ισχύει ακόμα και όταν ο δρόμος μπαινοβγαίνει στο κελυφος, όπως η διακεκομμένη γραμμή του Σχ. 1.5. (Γιατί;)

Επιστρέφοντας τώρα στα δύο φορτία του Σχ. 1.4β, ας φέρουμε από κάποια απομακρυσμένη θέση ένα τρίτο φορτίο  $q_3$  και ας το μετακινήσουμε στο σημείο  $P_3$ , η απόσταση του οποίου από το φορτίο 1 είναι  $r_{31}$  και από το φορτίο 2,  $r_{32}$ . Το έργο που απαιτείται για να το επιτύχουμε αυτό θα είναι

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_3} F_3 \cdot ds \quad (4)$$

Εξαιτίας της επαλληλίας των ηλεκτρικών αλληλεπιδράσεων, που ήδη έχουμε τονίσει,

$$\begin{aligned} - \int F_3 \cdot ds &= - \int (F_{31} + F_{32}) \cdot ds \\ &= - \int F_{31} \cdot dr - \int F_{32} \cdot dr \end{aligned} \quad (5)$$

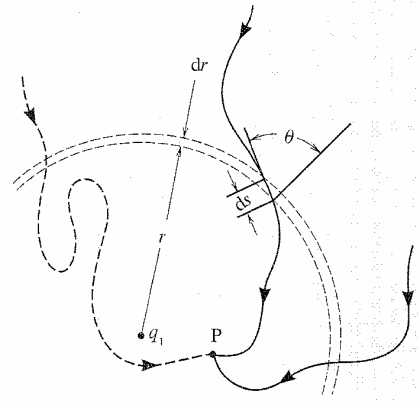
Δηλαδή, το έργο που απαιτείται για να φέρουμε το  $q_3$  στο  $P_3$  είναι το άθροισμα του έργου που απαιτείται όταν το  $q_1$  είναι μόνο του και του έργου που απαιτείται όταν το  $q_2$  είναι μόνο του.

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right) \quad (6)$$

Το ολικό έργο που απαιτείται για να συγκεντρώσουμε αυτά τα τρία φορτία, το οποίο θα συμβολίσουμε με  $U$ , ισούται επομένως με,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad (7)$$

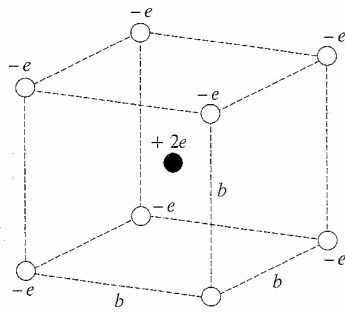
Σημειώνουμε ότι τα  $q_1$ ,  $q_2$  και  $q_3$  εμφανίζονται συμμετρικά στην παραπάνω έκφραση, μολονότι το  $q_3$  τοποθετήθηκε τελευταίο. Θα είχαμε φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα αν το  $q_3$  είχε τοποθετηθεί πρώτο. (Δοκιμάστε το.) Επομένως το  $U$  είναι ανεξάρτητο της σειράς με την οποία τοποθετήθηκαν τα φορτία. Αφού είναι επίσης ανεξάρτητο από το δρόμο που ακολούθησε κάθε φορτίο, το  $U$  θα πρέπει να είναι μια μοναδική ιδιότητα της τελικής διάταξης των φορτίων. Μπορούμε να το αποκαλέσουμε *ηλεκτρική δυναμική ενέργεια* του συγκεκριμένου αυτού συστήματος. Όπως πάντα, υπάρχει κάποια αυθαιρεσία στον ορισμό της δυναμικής ενέργειας. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε διαλέξει τη μηδενική δυναμική ενέργεια ν' αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου τα τρία φορτία υπάρχουν ήδη αλλά σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Η δυναμική ενέργεια *ανήκει σε ολό-*



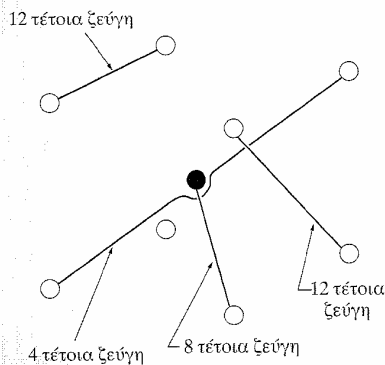
ΣΧΗΜΑ 1.5

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική, τα τμήματα διαφορετικών διαδρομών ανάμεσα στο  $r+dr$  και το  $r$  απαιτούν την ίδια ποσότητα έργου.

$B$ , που γράφεται  $A \cdot B$ , είναι ο αριθμός  $AB \cos \theta$ .  $A$  και  $B$  είναι τα μέτρα των διανυσμάτων  $A$  και  $B$ , και  $\theta$  η μεταξύ τους γωνία. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζεται ως  $A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .



(a)



(β)

**ΣΧΗΜΑ 1.6**

(α) Η δυναμική ενέργεια αυτής της διάταξης των εννέα σημειακών φορτίων δίνεται από την Εξ. 9.  
 (β) Στο άθροισμα περιλαμβάνονται τέσσερα ζεύγη φορτίων.

κλήρη συνολικά τη διάταξη. Δεν έχει έννοια να προσδώσουμε κάποιο κλάσμα της ενέργειας σε κάποιο από τα φορτία.

Είναι προφανές ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να γενικευτεί αυτό το απλό αποτέλεσμα, ώστε να εφαρμόζεται σε οποιονδήποτε αριθμό φορτίων. Εάν έχουμε  $N$  διαφορετικά φορτία, σε οποιαδήποτε διάταξη στο χώρο, υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος αθροίζοντας τη συνεισφορά όλων των ζευγών, όπως κάναμε στην Εξ. 7. Η μηδενική τιμή της ενέργειας, όπως και σε εκείνη την περίπτωση, αντιστοιχεί στη θέση στην οποία οι μεταξύ των φορτίων αποστάσεις είναι πάρα πολύ μεγάλες.

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα τη δυναμική ενέργεια μιας διάταξης οκτώ αρνητικών φορτίων στις κορυφές ενός κύβου πλευράς  $b$ , και ενός θετικού φορτίου στο κέντρο του κύβου, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.6α. Υποθέστε ότι κάθε αρνητικό φορτίο είναι ηλεκτρόνιο με φορτίο  $-e$ , ενώ το κεντρικό σωματίδιο φέρει διπλό θετικό φορτίο,  $2e$ . Αθροίζοντας όλα τα ζεύγη, έχουμε:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}b} \right) = \frac{4,32e^2}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (8)$$

Στο Σχ. 1.6β φαίνεται ο τρόπος εξαγωγής κάθε όρου του αθροίσματος. Η ενέργεια είναι θετική, υποδεικνύοντας ότι έπρεπε να προσφερθεί έργο στο σύστημα για να συγκεντρωθούν τα φορτία. Αυτό το έργο θα μπορούσε φυσικά να ανακτηθεί, αν αφήναμε τα φορτία να απομακρυνθούν, ασκώντας δυνάμεις σε κάποιο εξωτερικό σώμα ή σώματα. Ή, εναλλακτικά, αν τα ηλεκτρόνια απλώς απομακρύνονταν από τη θέση τους, η *ολική κινητική ενέργεια* όλων των σωματιδίων θα γινόταν ίση με το  $U$ . Αυτό θα αληθεύει, άσχετα με το αν τα σωματίδια απομακρύνονταν όλα μαζί και συμμετρικά, ή ένα ένα με οποιαδήποτε σειρά. Το παράδειγμα δείχνει την αποτελεσματικότητα αυτής της απλής έννοιας της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Σκεφτείτε το μέγεθος του προβλήματος που θα είχαμε εάν επρόκειτο να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο σε κάθε στάδιο της συγκέντρωσης των φορτίων! Στην προκειμένη περίπτωση η γεωμετρική συμμετρία θα απλοποιούσε βέβαια τη διαδικασία· ακόμα κι έτσι όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη από τον απλό παραπάνω υπολογισμό.

Ένας τρόπος για να συμβολίσουμε το άθροισμα ανά ζεύγη είναι ο ακόλουθος:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \right) \quad (9)$$

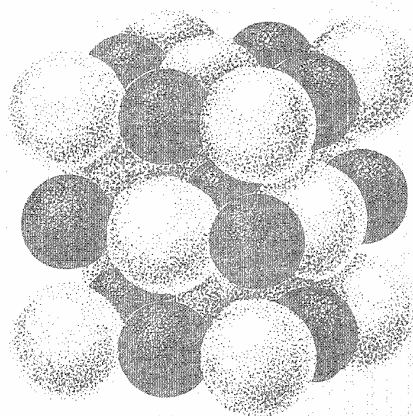
Ο συμβολισμός διπλού αθροίσματος  $\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N$  σημαίνει: Επιλέξτε  $j = 1$  και αθροίστε για  $k = 2, 3, 4, \dots, N$ . Μετά, επιλέξτε  $j = 2$  και αθροίστε για  $k = 1, 3, 4, \dots, N$ , κ.ο.κ. ως το  $j = N$ . Προφανώς αυτή η διαδικασία περιλαμβάνει κάθε ζεύγος δύο φορές και, για να διορθώσουμε το αποτέλεσμα, διαιρούμε με το 2.

**ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ**

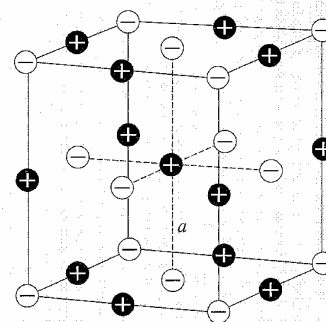
**1.6** Οι παραπάνω ιδέες βρίσκουν μια σημαντική εφαρμογή στη φυσική των κρυστάλλων. Γνωρίζουμε ότι ένας ιοντικός κρύσταλλος όπως το χλωριούχο νάτριο μπορεί να περιγραφεί με πολύ καλή προσέγγιση ως μια διάταξη θετικών ιόντων ( $\text{Na}^+$ ) και αρνητικών ιόντων ( $\text{Cl}^-$ ) που εναλλάσσονται σε κανονική τρισδιάστατη διάταξη ή πλέγμα. Για το χλωριούχο νάτριο η διάταξη φαίνεται στο Σχ. 1.7*a*. Φυσικά, τα ιόντα δεν είναι σημειακά φορτία, αλλά σχεδόν σφαιρικές κατανομές φορτίου και, ως εκ τούτου (όπως θα αποδείξουμε αμέσως), οι ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους είναι οι ίδιες με τις δυνάμεις που θα ασκούνταν, αν αντικαθιστούσαμε κάθε ιόν με ένα ισοδύναμο σημειακό φορτίο στο κέντρο του. Αυτό το ηλεκτρικά ισοδύναμο σύστημα φαίνεται στο Σχ. 1.7*b*. Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του πλέγματος των φορτίων παίζει σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία της σταθερότητας και συνοχής του ιοντικού κρυστάλλου. Ας δούμε αν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της.

Φαίνεται ότι αντιμετωπίζουμε αμέσως ένα τεράστιο άθροισμα, αν όχι διπλά άπειρο, αφού κάθε μακροσκοπικός κρύσταλλος περιέχει τουλάχιστον  $10^{20}$  άτομα. Θα συγκλίνει το άθροισμα; Αυτό που ελπίζουμε να βρούμε είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου ή μάζας του κρυστάλλου. Περιμένουμε με βεβαιότητα ότι αυτή θα είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του κρυστάλλου, βασιζόμενοι στο γενικό επιχείρημα ότι το ένα άκρο ενός μακροσκοπικού κρυστάλλου μπορεί να έχει πολύ μικρή επίδραση στο άλλο. Δύο γραμμάρια χλωριούχου νατρίου θα πρέπει να έχουν διπλάσια ενέργεια από ένα γραμμάριο και το σχήμα δεν θα πρέπει να παίζει σημαντικό ρόλο, εφόσον τα επιφανειακά άτομα αποτελούν ένα μικρό ποσοστό του ολικού αριθμού των ατόμων. Θα κάνουμε λάθος σε αυτή την πρόβλεψη αν ο κρύσταλλος είχε σχηματιστεί από ιόντα με το ίδιο μόνο πρόσημο. Σε αυτή την περίπτωση 1 g κρυστάλλου θα έφερε ένα τεράστιο ηλεκτρικό φορτίο και η συνένωση δύο τέτοιων κρυστάλλων για το σχηματισμό ενός κρυστάλλου 2 g θα απαιτούσε μια τρομακτική ποσότητα ενέργειας. (Θα μπορούσατε να εκτιμήσετε πόση!) Η κατάσταση σώζεται από το ότι η κρυσταλλική δομή είναι μια εναλλαγή από ίσα και αντίθετα φορτία, έτσι ώστε οποιοδήποτε μακροσκοπικό κομμάτι κρυστάλλου να είναι ουδέτερο με πολύ καλή προσέγγιση.

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε θετικό ιόν βρίσκεται σε θέση ισοδύναμη προς τη θέση οποιουδήποτε άλλου θετικού ιόντος. Ακόμα, μολονότι μπορεί να μη γίνεται αμέσως προφανές από το Σχ. 1.7, η διάταξη των θετικών ιόντων γύρω από ένα αρνητικό ιόν είναι ακριβώς η ίδια με τη διάταξη των αρνητικών ιόντων γύρω από ένα θετικό ιόν, κ.ο.κ. Επομένως μπορούμε να πάρουμε ένα ιόν, αδιάφορο ποιου είδους, ως κέντρο και να αθροίσουμε τις αλληλεπιδράσεις του με όλα τα υπόλοιπα, και απλώς να πολλαπλασιάσουμε με τον ολικό αριθμό των ιόντων και των δύο ειδών. Αυτή η διαδικασία ανάγει το διπλό άθροισμα της Εξ. 9 σε ένα απλό άθροισμα επί ένα συντελεστή  $N$ . Πρέπει ακό-



(α)



(β)

**ΣΧΗΜΑ 1.7**

Τμήμα κρυστάλλου χλωριούχου νατρίου. Τα ιόντα  $\text{Na}^+$  και  $\text{Cl}^-$  απεικονίζονται στις σωστές περίπου σχετικές αναλογίες (α) και αντικαθίστανται από ισοδύναμα σημειακά φορτία (β).



μα να πολλαπλασιάσουμε με το  $\frac{1}{2}$  για να αντισταθίσουμε τη διπλή συνεισφορά κάθε ζεύγους. Δηλαδή η ενέργεια ενός πλέγματος κλωρούχου νατρίου αποτελούμενου από έναν ολικό αριθμό ιόντων  $N$  είναι:

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^N \frac{q_1 q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{1k}} \quad (10)$$

Παίρνοντας το θετικό ιόν στο κέντρο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.7β, εκτελούμε το άθροισμα για όλα τα ιόντα, τόσο τα γειτονικά όσο και τα απομακρυσμένα. Οι σημαντικότεροι όροι είναι οι ακόλουθοι:

$$U = \frac{N}{8\pi\epsilon_0} \left( -\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right) \quad (11)$$

Ο πρώτος όρος προέρχεται από τα 6 πλησιέστερα ιόντα κλωρίου, σε απόσταση  $a$ , ο δεύτερος από τα 12 ιόντα νατρίου στις ακμές του κύβου, κ.ο.κ. Παρεμπιπτόντως, είναι προφανές ότι αυτή η σειρά δεν είναι *απολύτως* συγκλίνουσα· εάν ήμασταν αρκετά επιπόλαιοι και επιχειρούσαμε να αθροίσουμε πρώτα όλους τους θετικούς όρους, το άθροισμα θα απέκλινε. Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο άθροισμα, θα πρέπει να διατάξουμε τους όρους έτσι ώστε, καθώς προχωρούμε προς τα έξω περιλαμβάνοντας όλο και πιο απομακρυσμένα ιόντα, να τα συγκεντρώνουμε σε ομάδες που αντιπροσωπεύουν σχεδόν ουδέτερους φλοιούς υλικού. Έτσι, αν σε κάποιο σημείο αποκόψουμε το άθροισμα, τα πιο απομακρυσμένα ιόντα που θα έχουμε παραβλέψει θα αποτελούν ένα τόσο ισοζυγισμένο μείγμα θετικών και αρνητικών φορτίων, ώστε να είμαστε σίγουροι ότι η συνεισφορά τους θα ήταν μικρή. Αυτή η περιγραφή είναι ένας χονδρικός τρόπος περιγραφής ενός πιο λεπτομερούς προβλήματος υπολογισμού. Ο αριθμητικός υπολογισμός σειρών αυτής της μορφής μπορεί να επιτευχθεί με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Το αποτέλεσμα αυτού του παραδείγματος τυχαίνει να είναι:

$$U = \frac{-0,8738Ne^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (12)$$

Εδώ το  $N$ , ο αριθμός των ιόντων, είναι διπλάσιος του αριθμού των μορίων NaCl.

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι πρέπει να *καταναλωθεί* έργο για να αποσυντεθεί ο κρύσταλλος σε ιόντα. Με άλλα λόγια, η ηλεκτρική ενέργεια βοηθάει στην ερμηνεία της συνοχής του κρυστάλλου. Αν όμως αυτό ήταν όλο, ο κρύσταλλος θα κατέρρεε αφού η δυναμική ενέργεια της κατανομής φορτίου προφανώς *ελαττώνεται* όταν μικραίνουν όλες οι διαστάσεις. Εδώ συναντούμε και πάλι το οικείο δίλημμα της κλασικής – δηλαδή μη κβαντικής – φυσικής. Κανένα σύστημα στάσιμων σωματιδίων δεν μπορεί να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία, σύμφωνα με τους κλασικούς νόμους, κάτω από την επίδραση ηλεκτρικών δυνάμεων και μόνο. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση που κάναμε είναι άχρηστη; Όχι, καθόλου. Είναι αξιοσημείωτο και ευτύχημα ότι στην κβαντική φυσική των κρυστάλλων η

ηλεκτρική δυναμική ενέργεια εξακολουθεί να έχει νόημα και μπορεί να υπολογιστεί σχεδόν με τον ίδιο τρόπο με αυτόν που μάθαμε εδώ.

### ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

**1.7** Υποθέστε ότι έχουμε μια διάταξη φορτίων,  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , σε σταθερές θέσεις στο χώρο και ότι δεν ενδιαφερόμαστε για τις δυνάμεις που ασκούνται από το ένα φορτίο στο άλλο, αλλά μόνο για την επίδρασή τους πάνω σε κάποιο άλλο φορτίο  $q_0$ , που έχει τοποθετηθεί στη γειτονιά τους. Γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη πάνω στο φορτίο, αν δοθεί η θέση του, την οποία μπορούμε να ορίσουμε από τις συντεταγμένες  $x, y, z$ . Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο  $q_0$  είναι

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j \hat{r}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (13)$$

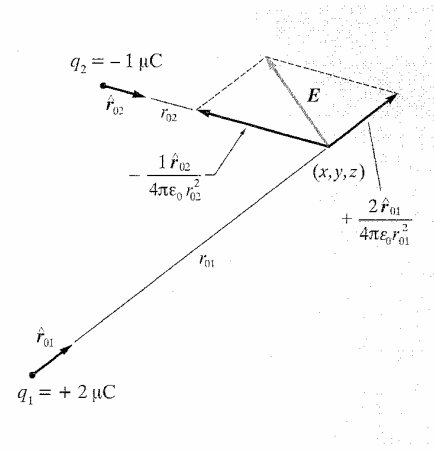
όπου  $r_{0j}$  είναι το διάνυσμα από το  $j$ -στό φορτίο του συστήματος ως το σημείο  $(x, y, z)$ . Η δύναμη είναι ανάλογη του  $q_0$  και έτσι, αν διαιρέσουμε με  $q_0$ , προκύπτει μια διανυσματική ποσότητα που εξαρτάται μόνο από τη δομή του αρχικού συστήματος φορτίων,  $q_1, \dots, q_N$ , και από τη θέση του σημείου  $(x, y, z)$ . Ονομάζουμε τη διανυσματική συνάρτηση των  $x, y, z$  *ηλεκτρικό πεδίο* που πηγάζει από τα  $q_1, \dots, q_N$  και τη συμβολίζουμε με  $E$ . Τα φορτία  $q_1, \dots, q_N$  τα ονομάζουμε *πηγές* του πεδίου. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως *ορισμό* του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  μιας κατανομής φορτίου στο σημείο  $(x, y, z)$  τη συνάρτηση

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{r}_{0j}}{r_{0j}^2} \quad (14)$$

Στο Σχ. 1.8 φαίνεται καθαρά η διανυσματική πρόσθεση του πεδίου ενός σημειακού φορτίου  $2 \mu\text{C}$  στο πεδίο σημειακού φορτίου  $-1 \mu\text{C}$ , σ' ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  εκφράζεται σε newton/coulomb (N/C) και η απόσταση σε μέτρα (m).

Μετά την εισαγωγή του ηλεκτρικού δυναμικού στο επόμενο κεφάλαιο, θα έχουμε στη διάθεσή μας έναν άλλο και εντελώς ισοδύναμο τρόπο για να εκφράζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε volt/μέτρο (V/m).

Ως τώρα δεν έχουμε τίποτα το πραγματικά νέο. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι απλώς ένας άλλος τρόπος περιγραφής του συστήματος των φορτίων· αυτό το επιτυγχάνει δίνοντας τη δύναμη ανά μονάδα φορτίου, κατά μέτρο και κατεύθυνση, που ασκείται σ' ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q_0$  σε οποιοδήποτε σημείο. Πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί με αυτή την ερμηνεία. Εάν τα φορτία-πηγές δεν είναι πράγματι ακίνητα, η εισαγωγή ενός πεπερασμένου φορτίου  $q_0$  μπορεί να προκαλέσει μετακίνηση των φορτίων από τις θέσεις τους, με αποτέλεσμα το ίδιο το πεδίο, όπως ορίζεται από την Εξ. 14, να είναι διαφορετικό. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο υποθέσαμε σταθερά φορτία στην αρχή της ανάπτυξης του θέματος. Μερικοί ορίζουν



**ΣΧΗΜΑ 1.8**

Το πεδίο σ' ένα σημείο είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων καθενός από τα φορτία του συστήματος.

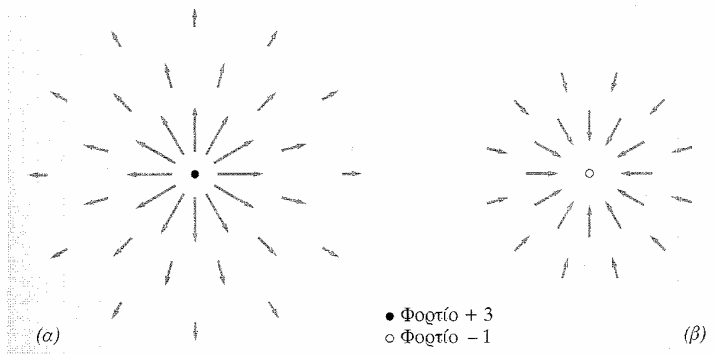
πολλές φορές το πεδίο απαιτώντας το φορτίο  $q_0$  να είναι ένα «απειροστό» δοκιμαστικό φορτίο, και ορίζοντας το  $E$  ως το όριο του  $F/q_0$  καθώς το  $q_0 \rightarrow 0$ . Οποιαδήποτε γεύση αυστηρότητας αφήνεται να υπονοηθεί με αυτό είναι απατηλή. Θυμηθείτε ότι στον πραγματικό κόσμο δεν έχουμε παρατηρήσει ποτέ φορτίο μικρότερο από  $e$ ! Στην πραγματικότητα, αν αποδεχθούμε την Εξ. 14 ως τον ορισμό του  $E$  χωρίς να αναφερθούμε σε κάποιο δοκιμαστικό φορτίο, δεν εγείρεται κανένα πρόβλημα και οι πηγές δεν χρειάζεται να είναι σταθερές. Εάν η εισαγωγή ενός νέου φορτίου προκαλεί μετατοπίσεις των φορτίων-πηγών, τότε έχει πράγματι τροποποιηθεί το ηλεκτρικό πεδίο και, εάν θέλουμε να προβλέψουμε τη δύναμη που ασκείται στο νέο φορτίο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το νέο ηλεκτρικό πεδίο για τον υπολογισμό της.

Μπορεί να θέλετε ακόμα να ρωτήσετε, τι είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Είναι κάτι πραγματικό ή είναι απλώς ένα όνομα για ένα συντελεστή σε μια εξίσωση που πρέπει να πολλαπλασιαστεί με κάτι άλλο για να μας δώσει την αριθμητική τιμή της δύναμης που μετράμε σ' ένα πείραμα; Δύο παρατηρήσεις μπορεί να είναι χρήσιμες εδώ. Πρώτον, μια και δουλεύει, δεν έχει καμιά σημασία. Η απάντηση αυτή δεν είναι επιπόλαιη, αλλά πρέπει να ληφθεί στα σοβαρά. Δεύτερον, το γεγονός ότι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου είναι το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε για να προβλέψουμε τη δύναμη που θα δράσει σε οποιοδήποτε φορτίο σ' εκείνο το σημείο δεν είναι καθόλου ασήμαντο. Θα μπορούσε να ήταν και διαφορετικά! Εάν δεν είχαν γίνει καθόλου πειράματα, θα μπορούσαμε να είχαμε φανταστεί ότι, σε δύο διαφορετικές καταστάσεις στις οποίες μοναδιαία φορτία υπόκεινται σε ίσες δυνάμεις, δοκιμαστικά φορτία δύο μονάδων ίσως να υπόκειντο σε διαφορετικές δυνάμεις, ανάλογα με τη φύση των άλλων φορτίων του συστήματος. Αν αλήθευε αυτό, η πεδιακή περιγραφή δεν θα είχε νόημα. Το ηλεκτρικό πεδίο προσδίδει σε κάθε σημείο του συστήματος μια τοπική ιδιότητα, υπό αυτή την έννοια: Εάν γνωρίζουμε το  $E$  σε κάποια μικρή γειτονιά, γνωρίζουμε, χωρίς παραπέρα διερεύνηση, τι θα συμβεί σε οποιοδήποτε φορτίο σε αυτή τη γειτονιά. Δεν χρειάζεται να ξέρουμε τι προκάλεσε το πεδίο.

Για ν' απεικονίσουμε το πεδίο μας χρειάζεται να συσχετίσουμε ένα διάνυσμα, δηλαδή μέτρο και κατεύθυνση, με κάθε σημείο του χώρου. Θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα ευρηματικά σχήματα — εκ των οποίων κανένα δεν είναι απόλυτα ικανοποιητικό — για να περιγράψουμε διανυσματικά πεδία σε αυτό το βιβλίο.

Είναι δύσκολο να σχεδιάσουμε σε δύο διαστάσεις την εικόνα μιας διανυσματικής συνάρτησης σε τρισδιάστατο χώρο. Μπορούμε να υποδείξουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του  $E$  σε διάφορα σημεία σχεδιάζοντας μικρά βέλη κοντά σε αυτά τα σημεία, κάνοντας τα βέλη πιο επιμήκη όπου το  $E$  είναι μεγαλύτερο.<sup>†</sup> Χρησιμοποιώ-

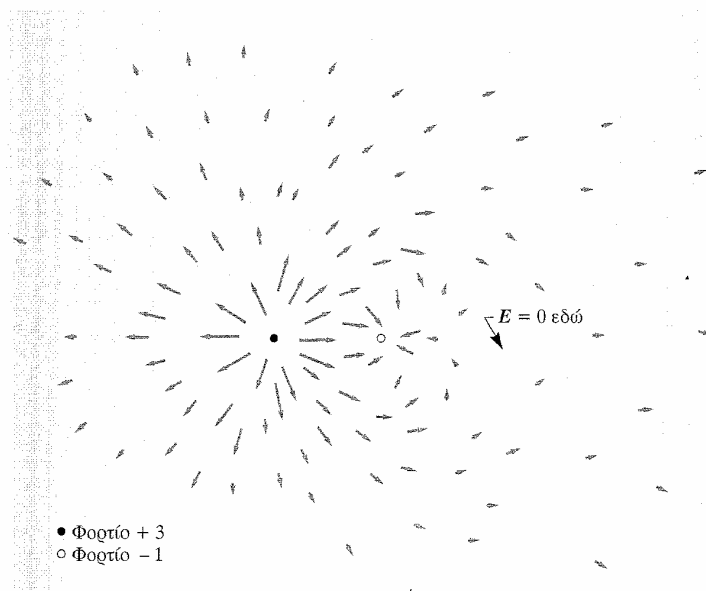
<sup>†</sup> Και υπό τις καλύτερες συνθήκες, αυτή η αναπαράσταση είναι αδέξια. Είναι δύσκολο να δείξουμε το σημείο του χώρου στο οποίο εφαρμόζεται ένα συγκεκριμένο διάνυσμα, και η κλίμακα των μέτρων του  $E$  είναι συνήθως τόσο μεγάλη, ώστε να είναι ανεφάρμοστη η σχεδίαση βελών με μήκος ανάλογο του  $E$ .



**ΣΧΗΜΑ 1.9**

(α) Πεδίο φορτίου  $q_1 = +3$ . (β) Πεδίο φορτίου  $q_2 = -1$ . Και οι δύο απεικονίσεις είναι αναγκαστικά χονδρικές και μόνο κατά προσέγγιση ποσοτικές.

ντας αυτή την περιγραφή, δείχνουμε στο Σχ. 1.9α το πεδίο ενός σημειακού φορτίου  $-1$  μονάδας φορτίου. Ομολογουμένως αυτές οι εικόνες δεν προσθέτουν τίποτα στην κατανόηση του πεδίου ενός απομονωμένου φορτίου. Οποιοσδήποτε μπορεί να φανταστεί πώς μοιάζει ένα απλό ακτινικό πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου χωρίς τη βοήθεια μιας εικόνας. Τις δείχνουμε έτσι ώστε να συνδυάσουμε τα δύο πεδία στο Σχ. 1.10, στο οποίο φαίνεται κατά τον ίδιο τρόπο το πεδίο δύο τέτοιων φορτίων που βρίσκονται σε απόσταση  $a$  μεταξύ τους. Το μόνο που μπορεί να δείξει το Σχ. 1.10 είναι το πεδίο σε ένα επίπεδο που περιέχει τα φορτία. Για να έχουμε μια πλήρη τρισδιάστατη απεικόνιση πρέπει να φανταστούμε το σχήμα να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας. Στο Σχ. 1.10 υπάρχει ένα σημείο στο χώρο όπου το  $E$  είναι μηδέν. Σε πόση απόσταση από το πλησιέστερο φορτίο πρέπει να βρίσκεται αυτό το σημείο; Προσέξτε ακόμα ότι στα όρια του σχήματος το πεδίο συμπίπτει λίγο πολύ με την ακτινική προς τα έξω κατεύθυνση γύρω γύρω. Είναι φανερό ότι σε πολύ



**ΣΧΗΜΑ 1.10**

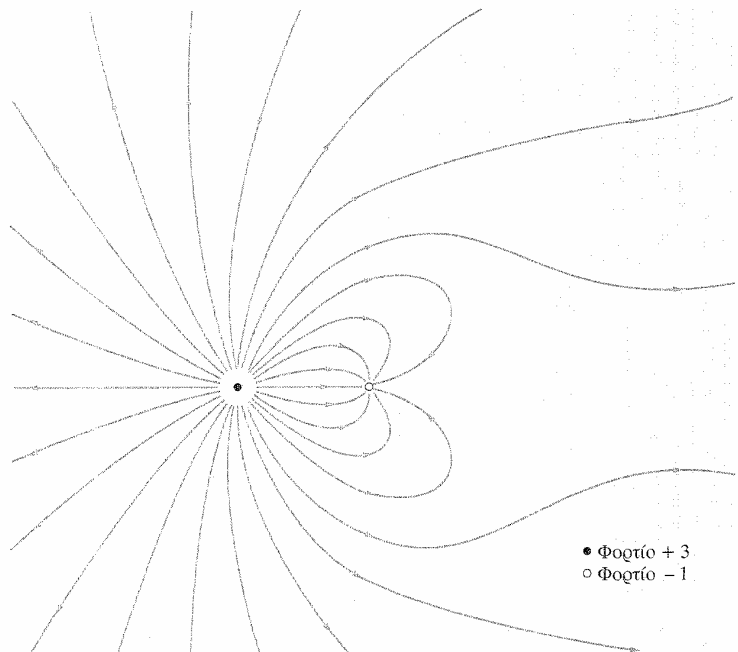
Το πεδίο στη γειτονιά των δύο φορτίων,  $q_1 = +3$ ,  $q_2 = -1$ , είναι η υπέρθεση των πεδίων του Σχ. 1.9α και β.

μεγάλες αποστάσεις από τα φορτία το πεδίο θα μοιάζει πάρα πολύ με το πεδίο ενός θετικού φορτίου. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού ο διαχωρισμός των φορτίων δεν μπορεί να επηρεάσει το πεδίο σε πολύ μακρινά σημεία κι εκείνο που τελικά θα φαίνεται θα είναι ένα σημειακό φορτίο 2 μονάδων, ακριβώς δηλαδή αυτό που θα είχαμε αν τοποθετούσαμε τις δύο πηγές στην ίδια θέση.

Ένας άλλος τρόπος απεικόνισης ενός διανυσματικού πεδίου είναι οι *πεδιακές* ή *δυναμικές γραμμές*. Αυτές είναι απλώς καμπύλες στις οποίες η εφαπτομένη σε κάθε σημείο συμπίπτει με τη διεύθυνση του πεδίου σε αυτό το σημείο. Αυτές οι γραμμές είναι ομαλές και συνεχείς εκτός από περιοχές ανώμαλων σημείων, όπως είναι τα σημειακά φορτία ή σημεία όπως αυτό του Σχ. 1.10 όπου το πεδίο είναι μηδέν. Ένα σχέδιο με δυναμικές γραμμές δεν δίνει κατευθείαν το μέτρο του πεδίου, μολονότι θα δούμε ότι, γενικά, οι δυναμικές γραμμές συγκλίνουν καθώς πλησιάζουμε σε περιοχές ισχυρών πεδίων και αποκλίνουν καθώς πλησιάζουμε σε περιοχές ασθενών πεδίων. Στο Σχ. 1.11 έχουν σχεδιαστεί ορισμένες δυναμικές γραμμές για την ίδια διάταξη φορτίων που φαίνεται στο Σχ. 1.10, δηλαδή ένα θετικό φορτίο 3 μονάδων και ένα αρνητικό φορτίο 1 μονάδας. Περιοριζόμαστε ξανά από το γεγονός ότι σχεδιάζουμε πάνω σε χαρτί, σε μια διδιάστατη τομή διαμέσου μιας τριοδιάστατης δέσμης καμπυλών.

## ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

**1.8** Φτάσαμε στο σημείο όπου μπορούμε να γενικεύσουμε και από σημειακά φορτία να επεκταθούμε σε *συνεχείς κατανομές φορτίου*. Η χωρική κατανομή φορτίου περιγράφεται από μια βαθμωτή συνάρτη-



**ΣΧΗΜΑ 1.11**

Μερικές δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δύο φορτίων  $q_1 = +3$ ,  $q_2 = -1$ .

ση πυκνότητας φορτίου  $\rho$ , η οποία είναι συνάρτηση της θέσης, με διαστάσεις *φορτίο/όγκο*. Το γινόμενο δηλαδή του  $\rho$  επί ένα στοιχείο όγκου δίνει την ποσότητα του φορτίου που περιέχεται σε αυτό το στοιχείο όγκου. Το ίδιο σύμβολο δηλώνει συχνά τη μάζα ανά μονάδα όγκου, όμως σε αυτό το βιβλίο θα δίνουμε πάντα προτεραιότητα στην ερμηνεία του  $\rho$  ως πυκνότητας φορτίου. Εάν γράψουμε το  $\rho$  ως συνάρτηση των συντεταγμένων  $x, y, z$ , τότε η έκφραση  $\rho(x, y, z) dx dy dz$  εκφράζει το φορτίο που περιέχεται σ' ένα μικρό όγκο διαστάσεων  $dx dy dz$ , τοποθετημένο στο σημείο  $(x, y, z)$ .

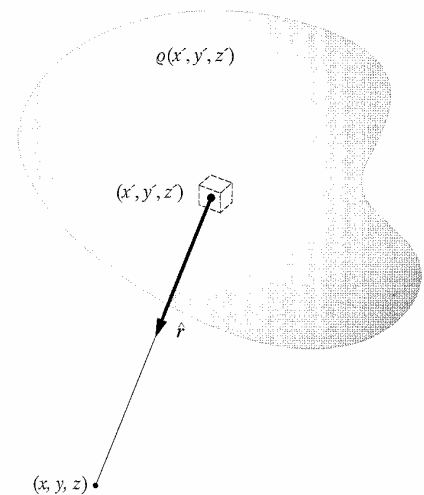
Σε ατομική κλίμακα φυσικά η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται πάρα πολύ από σημείο σε σημείο. Μολαταύτα, αποδεικνύεται ότι είναι μια χρήσιμη ποσότητα σε μακροσκοπική κλίμακα. Θα τη χρησιμοποιούμε κυρίως όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα μεγάλης κλίμακας, τόσο μεγάλης, ώστε το στοιχείο όγκου  $dv = dx dy dz$  να είναι εξαιρετικά μικρό συγκριόμενο με το μέγεθος του συστήματος, αλλά ταυτοχρόνως αρκετά μεγάλο, ώστε να περιέχει πολλά άτομα ή στοιχειώδη φορτία. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, αντιμετωπίζουμε παρόμοια προβλήματα όταν ορίζουμε τη συνηθισμένη πυκνότητα μάζας μιας ουσίας.

Εάν η πηγή του ηλεκτρικού πεδίου είναι μια συνεχής κατανομή φορτίου και όχι μια κατανομή σημειακών φορτίων, απλώς αντικαθιστούμε το άθροισμα στην Εξ. 14 με το κατάλληλο ολοκλήρωμα. Το ολοκλήρωμα δίνει το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $(x, y, z)$ , το οποίο προκαλείται από φορτία σε άλλα σημεία  $(x', y', z')$ .

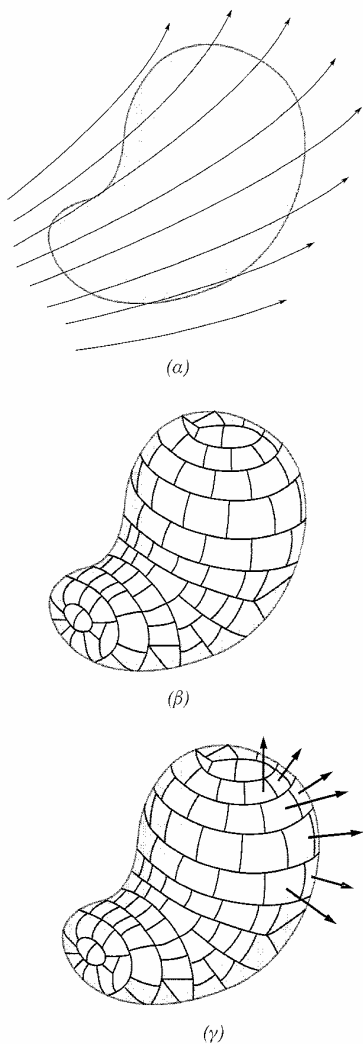
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int \frac{\rho(x', y', z') \hat{r} dx' dy' dz'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (15)$$

Η Εξ. 15 περιγράφει ένα χωρικό ολοκλήρωμα. Κρατώντας το σημείο  $(x, y, z)$  σταθερό αφήνουμε τις μεταβλητές της ολοκλήρωσης,  $x', y', z'$ , να καλύψουν ολόκληρο το χώρο που περιέχει φορτίο, αθροίζοντας με αυτό τον τρόπο τις συνεισφορές όλων των επιμέρους φορτίων. Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}$  έχει κατεύθυνση από το σημείο  $(x', y', z')$  στο  $(x, y, z)$  —εκτός εάν θέλουμε να βάλουμε αρνητικό πρόσημο στο ολοκλήρωμα, οπότε αντιστρέφουμε τη φορά του  $\hat{r}$ . Είναι δύσκολο να θυμόμαστε πάντοτε τα σωστά πρόσημα. Αρκεί να θυμόμαστε μόνο ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά από τις θετικές προς τις αρνητικές πηγές (Σχ. 1.12).

Στη γειτονιά ενός πραγματικού σημειακού φορτίου το ηλεκτρικό πεδίο απειρίζεται σύμφωνα με το νόμο  $1/r^2$ , καθώς πλησιάζουμε στο σημείο. Δεν έχει νόημα να μιλάμε για το πεδίο στη θέση του σημειακού φορτίου. Καθώς οι θεμελιώδεις πηγές του πεδίου, όπως πιστεύουμε, δεν είναι άπειρες συγκεντρώσεις φορτίου σε όγκο μηδενικών διαστάσεων αλλά πεπερασμένες δομές, απλώς παραβλέπουμε τις μαθηματικές ανωμαλίες που υπονοεί η γλώσσα του σημειακού φορτίου και αποκλείουμε το εσωτερικό των στοιχειωδών πηγών. Η συνεχής κατανομή φορτίου  $\rho(x', y', z')$  που δεν απειρίζεται πουθενά δεν προκαλεί καμιά δυσκολία. Η Εξ. 15 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει το πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της κατανομής. Η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα δεν απειρίζεται στη θέση



**ΣΧΗΜΑ 1.12** Κάθε στοιχείο της κατανομής φορτίου  $\rho(x', y', z')$  συνεισφέρει στο ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  στο σημείο  $(x, y, z)$ . Το ολικό πεδίο σ' αυτό το σημείο είναι το άθροισμα όλων αυτών των συνεισφορών (Εξ. 15).



ΣΧΗΜΑ 1.13

(α) Μια κλειστή επιφάνεια μέσα σε διανυσματικό πεδίο διαιρείται σε (β) μικρές στοιχειώδεις περιοχές. (γ) Κάθε στοιχείο επιφάνειας παριστάνεται με ένα εξερχόμενο διάνυσμα.

$r = 0$ , επειδή σε αυτό το όριο το στοιχείο όγκου στον αριθμητή είναι ανάλογο του  $r^2 dr$ . Αυτό σημαίνει ότι, εφόσον η πυκνότητα  $\rho$  παραμένει πεπερασμένη, το πεδίο θα παραμένει πεπερασμένο παντού, ακόμα και στο εσωτερικό ή στο όριο μιας κατανομής φορτίου.

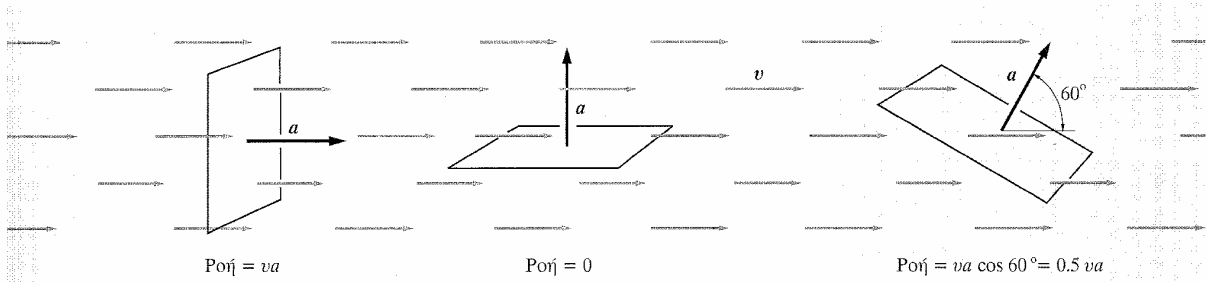
## ΡΟΗ

**1.9** Η σχέση ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στις πηγές του μπορεί να εκφραστεί με έναν εντυπωσιακά απλό τρόπο, έναν τρόπο που θα βρούμε πολύ χρήσιμο. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να ορίσουμε μια ποσότητα που την ονομάζουμε *ροή*.

Θεωρήστε κάποιο μαγνητικό πεδίο στο χώρο και σ' αυτόν το χώρο μια κλειστή επιφάνεια, όπως ένα μπαλόνι οποιασδήποτε μορφής. Στο Σχ. 1.13 φαίνεται μια τέτοια επιφάνεια, ενώ το πεδίο απεικονίζεται με μερικές δυναμικές γραμμές. Διατρέστε τώρα ολόκληρη την επιφάνεια σε μικρές περιοχές, που είναι τόσο μικρές, ώστε πάνω σε κάθε περιοχή η επιφάνεια να είναι πρακτικά επίπεδη και το διάνυσμα του πεδίου να μην αλλάζει σημαντικά από το ένα τμήμα της περιοχής στο άλλο. Με άλλα λόγια να μην είναι ρυτιδωμένο το μπαλόνι και η επιφάνειά του να μην περνά από ανωμαλίες<sup>†</sup> του πεδίου, όπως λ.χ. ένα σημειακό φορτίο. Το εμβαδόν μιας περιοχής έχει κάποια τιμή σε  $m^2$ , και η περιοχή ορίζει μια μοναδική κατεύθυνση — την κάθετο προς τα έξω σ' αυτήν την περιοχή. (Αφού η επιφάνεια είναι κλειστή μπορείτε να διακρίνετε το εσωτερικό από το εξωτερικό της· δεν υπάρχει ασάφεια.) Έστω ότι αυτό το μέτρο και η κατεύθυνση παριστάνονται με ένα διάνυσμα. Τότε, για κάθε περιοχή στην οποία έχει διαιρεθεί η επιφάνεια, όπως είναι η περιοχή με αριθμό  $j$ , έχουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{a}_j$  που δίνει το εμβαδόν και τον προσανατολισμό της. Τα βήματα που μόλις τώρα κάναμε απεικονίζονται στα Σχ. 1.13β και 1.13γ. Σημειώστε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{a}_j$  δεν εξαρτάται καθόλου από τη μορφή της περιοχής· δεν εξαρτάται από το πώς μοιράσαμε την επιφάνεια, αρκεί οι περιοχές να είναι αρκετά μικρές.

Έστω  $\mathbf{E}_j$  το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση της περιοχής  $j$ . Το βαθμωτό γινόμενο  $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$  είναι ένας αριθμός. Καλούμε τον αριθμό αυτό *ροή* μέσα από το κομμάτι της επιφάνειας. Για να κατανοήσετε την προέλευση αυτού του ονόματος, θεωρήστε μια διανυσματική συνάρτηση που παριστάνει την ταχύτητα κίνησης σε ένα ρευστό — λ.χ. ένα ποτάμι — όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται από τη μια θέση στην άλλη, αλλά είναι σταθερή ως προς το χρόνο σε κάθε συγκεκριμένη θέση. Συμβολίστε αυτό το διάνυσμα με  $\mathbf{v}$ , μετρούμενο, λ.χ., σε m/s. Τότε, αν  $\mathbf{a}$  είναι η προσανατολισμένη επιφάνεια σε  $m^2$  ενός πλαισίου βυθισμένου στο νερό, το γινόμενο  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$  ισούται με το *ρυθμό ροής* του νερού μέσα από το πλαίσιο σε  $m^3/s$  (Σχ. 1.14). Πρέπει να τονίσουμε ότι αυτός ο

<sup>†</sup> Με τον όρο ανωμαλία πεδίου θα εννοούμε συνήθως, όχι μόνο μια σημειακή πηγή όπου το πεδίο απειρίζεται, αλλά οποιαδήποτε θέση όπου το πεδίο αλλάζει μέτρο ή διεύθυνση ασυνεχώς, όπως ένα απειροστά λεπτό στρώμα μεγάλης συμπύκνωσης φορτίου. Στην πραγματικότητα αυτό το τελευταίο, ηπιότερο, είδος ανωμαλίας δεν θα προκαλούσε καμιά δυσκολία, εκτός αν η επιφάνεια του μπαλονιού συνέπιπτε με την επιφάνεια ασυνέχειας κάποιας πεπερασμένης περιοχής.



**ΣΧΗΜΑ 1.14**

Η ροή μέσα από την επιφάνεια  $a$  είναι  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ , όπου  $\mathbf{v}$  η ροή του ρευστού. Η ροή δίνει τον όγκο του ρευστού που περνάει μέσα από το πλάισιο στη μονάδα του χρόνου.

ορισμός της ροής εφαρμόζεται σε κάθε διανυσματική συνάρτηση, οποιαδήποτε φυσική μεταβλητή και αν παριστάνει.

Ας προσθέσουμε τώρα όλες τις επιμέρους ροές μέσα από κάθε μικρή περιοχή για να υπολογίσουμε τη ροή μέσα από την περιβάλλουσα επιφάνεια, μια βαθμωτή ποσότητα που θα παραστήσουμε με  $\Phi$ :

$$\Phi = \sum_{\text{όλα τα } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \tag{16}$$

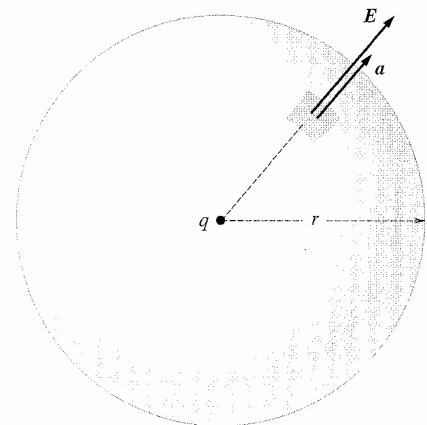
Αν κάνουμε τις περιοχές μικρότερες και πιο πολυάριθμες χωρίς όριο, περνάμε από το άθροισμα της Εξ. 16 στο επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\Phi = \int_{\text{όλη η επιφάνεια}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{17}$$

Επιφανειακό ολοκλήρωμα οποιασδήποτε διανυσματικής συνάρτησης  $\mathbf{F}$ , πάνω σε μια επιφάνεια  $S$ , σημαίνει απλώς τούτο: Διατρέψτε την επιφάνεια  $S$  σε μικρές «ψηφίδες», καθεμιά από τις οποίες παριστάνεται με ένα διάνυσμα κατευθυνόμενο προς τα έξω και με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της «ψηφίδας». Σε κάθε «ψηφίδα» πάρτε το βαθμωτό γινόμενο του διανύσματος επιφάνειας της «ψηφίδας» με το τοπικό  $\mathbf{F}$ . Αθροίστε όλα αυτά τα γινόμενα, και το όριο αυτού του αθροίσματος, καθώς οι «ψηφίδες» συρρικνώνονται, είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Μην τρομοκρατηθείτε από την προοπτική να εκτελέσετε αυτόν τον υπολογισμό για μια τόσο ασύμμετρη επιφάνεια όπως αυτή του Σχ. 1.13. Με την εκπληκτική ιδιότητα που πρόκειται να παρουσιάσουμε δεν υπάρχει καμία ανάγκη να το κάνατε!

**NOMOS GAUSS**

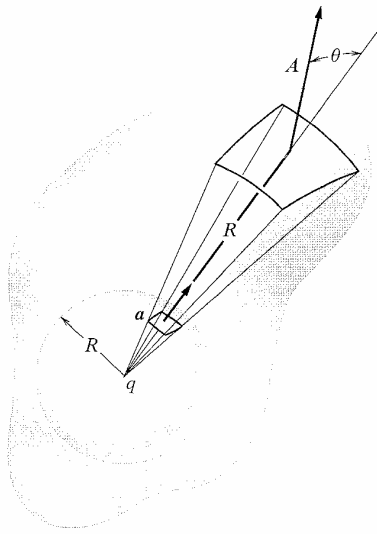
**1.10** Πάρτε την πιο απλή περίπτωση που μπορείτε να φανταστείτε. Υποθέστε ότι το πεδίο οφείλεται σε ένα θετικό σημειακό φορτίο  $q$  και ότι η επιφάνεια είναι σφαίρα με ακτίνα  $r$  και κέντρο το σημειακό φορτίο (Σχ.1.15). Πόση είναι η ροή  $\Phi$  μέσα από αυτήν τη σφαίρα; Η απάντηση είναι εύκολη αφού το μέτρο του  $\mathbf{E}$  σε κάθε σημείο της επιφάνειας ισούται με  $q/4\pi\epsilon_0 r^2$  και η κατεύθυνσή του συμπίπτει με την εξερχόμενη κάθετο στο ίδιο σημείο. Έτσι έχουμε



**ΣΧΗΜΑ 1.15**

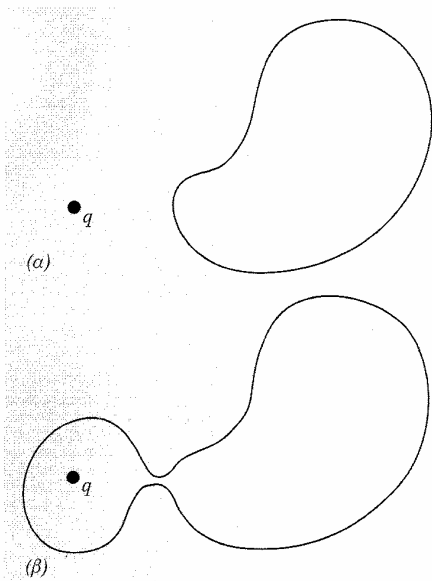
Στο πεδίο  $\mathbf{E}$  ενός σημειακού φορτίου  $q$  πόση είναι η εξερχόμενη ροή μέσα από σφαίρα που περιβάλλει το  $q$ ;





ΣΧΗΜΑ 1.16

Επίδειξη ότι η ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια γύρω από το  $q$  είναι η ίδια με τη ροή μέσα από τη σφαίρα.



ΣΧΗΜΑ 1.17

Για να δείξετε ότι η ροή μέσα από την κλειστή επιφάνεια (α) είναι μηδέν, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (β).

$$\Phi = E \times \text{ολική επιφάνεια} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (18)$$

Η ροή δεν εξαρτάται από το μέγεθος της σφαίρας.

Φανταστείτε τώρα μια δεύτερη επιφάνεια που περιβάλλει την πρώτη αλλά δεν είναι σφαιρική, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.16. Ισχυρίζομαστε ότι η ροή μέσα από αυτή την επιφάνεια είναι η ίδια με τη ροή μέσα από τη σφαίρα. Για να το δείτε αυτό, θεωρήστε έναν κώνο με κορυφή το  $q$ , που κόβει ένα μικρό τμήμα  $a$  και συνεχίζει προς την εξωτερική επιφάνεια, όπου κόβει ένα τμήμα  $A$  σε απόσταση  $R$  από το σημειακό φορτίο. Το εμβαδόν του τμήματος  $A$  είναι μεγαλύτερο από το τμήμα  $a$  κατά δύο συντελεστές: πρώτον κατά το λόγο των αποστάσεων στο τετράγωνο  $(R/r)^2$  και δεύτερον, εξαιτίας της κλίσης της, κατά το συντελεστή  $1/\cos\theta$ . Η γωνία  $\theta$  είναι η γωνία ανάμεσα στην εξερχόμενη κάθετο και τη διεύθυνση της ακτίνας (βλ. Σχ. 1.16). Το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτή την περιοχή ελαττώνεται από την τιμή που είχε στη σφαίρα κατά το συντελεστή  $(r/R)^2$  και η διεύθυνσή του εξακολουθεί να είναι ακτινική. Εάν  $E_{(R)}$  είναι το πεδίο στο εξωτερικό τμήμα και  $E_{(r)}$  το πεδίο στη σφαίρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Ροή μέσα από το εξωτερικό τμήμα} &= E_{(R)} \cdot A = E_{(R)} A \cos\theta \\ \text{Ροή μέσα από το εσωτερικό τμήμα} &= E_{(r)} \cdot a = E_{(r)} a \quad (19) \end{aligned}$$

$$E_{(R)} A \cos\theta = \left[ E_{(r)} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[ a \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos\theta} \right] \cos\theta = E_{(r)} a$$

Τούτο αποδεικνύει ότι η ροή μέσα από τα δύο τμήματα είναι η ίδια.

Τώρα κάθε τμήμα της εξωτερικής επιφάνειας μπορεί κατ' αυτό τον τρόπο να έλθει σε αντιστοιχία με τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας, και έτσι η ολική ροή μέσα από τις δύο επιφάνειες πρέπει να είναι η ίδια. Δηλαδή η ροή μέσα από την καινούργια επιφάνεια πρέπει να ισούται απλώς με  $q/\epsilon_0$ . Αυτή όμως η επιφάνεια είχε αυθαίρετο σχήμα και μέγεθος.<sup>†</sup> Συμπεραίνουμε ότι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια που περικλείει ένα σημειακό φορτίο  $q$  ισούται με  $q/\epsilon_0$ . Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η ολική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν, αν το φορτίο βρίσκεται έξω από την επιφάνεια. Αφήνουμε τον αναγνώστη να το αποδείξει, ενώ στο Σχ. 1.17 δίνουμε μια υπόδειξη μιας δυνατής επιχειρηματολογίας.

Υπάρχει ένας τρόπος για να τα δούμε όλ' αυτά, έτσι ώστε το αποτέλεσμα να φαίνεται προφανές. Φανταστείτε ότι στη θέση του  $q$  υπάρχει μια πηγή που εκπέμπει σωματίδια — όπως σφαίρες ή φωτόνια — προς όλες τις κατευθύνσεις με σταθερό ρυθμό. Είναι σαφές ότι η ροή των σωματιδίων μέσα από ένα παράθυρο μοναδιαίου εμβαδού θα ελαττώνεται με νόμο αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης του παραθύρου από το  $q$ . Επομένως, μπορούμε να βρούμε μια αναλογία ανάμεσα στην τιμή  $E$  του ηλεκτρικού πεδίου και τον αριθ-

<sup>†</sup> Είναι αλήθεια ότι η δεύτερη επιφάνεια περικλείει τη σφαίρα, αλλά δεν ήταν αναγκαίο να το κάνει. Εξάλλου μπορούμε να κάνουμε τη σφαίρα όσο μικρή θέλουμε.

μό των σφαιρών ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου. Είναι προφανές ότι η ροή των σφαιρών μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια που περιβάλλει εντελώς το  $q$  είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος και το σχήμα της επιφάνειας, επειδή στην πραγματικότητα είναι ο ολικός αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπονται στη μονάδα του χρόνου. Αντιστοίχως, η ροή του  $\mathbf{E}$  μέσα από την κλειστή επιφάνεια πρέπει να είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος και το σχήμα της. Το κοινό χαρακτηριστικό στο οποίο οφείλεται αυτή η ιδιότητα είναι η συμπεριφορά του τύπου αντιστρόφου τετραγώνου της έντασης.

Η κατάσταση είναι τώρα ώριμη για το θέμα της υπέρθεσης! Οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο ισούται με το άθροισμα των πεδίων καθεμιάς από τις πηγές του. Η ιδιότητα αυτή είχε εκφραστεί από τη διατύπωση του νόμου του Coulomb, Εξ. 13. Προφανώς, κατά τον ίδιο τρόπο, η ροή έχει την ίδια προσθετική ιδιότητα επειδή, αν έχουμε έναν αριθμό πηγών  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , τα πεδία των οποίων θα ήταν  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$  εάν το καθένα ήταν μόνο του, η ροή  $\Phi$  του συνολικού πεδίου  $\mathbf{E}$  μέσα από κάποια επιφάνεια  $S$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N) \cdot d\mathbf{a} \quad (20)$$

Μάθαμε προηγουμένως ότι το  $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$  ισούται με  $q_n/\epsilon_0$  όταν το φορτίο  $q_n$  βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια και είναι ίσο με μηδέν εάν δεν βρίσκεται μέσα. Έτσι κάθε φορτίο  $q$  στο εσωτερικό της επιφάνειας συνεισφέρει ακριβώς  $q/\epsilon_0$  στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της Εξ. 20 και όλα τα φορτία έξω από την επιφάνεια δεν συνεισφέρουν τίποτα. Έχουμε έτσι φτάσει στο νόμο του Gauss:

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια, δηλαδή το ολοκλήρωμα  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  λαμβανόμενο σε ολόκληρη την επιφάνεια ισούται με το γινόμενο του  $1/\epsilon_0$  επί το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dv \quad (21)$$

Τη διατύπωση μέσα στο πλαίσιο την ονομάζουμε *νόμο*, επειδή είναι ισοδύναμη με το νόμο Coulomb και θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εξίσου καλά ως ο βασικός νόμος των ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων, αφού πρώτα έχουν οριστεί το φορτίο και το πεδίο. Ο νόμος Gauss και ο νόμος Coulomb δεν είναι δύο ανεξάρτητοι φυσικοί νόμοι, αλλά ο ίδιος νόμος που έχει εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους.<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Υπάρχει μία διαφορά, εποσιώδης εδώ, αλλά ουσιώδης στην παρακάτω μελέτη μας των πεδίων κινουμένων φορτίων. Ο νόμος Gauss ισχύει για ευρύτερη κατηγορία πεδίων από αυτά που αντιπροσωπεύονται από το ηλεκτροστατικό πεδίο. Συγκεκριμένα, για ένα πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου ως προς  $r$ , χωρίς όμως σφαιρική συμμετρία, μπορεί να ισχύει ο νόμος Gauss. Με άλλα λόγια, ο νόμος του Gauss από μόνος του δεν υπονοεί τη συμμετρία του πεδίου ενός σημειακού φορτίου, πράγμα που εμπεριέχεται στο νόμο Coulomb.

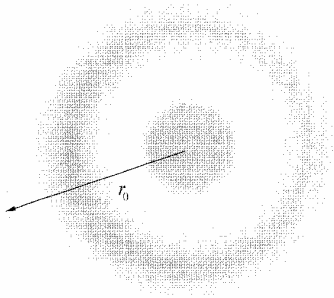
Ανατρέχοντας ξανά στην απόδειξη που δώσαμε, βλέπουμε ότι είχε εξαρτηθεί από τη φύση αντιστρόφου τετραγώνου της αλληλεπίδρασης και φυσικά από την προσθετικότητα των αλληλεπιδράσεων ή την επαλληλία. Έτσι το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πεδίο του τύπου αντιστρόφου τετραγώνου στη φυσική, λ.χ. στο πεδίο βαρύτητας.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο νόμος Gauss δεν θα ίσχυε αν ο νόμος της δύναμης ήταν, ας πούμε, αντιστρόφου κύβου. Γιατί σ' αυτή την περίπτωση η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από ένα σημειακό φορτίο  $q$  μέσα από μια σφαίρα ακτίνας  $R$  με κέντρο το φορτίο θα ήταν

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0 R} \quad (22)$$

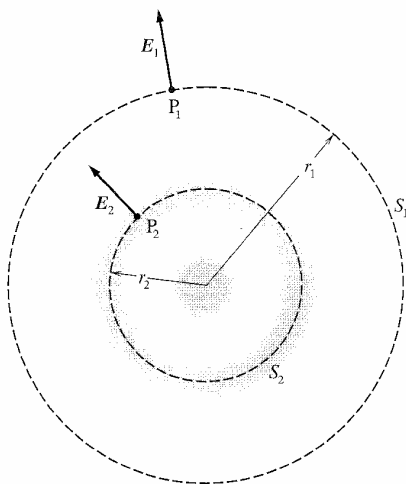
Κάνοντας τη σφαίρα αρκετά μεγάλη, θα μπορούσαμε να κάνουμε τη ροή μέσα από αυτήν όσο μικρή θέλαμε, ενώ το ολικό φορτίο στο εσωτερικό θα παρέμενε σταθερό.

Αυτό το σημαντικό θεώρημα διευρύνει την κατανόησή μας κατά δύο τρόπους. Πρώτον, αποκαλύπτει μια σχέση ανάμεσα στο πεδίο και στην πηγή του, δηλαδή το αντίστροφο του νόμου Coulomb. Ο νόμος Coulomb μάς λέει πώς να εξάγουμε το ηλεκτρικό πεδίο αν δίνονται τα φορτία· με το νόμο Gauss μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσο φορτίο υπάρχει σε οποιαδήποτε περιοχή αν το πεδίο είναι γνωστό. Δεύτερον, η μαθηματική σχέση που διατυπώσαμε εδώ είναι ένα ισχυρό αναλυτικό εργαλείο που, όπως θα δούμε, μπορεί να κάνει τα πολύπλοκα προβλήματα εύκολα.



ΣΧΗΜΑ 1.18

Κατανομή φορτίου με σφαιρική συμμετρία.



ΣΧΗΜΑ 1.19

Το ηλεκτρικό πεδίο μιας σφαιρικής κατανομής φορτίου.

## ΠΕΔΙΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

**1.11** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής φορτίου, δηλαδή μιας κατανομής στην οποία η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται μόνο από την ακτίνα από ένα κεντρικό σημείο. Στο Σχ. 1.18 φαίνεται μια τομή μιας τέτοιας κατανομής. Εδώ η πυκνότητα του φορτίου είναι μεγάλη στο κέντρο και μηδενίζεται πέρα από την  $r_0$ . Ποια είναι η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο όπως το  $P_1$  εκτός της κατανομής και ποια στο  $P_2$  στο εσωτερικό της (Σχ. 1.19); Εάν επρόκειτο να χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά το νόμο Coulomb, θα έπρεπε να εκτελέσουμε μιαν ολοκλήρωση κατά την οποία θα έπρεπε να αθροίσουμε τα ηλεκτρικά πεδία στο  $P_1$  που προκαλούνται από κάθε στοιχειώδη όγκο της κατανομής φορτίου. Ας δοκιμάσουμε μιαν άλλη προσέγγιση που εκμεταλλεύεται τόσο τη συμμετρία του συστήματος όσο και το νόμο Coulomb.

Εξαιτίας της σφαιρικής συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο έχει ακτινική κατεύθυνση – καμιά άλλη διεύθυνση δεν είναι μοναδική. Κατά τον ίδιο τρόπο η τιμή του πεδίου  $E$  πρέπει να είναι η ίδια σε όλα τα σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας  $S$  ακτίνας  $r_1$ , επειδή όλα τα σημεία της είναι ισοδύναμα. Ονομάστε αυτή την τιμή του πεδίου  $E_1$ . Επομένως, η ροή μέσα από την επιφάνεια  $S_1$  ισούται

απλώς με  $4\pi r_1^2 E_1$  και από το νόμο Gauss θα πρέπει να ισούται με  $1/\epsilon_0$  επί το περιλλειόμενο από την επιφάνεια φορτίο. Δηλαδή:

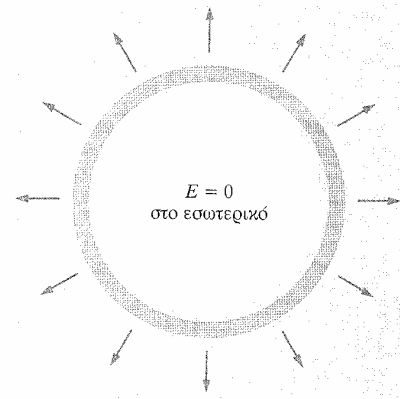
$$4\pi r_1^2 E_1 = (1/\epsilon_0) \times (\text{φορτίο μέσα στην } S_1) \text{ ή}$$

$$E_1 = \frac{\text{φορτίο μέσα στην } S_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad (23)$$

Συγκρίνοντας αυτήν τη σχέση με το πεδίο ενός σημειακού φορτίου, βλέπουμε ότι το πεδίο σε όλα τα σημεία πάνω στην  $S_1$  θα ήταν το ίδιο εάν όλα τα φορτία μέσα στην  $S_1$  ήταν συγκεντρωμένα στο κέντρο. Η ίδια διατύπωση ισχύει και για σφαίρα με σφαιρική επιφάνεια  $S_2$  στο εσωτερικό μιας κατανομής φορτίου. Το πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της  $S_2$  είναι το ίδιο με εκείνο που θα είχαμε αν όλα τα φορτία μέσα στην  $S_2$  ήταν στο κέντρο και όλα τα φορτία έξω από την  $S_2$  δεν υπήρχαν. Προφανώς το πεδίο στο εσωτερικό μιας «κούφιας» σφαιρικής κατανομής φορτίου είναι μηδέν (Σχ. 1.20).

Αν το ίδιο επιχείρημα εφαρμοζόταν στο πεδίο βαρύτητας θα μας έλεγε ότι η γη, αν υποθέσουμε ότι έχει σφαιρική συμμετρία στην κατανομή της μάζας της, έλκει τα εξωτερικά σώματα ωσάν η μάζα της να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της. Αυτή είναι μια μάλλον γνωστή δήλωση. Σε οποιονδήποτε τείνει να σκεφτεί ότι η αρχή αυτή εκφράζει μια προφανή ιδιότητα του κέντρου μάζας πρέπει να επισημώσουμε την προσοχή ότι το θεώρημα αυτό δεν αληθεύει εν γένει για άλλα σχήματα. Ένας τέλειος κύβος με ομοιόμορφη πυκνότητα δεν έλκει τα εξωτερικά σώματα ωσάν όλη του η μάζα να ήταν συγκεντρωμένη στο γεωμετρικό του κέντρο.

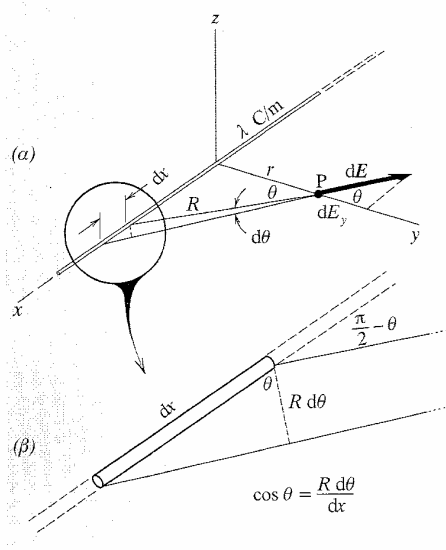
Ο Νεύτων δεν θεωρούσε το θεώρημα προφανές. Το χρειαζόταν για ν' αποδείξει ότι η σελήνη κατά την περιφορά της γύρω από τη γη και ένα σώμα που πέφτει πάνω στη γη υπόκεινται στις ίδιες δυνάμεις. Η κατά 20 χρόνια καθυστέρηση της έκδοσης της θεωρίας του Νεύτωνα για τη βαρύτητα οφειλόταν προφανώς, τουλάχιστον εν μέρει, στη δυσκολία που είχε να αποδείξει το θεώρημα έτσι που να τον ικανοποιεί. Η απόδειξη που τελικά επινόησε και δημοσίευσε στο *Principia* το 1686 (Book I, Section XII, Theorem XXXI) αποτελεί ένα θαύμα επινοητικότητας κατά το ότι, σε γενικές γραμμές, ένα περίπλοκο ολοκλήρωμα όγκου επιλύεται χωρίς τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού όπως τον γνωρίζουμε σήμερα. Η απόδειξη είναι αρκετά μακρύτερη από το σύνολο της προηγούμενης ανάπτυξης του νόμου του Gauss και πολύ πιο δαιδαλώδης λογικά. Ο Νεύτων δεν γνώριζε το θεώρημα Gauss — μια σχέση που, όταν μας την εξηγήσουν, φαίνεται τόσο προφανής ώστε να είναι σχεδόν τετριμμένη.



**ΣΧΗΜΑ 1.20**  
Το πεδίο είναι μηδέν στο εσωτερικό ενός σφαιρικού φορτισμένου φλοιού.

### ΠΕΔΙΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

**1.12** Ένα μακρύ, ευθύγραμμο, φορτισμένο σύρμα, αν θεωρήσουμε αμελητέο το πάχος του, μπορεί να χαρακτηριστεί από την ποσότητα φορτίου που φέρει ανά μονάδα μήκους. Έστω ότι  $\lambda$ , που μετριέται σε C/m, δηλώνει αυτήν τη γραμμική πυκνότητα φορτίου. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της γραμμής φορτίου, αν υποθέσουμε ότι έχει άπειρο μήκος και σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda$ ; Θα



ΣΧΗΜΑ 1.21

(α) Το πεδίο στο P είναι το διανυσματικό άθροισμα των συνεισφορών από κάθε στοιχείο του γραμμικού φορτίου, (β) Λεπτομέρεια του (α).

λύσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους, πρώτα με ολοκλήρωση αρχίζοντας από το νόμο Coulomb.

Για να υπολογίσουμε το πεδίο στο σημείο P, που φαίνεται στο Σχ. 1.21, πρέπει να προσθέσουμε τις συνεισφορές από όλα τα τμήματα του γραμμικού φορτίου, ένα από τα οποία υποδεικνύεται ως ένα τμήμα μήκους  $dx$ . Το φορτίο  $dq$  αυτού του στοιχείου δίνεται από τη σχέση  $dq = \lambda dx$ . Έχοντας προσανατολίσει τον άξονα  $x$  κατά μήκος του γραμμικού φορτίου, μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον άξονα  $y$  ως διερχόμενο από το σημείο P, που έχει απόσταση  $r$  από το πλησιέστερο σημείο της γραμμής. Είναι προτιμότερο να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία από την αρχή. Προφανώς το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P πρέπει να δείχνει προς την κατεύθυνση  $y$ , έτσι ώστε τα  $E_x$  και  $E_z$  να είναι και τα δύο μηδέν. Η συνεισφορά του φορτίου  $dq$  στη συνιστώσα  $y$  του ηλεκτρικού πεδίου στο P είναι:

$$dE_y = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \quad (24)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία την οποία το διάνυσμα του πεδίου του  $dq$  σχηματίζει με την κατεύθυνση  $y$ . Η ολική συνιστώσα  $y$  είναι τότε ίση με:

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} dx \quad (25)$$

Μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε το  $\theta$  ως τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης. Αφού  $R = r/\cos\theta$  και  $dx = R d\theta/\cos\theta$ , το ολοκλήρωμα γίνεται:

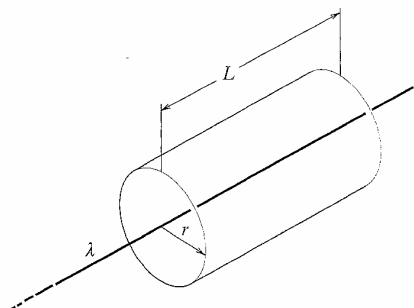
$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (26)$$

Βλέπουμε ότι το πεδίο ενός ομοιόμορφου γραμμικού φορτίου απείρου μήκους είναι ανάλογο του αντιστρόφου της απόστασης από τη γραμμή. Η κατεύθυνσή του είναι φυσικά ακτινική προς τα έξω, αν η γραμμή φέρει θετικό φορτίο, και προς τα μέσα αν φέρει αρνητικό.

Ο νόμος Gauss οδηγεί κατευθείαν στο ίδιο αποτέλεσμα. Περιβάλετε ένα τμήμα του γραμμικού φορτίου με έναν κλειστό κυκλικό κύλινδρο μήκους  $L$  και ακτίνας  $r$  όπως στο Σχ. 1.22 και θεωρήστε τη ροή μέσα από αυτή την επιφάνεια. Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, η συμμετρία εγγυάται ότι το πεδίο είναι ακτινικό και έτσι η ροή μέσα από τις βάσεις της «κονσέρβας» είναι μηδέν. Η ροή μέσα από την κυλινδρική επιφάνεια ισούται απλώς με το γινόμενο του εμβαδού,  $2\pi rL$  επί  $E_r$ , το πεδίο στην επιφάνεια. Από την άλλη μεριά, το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια ισούται απλώς με  $\lambda L$ , έτσι ώστε ο νόμος Gauss μάς δίνει  $2\pi rLE_r = \lambda L/\epsilon_0$  ή

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (27)$$

σε συμφωνία με την Εξ. 26.



ΣΧΗΜΑ 1.22

Χρήση του νόμου του Gauss για τον υπολογισμό του πεδίου ενός γραμμικού φορτίου.

**ΠΕΔΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ  
ΑΠΕΙΡΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ**

**1.13** Ηλεκτρικό φορτίο κατανομημένο ομοιόμορφα σε ένα λεπτό φύλλο ονομάζεται *επιφανειακή κατανομή φορτίου*. Θεωρήστε ένα επίπεδο φύλλο άπειρης έκτασης με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ . Το ηλεκτρικό πεδίο και στις δύο πλευρές του φύλλου, ανεξάρτητα από την τιμή που τελικά θα βρεθεί, πρέπει σίγουρα να είναι κάθετο στο επίπεδο του φύλλου, μια και δεν υπάρχει άλλη μοναδική διεύθυνση στο σύστημα. Ακόμα, εξαιτίας της συμμετρίας, το πεδίο πρέπει να έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά στα δύο σημεία P και P' που ισαπέχουν από το φύλλο στις αντίθετες πλευρές του. Με εδραιωμένα αυτά τα δεδομένα, ο νόμος Gauss μάς δίνει αμέσως την ένταση του πεδίου ως εξής: Σχεδιάστε έναν κύλινδρο, όπως στο Σχ. 1.23, με το σημείο P στη μία πλευρά και το P' στην άλλη, με εμβαδόν εγκάρσιας διατομής A. Η προς τα έξω ροή υπάρχει μόνο στα άκρα έτσι ώστε, εάν  $E_P$  συμβολίζει το μέτρο του πεδίου στο P, και  $E_{P'}$  το μέτρο στο P', η προς τα έξω ροή είναι  $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$ . Το φορτίο που περικλείεται είναι  $\sigma A$ . Επομένως  $2AE_P = \sigma A/\epsilon_0$  ή

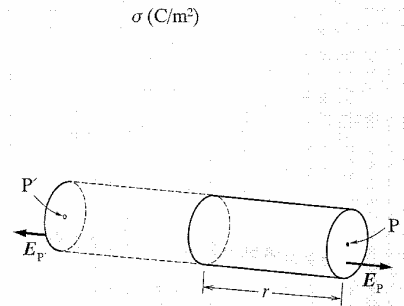
$$E_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{28}$$

Βλέπουμε ότι η ένταση του πεδίου δεν εξαρτάται από το  $r$ , την απόσταση από το φύλλο. Η Εξ. 28 θα μπορούσε να είχε εξαχθεί πολύ πιο επίπονα με υπολογισμό του διανυσματικού αθροίσματος των συνεισφορών του πεδίου στο σημείο P από όλα τα μικρά στοιχεία φορτίου του φύλλου.

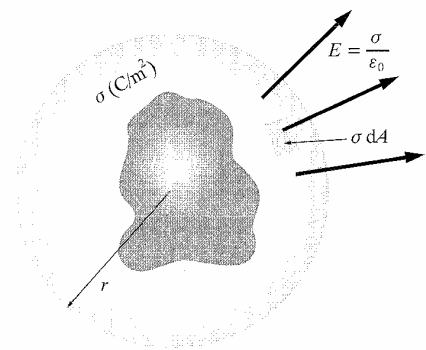
Βρήκαμε ότι το πεδίο μιας γραμμής φορτίου απείρου μήκους μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση από τη γραμμή, ενώ το πεδίο ενός φύλλου απείρου εκτάσεως έχει την ίδια ένταση σε όλες τις αποστάσεις. Εάν αυτό εξακολουθεί να μη σας φαίνεται ακαταμάχητα προφανές, δείτε το από την ακόλουθη σκοπιά: Χονδρικά, το τμήμα του γραμμικού φορτίου στο οποίο κυρίως οφείλεται το πεδίο στο P, Σχ. 1.21, είναι το εγγύς τμήμα –το φορτίο δηλαδή που βρίσκεται σε απόσταση της τάξης μεγέθους του  $r$ . Εάν μαζέψουμε αυτά μόνο τα φορτία και αμελήσουμε τα υπόλοιπα, έχουμε ένα συγκεντρωμένο φορτίο μεγέθους  $q \approx \lambda r$ , το οποίο θα δημιουργούσε πεδίο ανάλογο του  $q/r^2$  ή του  $\lambda/r$ . Στην περίπτωση του φύλλου, η «ενεργός» με αυτή την έννοια ποσότητα φορτίου αυξάνει ανάλογα με το  $r^2$  καθώς απομακρυνόμαστε από το φύλλο, πράγμα που αντισταθμίζει ακριβώς την ελάττωση του τύπου  $1/r^2$  που υφίσταται το πεδίο οποιουδήποτε στοιχείου φορτίου.

**ΔΥΝΑΜΗ ΑΣΚΟΥΜΕΝΗ ΣΕ ΣΤΡΩΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ**

**1.14** Η σφαίρα του Σχ. 1.24 φέρει φορτίο κατανομημένο στην επιφάνεια με ομοιόμορφη πυκνότητα  $\sigma$ , σε  $C/m^2$ . Στο εσωτερικό της σφαίρας, όπως έχουμε ήδη μάθει, το ηλεκτρικό πεδίο μιας τέτοιας κατανομής φορτίου είναι μηδέν. Έξω από τη σφαίρα το πεδίο είναι  $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , όπου  $Q$  είναι το ολικό φορτίο στην επιφάνεια της σφαι-



**ΣΧΗΜΑ 1.23**  
Χρήση του νόμου του Gauss για τον υπολογισμό του πεδίου ενός επίπεδου φύλλου φορτίου απείρων διαστάσεων.



**ΣΧΗΜΑ 1.24**  
Μια σφαιρική επιφάνεια με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ .

ρας, ίσο προς  $4\pi r_0^2 \sigma$ . Ακριβώς έξω από τη σφαίρα η τιμή του πεδίου είναι  $\sigma/\epsilon_0$ . Συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με την Εξ. 28 και το Σχ. 1.23. Και στις δύο περιπτώσεις ο νόμος Gauss ισχύει. Η μεταβολή του  $E$  από το εσωτερικό προς το εξωτερικό είναι  $\sigma/\epsilon_0$ .

Πόση είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στα φορτία που συνιστούν αυτή την κατανομή; Εκ πρώτης όψεως η ερώτηση φαίνεται περιεργή, αφού το πεδίο  $E$  προκύπτει από αυτά τα ίδια τα φορτία. Αυτό το οποίο αναζητούμε είναι η δύναμη που ασκείται πάνω σε κάποιο μικρό στοιχείο φορτίου  $dq$ , όπως λ.χ. ένα μικρό τμήμα επιφάνειας  $dA$  με φορτίο  $dq = \sigma dA$ . Θεωρήστε χωριστά τη δύναμη που ασκείται στο  $dq$  από όλα τα άλλα φορτία της κατανομής, και τη δύναμη στο στοιχειώδες τμήμα που οφείλεται στα φορτία του ίδιου του τμήματος. Η τελευταία αυτή δύναμη είναι προφανώς μηδέν. Η άπωση Coulomb ανάμεσα στα εσωτερικά φορτία του τμήματος είναι απλώς ένα άλλο παράδειγμα του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, δηλαδή ότι το ίδιο το κομμάτι δεν μπορεί να σπρώξει τον εαυτό του. Τούτο απλοποιεί το πρόβλημά μας, επειδή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το ηλεκτρικό πεδίο  $E$ , περιλαμβανομένου και του πεδίου που οφείλεται στο σύνολο των φορτίων του τμήματος, στον υπολογισμό της δύναμης  $dF$  που ασκείται στο κομμάτι φορτίου  $dq$ :

$$dF = E dq = E \sigma dA \quad (29)$$

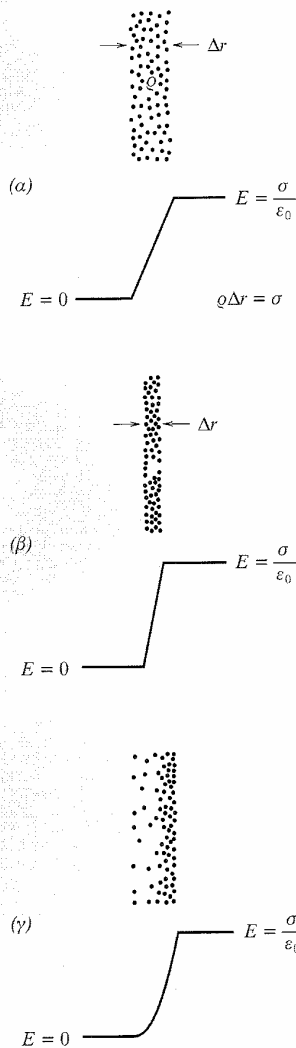
Ποιο  $E$  όμως θα χρησιμοποιήσουμε, το πεδίο  $E = \sigma/\epsilon_0$  στο εξωτερικό της σφαίρας ή το  $E = 0$  στο εσωτερικό; Η σωστή απάντηση, όπως αμέσως θα δείξουμε, είναι η μέση τιμή των δύο πεδίων:

$$dF = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} + 0 \right) \sigma dA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA \quad (30)$$

Για να δικαιολογήσουμε αυτό το αποτέλεσμα, θα θεωρήσουμε μια πιο γενική περίπτωση, που θα εισαγάγει μια πιο ρεαλιστική εικόνα μιας στρώσης επιφανειακού φορτίου. Οι πραγματικές στρώσεις φορτίου δεν έχουν μηδενικό πάχος. Στο Σχ. 1.25 φαίνονται μερικοί τρόποι κατά τους οποίους το φορτίο μπορεί να κατανομηθεί σε όλο το πάχος μιας στρώσης. Σε κάθε παράδειγμα η τιμή του  $\sigma$ , που δίνει το συνολικό φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας της στρώσης, είναι η ίδια. Αυτοί οι τρόποι μπορούν να συνιστούν εγκάρσιες τομές μέσα από πολύ μικρά τμήματα της σφαιρικής επιφάνειας του Σχ. 1.24 σε τέτοια κλίμακα, ώστε η καμπυλότητα να μην είναι διακρισίμη. Για να κάνουμε όμως το πρόβλημα γενικότερο, θα υποθέσουμε ότι το πεδίο στα αριστερά είναι  $E_1$  (και όχι 0, όπως ήταν στο εσωτερικό της σφαίρας) και στα δεξιά είναι  $E_2$ . Η συνθήκη που επιβάλλεται από το νόμο Gauss, για δεδομένο  $\sigma$ , είναι σε αυτή την περίπτωση

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (31)$$

Ας κοιτάξουμε τώρα προσεκτικά στο εσωτερικό της στρώσης όπου το πεδίο μεταβάλλεται συνεχώς από την τιμή  $E_1$  στην  $E_2$  και



ΣΧΗΜΑ 1.25

Η συνολική μεταβολή του πεδίου πάνω σε μια στρώση φορτίου εξαρτάται μόνο από το ολικό φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας.

υπάρχει μια χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho(x)$  εκτεινόμενη από το  $x = 0$  ως το  $x = x_0$ , που είναι το πάχος της στρώσης (Σχ. 1.26). Θεωρήστε μια πολύ μικρότερη φλούδα, πάχους  $dx \ll x_0$ , η οποία περιέχει ανά μονάδα επιφάνειας ποσότητα φορτίου  $\rho dx$ . Η δύναμη που ασκείται σε αυτήν είναι

$$dF = E_Q dx \quad (32)$$

Επομένως η ολική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας της στρώσης φορτίου είναι

$$F = \int_0^{x_0} E_Q dx \quad (33)$$

Ο νόμος Gauss όμως μας λέει ότι το  $dE$ , η μεταβολή του  $E$  μέσα από τη λεπτή φλούδα, είναι απλώς  $\rho dx/\epsilon_0$ . Επομένως το  $\rho dx$  στην Εξ. 33 μπορεί να αντικατασταθεί από το  $\epsilon_0 dE$ , και το ολοκλήρωμα γίνεται

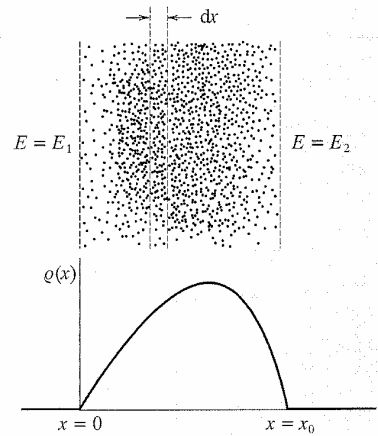
$$F = \epsilon_0 \int_{E_1}^{E_2} E dE = \frac{\epsilon_0}{2} (E_2^2 - E_1^2) \quad (34)$$

Αφού  $E_2 - E_1 = \sigma/\epsilon_0$ , το αποτέλεσμα της Εξ. 34 μπορεί να εκφραστεί ως

$$F = \frac{1}{2} (E_1 + E_2) \sigma \quad (35)$$

Δείξαμε, όπως είχαμε υποσχεθεί, ότι για δεδομένο  $\sigma$  η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται σε στρώση φορτίου δίνεται από τη μέση τιμή του εξωτερικού πεδίου από τη μία πλευρά και εκείνου από την άλλη.<sup>†</sup> Αυτή η τιμή δεν εξαρτάται από το πάχος της στρώσης, εφόσον τούτο είναι μικρό συγκρινόμενο με την ολική επιφάνεια, ούτε από τη μεταβολή  $\rho(x)$  της πυκνότητας φορτίου μέσα στη στρώση.

Η φορά της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα στοιχείο φορτίου της σφαίρας είναι, φυσικά, προς τα έξω, ανεξάρτητα από το αν το επιφανειακό φορτίο είναι θετικό ή αρνητικό. Αν τα φορτία δεν ξεφεύγουν από τη σφαίρα, η προς τα έξω δύναμη πρέπει να εξισορροπείται από κάποια προς τα μέσα δύναμη που δεν έχουμε συμπεριλάβει στις εξισώσεις μας, και η οποία έχει την ικανότητα να συγκρατεί τα φορτία στη θέση τους. Το να καλέσουμε αυτή τη δύναμη «μη ηλεκτρική» θα ήταν παραπλανητικό, αφού οι ηλεκτρικές έλξεις και απώσεις είναι οι κυρίαρχες δυνάμεις στη δομή των ατόμων και, γενικά, στη συνοχή της ύλης. Η διαφορά οφείλεται στο ότι οι δυνάμεις αυτές δρουν μόνο σε μικρές αποστάσεις, από άτομο σε άτομο ή από ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρόνιο. Σε αυτή την κλίμακα η φυσική μελετά τις αλληλεπιδράσεις των ανεξάρτητων σωματιδίων. Σκεφθείτε ένα φορτισμένο λαστιχένιο μπαλόνι με ακτίνα, έστω, 10 cm και αρνητικό φορτίο 10  $\mu\text{C}$  απλωμένο όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα στην εξωτερική του επιφάνεια. Σχηματίζεται ένα επιφανειακό φορ-



**ΣΧΗΜΑ 1.26**  
Μέσα στη φορτισμένη στρώση με πυκνότητα  $\rho(x)$  έχουμε  $E(x + dx) - E(x) = (\rho/\epsilon_0) dx$ .

<sup>†</sup> Σημειώστε ότι αυτή δεν είναι απαραίτητως η ίδια με το μέσο πεδίο στο εσωτερικό της στρώσης, μια ποσότητα χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον ή νόημα.



τίο πυκνότητας  $\sigma = q/4\pi r^2 = 10 \times 10^{-9}/4\pi \times 10^{-2} = 7,96 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Η συνισταμένη προς τα έξω δύναμη, ανά  $\text{m}^2$  επιφανειακού φορτίου, είναι  $\sigma^2/2\epsilon_0$ , ή  $3,58 \times 10^{-4} \text{ N/m}^2$ . Στην πραγματικότητα, το φορτίο αποτελείται από  $6,25 \times 10^{10}$  παραπάνω ηλεκτρόνια προσκολλημένα στην ελαστική μεμβράνη. Με δεδομένο ότι υπάρχουν 3 εκατομμύρια επιπλέον ηλεκτρόνια ανά  $\text{cm}^2$ , η «κοκκώδης υφή» της κατανομής του φορτίου δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή. Αν όμως μπορούσαμε να διακρίνουμε ένα από αυτά τα επιπλέον ηλεκτρόνια, θα βλέπαμε ότι απέχει περίπου  $10^{-4} \text{ cm}$  – απόσταση τεράστια σε ατομική κλίμακα – από το πλησιέστερο γειτονικό του. Αυτό το ηλεκτρόνιο θα ήταν προσκολλημένο, ηλεκτρικά προσκολλημένο, σε ένα τοπικό μόριο του ελαστικού. Το μόριο του ελαστικού θα ήταν προσαρτημένο σε γειτονικά μόρια, κ.ο.κ. Εάν τραβήξουμε ένα ηλεκτρόνιο, η δύναμη μεταφέρεται κατ' αυτό τον τρόπο σε ολόκληρο το τεμάχιο του ελαστικού. Εκτός βέβαια αν τραβήξουμε αρκετά δυνατά, ώστε να αποσπαστεί το ηλεκτρόνιο από το μόριο στο οποίο ήταν προσκολλημένο. Αυτό θα απαιτούσε ένα ηλεκτρικό πεδίο πολλές χιλιάδες φορές ισχυρότερο από το πεδίο του παραδείγματός μας.

### ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΗ ΜΕ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

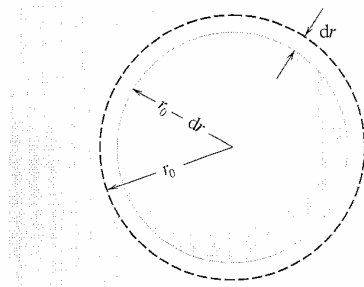
**1.15** Υποθέστε ότι το σφαιρικό μας κέλυφος φορτίου συμπιέζεται ελαφρά από μια αρχική ακτίνα  $r_0$  σε μια μικρότερη ακτίνα, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.27. Τούτο απαιτεί μια κατανάλωση έργου ενάντια στην απωστική δύναμη  $\sigma^2/2\epsilon_0$  ανά τετραγωνικό εκατοστό της επιφάνειας. Η μετατόπιση είναι  $dr$  οπότε το συνολικό έργο που καταναλίσκεται είναι  $(4\pi r_0^2)(\sigma^2/2\epsilon_0)dr$ , ή  $2\pi r_0^2 \sigma^2 dr/\epsilon_0$ . Αυτή η έκφραση παριστάνει την *αύξηση* της ενέργειας που απαιτείται για να συγκεντρωθεί το σύστημα των φορτίων, είναι δηλαδή η ενέργεια  $U$  για την οποία μιλήσαμε στην Παράγραφο 1.5:

$$dU = \frac{2\pi r_0^2 \sigma^2}{\epsilon_0} dr \quad (36)$$

Σημειώστε τον τρόπο με τον οποίο *άλλαξε* το ηλεκτρικό πεδίο. Στο εσωτερικό του φλοιού πάχους  $dr$  το πεδίο ήταν μηδέν και τώρα έχει τιμή  $\sigma/\epsilon_0$ . Πέρα από το  $r_0$ , το πεδίο δεν έχει μεταβληθεί. Στην πράξη έχουμε δημιουργήσει ένα πεδίο εντάσεως  $E = \sigma/\epsilon_0$  σε μια περιοχή όγκου  $4\pi r^2 dr$ . Το κάναμε αυτό επενδύοντας μια ποσότητα ενέργειας που δίνεται από την Εξ. 36 η οποία, αν αντικαταστήσουμε το  $\sigma$  με  $\epsilon_0 E$ , παίρνει την μορφή:

$$dU = \epsilon_0 E^2 2\pi r^2 dr \quad (37)$$

Αυτή η εξίσωση είναι μια μορφή ενός γενικότερου θεωρήματος που δεν θα αποδείξουμε τώρα: Η δυναμική ενέργεια  $U$  ενός συστήματος φορτίων, η οποία είναι το ολικό έργο που απαιτείται για να συναρμολογηθεί το σύστημα, μπορεί να υπολογιστεί από το ίδιο το ηλεκτρικό πεδίο, αν απλώς προσδώσουμε μια ποσότητα ενέρ-



ΣΧΗΜΑ 1.27

Συρρίκνωση ενός σφαιρικού φλοιού ή φορτισμένου μπαλιονιού.

γιας  $(\epsilon_0 E^2/2) dv$  σε κάθε στοιχείο όγκου  $dv$  και ολοκληρώσουμε σε όλο το χώρο όπου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{όλος ο χώρος}} E^2 dv \quad (38)$$

Προφανώς το  $E^2$  είναι μια βαθμωτή ποσότητα:  $E^2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ .

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτή η ενέργεια είναι «αποθηκευμένη» στο πεδίο. Αφού το σύστημα είναι διατηρητικό, η ίδια ποσότητα ενέργειας μπορεί να ανακτηθεί αν αφήσουμε τα φορτία να απομακρυνθούν. Είναι έτσι βολικό να θεωρούμε στο μεταξύ ότι η ενέργεια «βρίσκεται κάπου». Ο ενεργειακός ισολογισμός ισοσκελίζεται, αν θεωρήσουμε ότι η ενέργεια αποθηκεύεται στο χώρο με μια πυκνότητα  $\epsilon_0 E^2/2$ . Αυτή η ιδέα δεν βλάπτει, αλλά στην πραγματικότητα δεν έχουμε κανέναν τρόπο για να αναγνωρίσουμε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' ένα κυβικό εκατοστό του χώρου. Μόνο η ολική ενέργεια είναι φυσικώς μετρήσιμη, η ενέργεια δηλαδή που απαιτείται για να συγκεντρωθεί το φορτίο σε κάποια κατανομή, ξεκινώντας από μιαν άλλη κατανομή. Ακριβώς όπως η έννοια του πεδίου χρησιμοποιείται αντί του νόμου Coulomb για να ερμηνεύσει τη συμπεριφορά των ηλεκτρικών φορτίων, έτσι και, όταν χρησιμοποιούμε την Εξ. 38 αντί της Εξ. 9 για να εκφράσουμε την ολική δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτροστατικού συστήματος, χρησιμοποιούμε απλώς ένα διαφορετικό λογιστικό σύστημα. Πολλές φορές μια διαφορετική οπτική γωνία, ακόμα κι αν εκ πρώτης όψης συνίσταται στην αλλαγή της λογιστικής, μπορεί να διεγείρει νέες ιδέες και βαθύτερη κατανόηση. Η έννοια του ηλεκτρικού πεδίου ως ανεξάρτητης οντότητας θα πάρει μορφή όταν μελετήσουμε τη δυναμική συμπεριφορά της φορτισμένης ύλης και της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Συναντάμε δυσκολίες όταν προσπαθούμε να εφαρμόσουμε την Εξ. 38 σε σύστημα που περιλαμβάνει ένα σημειακό φορτίο, δηλαδή ένα πεπερασμένο φορτίο  $q$  με μηδενικές διαστάσεις. Τοποθετήστε το  $q$  στην αρχή των συντεταγμένων. Κοντά στην αρχή το  $E^2$  μεταβάλλεται ως  $q^2/r^4$ . Με  $dv = 4\pi r^2 dr$ , ο υπό ολοκλήρωση όρος  $E^2 dv$  θα συμπεριφέρεται ως  $dr/r^2$ , και το ολοκλήρωμα θα απειρισθεί στο όριο  $r = 0$ . Αυτό μας λέει απλώς ότι θα χρειαζόταν άπειρη ενέργεια για να συγκεντρωθεί ένα πεπερασμένο φορτίο σε μηδενικό χώρο — πράγμα που ευσταθεί μεν αλλά δεν μας βοηθάει. Στον πραγματικό χώρο έχουμε να κάνουμε με σωματίδια όπως τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια. Είναι τόσο μικρά ώστε για τους περισσότερους σκοπούς μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέες τις διαστάσεις τους και να τα λαμβάνουμε ως σημειακά φορτία όταν εξετάζουμε τις μεταξύ τους ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις. Το πόση ενέργεια χρειάστηκε για να δημιουργηθεί ένα τέτοιο σωματίδιο είναι ένα ερώτημα που υπερβαίνει το πεδίο της κλασικής ηλεκτροδυναμικής. Πρέπει να θεωρούμε ότι τα σωματίδια μας προσφέρθηκαν ετοιμοπαράδοτα. Η ενέργεια που μας ενδιαφέρει είναι η ενέργεια που απαιτείται για να τα κινούμε πέρα δώθε.

Η διάκριση είναι συνήθως σαφής. Θεωρήστε δύο φορτισμένα σωματίδια, λ.χ. ένα πρωτόνιο και ένα αρνητικό πιόνιο. Έστω  $E_p$  το ηλεκτρικό πεδίο του πρωτονίου και  $E_\pi$  το πεδίο του πιονίου. Το ολικό πεδίο είναι  $E = E_p + E_\pi$ , ενώ  $E \cdot E = E_p^2 + E_\pi^2 + 2E_p \cdot E_\pi$ . Σύμφωνα με την Εξ. 38 η ολική ενέργεια του συστήματος αυτών των δύο σωματιδίων είναι

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E_p^2 dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int E_\pi^2 dv + \epsilon_0 \int E_p \cdot E_\pi dv \end{aligned} \quad (39)$$

Η τιμή του πρώτου ολοκληρώματος είναι ιδιότητα οποιουδήποτε απομονωμένου πρωτονίου. Είναι μια σταθερά της φύσης, η οποία δεν μεταβάλλεται κατά την κίνηση του πρωτονίου. Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο ολοκλήρωμα, που αφορά μόνο το ηλεκτρικό πεδίο του πιονίου. Το τρίτο ολοκλήρωμα είναι αυτό που μας αφορά άμεσα, επειδή εκφράζει την ενέργεια που απαιτείται για να συναρμολογηθεί το σύστημα με δεδομένα ένα πρωτόνιο και ένα πιόνιο ως συστατικά φορτία.

Η διάκριση θα μπορούσε να εκλείψει τελείως αν τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούσαν τόσο ισχυρά, ώστε η ηλεκτρική δομή του ενός να παραμορφώνεται από τη γειτνίαση του άλλου. Γνωρίζοντας ότι και τα δύο σωματίδια είναι σύνθετα (το πρωτόνιο συντίθεται από τρία κουάρκ και το πιόνιο από δύο), θα περιμέναμε να συμβεί κάτι τέτοιο κατά τη διάρκεια μιας προσέγγισης σε πολύ μικρή απόσταση. Στην πραγματικότητα τίποτα δεν συμβαίνει σε αποστάσεις μέχρι  $10^{-15}$  m. Έτσι κι αλλιώς, σε μικρότερες αποστάσεις, για σωματίδια που υπόκεινται σε ισχυρές αλληλεπιδράσεις όπως το πρωτόνιο και το πιόνιο, κυριαρχούν άλλες μη ηλεκτρικές δυνάμεις.

Έτσι εξηγείται γιατί δεν χρειάζεται να συμπεριλάβουμε όρους της «ιδιοενέργειας», όπως τα δύο πρώτα ολοκληρώματα της Εξ. 39, κατά τον ενεργειακό ισολογισμό ενός συστήματος φορτισμένων στοιχειωδών σωματιδίων. Πράγματι θέλουμε να τους παραλείψουμε. Στην πράξη ακριβώς αυτό κάνουμε όταν αντικαθιστούμε την πραγματική κατανομή των διακριτών φορτισμένων σωματιδίων (λ.χ. των ηλεκτρονίων στο λαστιχένιο μπαλόνι) με μια τελείως συνεχή κατανομή φορτίου.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**1.1** Στην περιοχή των στοιχειωδών σωματιδίων, μια φυσική μονάδα μάζας είναι η μάζα ενός *νουκλεονίου*, δηλαδή ενός πρωτονίου ή ενός νετρονίου, που είναι οι βασικοί δομικοί λίθοι της συνηθισμένης μάζας. Παίρνοντας τη μάζα του νουκλεονίου ίση με  $1,67 \times 10^{-27}$  kg και τη βαρυτική σταθερά  $G_N$  ίση με  $6,7 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>·s<sup>-2</sup>, να συγκρίνετε τη βαρυτική έλξη δύο πρωτονίων με την ηλεκτροστατική τους άπωση. Αυτό δείχνει γιατί καλούμε τη βαρύτητα πολύ *ασθενή* δύναμη. Η απόσταση μεταξύ δύο πρωτονίων στον πυρήνα του ηλίου μπορεί κάποια στιγμή να φτάσει και τα  $10^{-15}$  m. Πόση είναι η δύναμη της ηλεκτρικής άπωσης ανάμεσα στα δύο πρωτόνια σε αυτή την απόσταση; Ακόμα ισχυρότερη είναι η *πυρηνική* δύναμη, που δρα ανάμεσα σε ένα ζευγάρι αδρονίων (συμπεριλαμβανομένων των νετρονίων και των πρωτονίων) όταν βρίσκονται σε αυτή την κοντινή απόσταση.

**1.2** Στην εντελώς ανεδαφική υπόθεση ότι δεν υπάρχουν άλλα φορτισμένα σωματίδια στην περιοχή, σε ποια απόσταση κάτω από ένα πρωτόνιο η ανοδική δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο (μάζα ηλεκτρονίου  $\approx 9 \times 10^{-31}$  kg) ισούται με το βάρος του ηλεκτρονίου;

**1.3** Δύο μπάλες του βόλεϊ, με μάζα 0,3 kg η καθεμιά, δεμένες με σπάγκους από νάλιον και φορτισμένες από μια ηλεκτροστατική γεννήτρια, είναι κρεμασμένες όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Πόσο είναι το φορτίο καθεμιάς, αν υποθέσετε ότι τα φορτία είναι ίσα;

**1.4** Σε κάθε γωνία ενός τετραγώνου βρίσκεται ένα σωματίδιο με φορτίο  $q$ . Στερεωμένο στο κέντρο του τετραγώνου βρίσκεται ένα σημειακό φορτίο  $Q$  με αντίθετο πρόσημο. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του  $Q$ , ώστε η ολική δύναμη σε καθένα από τα τέσσερα σωματίδια να είναι μηδέν; Όταν το  $Q$  έχει αυτή την τιμή, το σύστημα, αν δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις, βρίσκεται σε ισορροπία. Νομίζετε ότι η ισορροπία είναι ευσταθής;

Απ.  $Q = 0,957q$ .

**1.5** Μια λεπτή πλαστική ράβδος κάμπτεται σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας  $R$  και φέρει φορτίο  $Q$  κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο της το μήκος. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του ημικυκλίου.

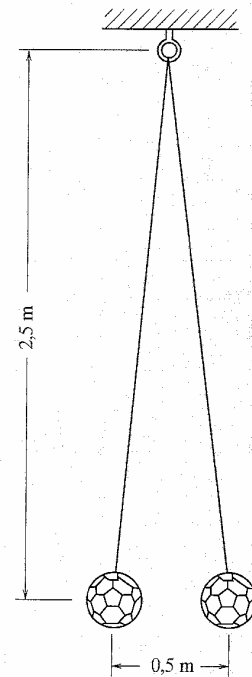
**1.6** Τρία θετικά φορτία, A, B, και C, με τιμές  $3 \times 10^{-6}$ ,  $2 \times 10^{-6}$  και  $2 \times 10^{-6}$  C αντιστοίχως, είναι τοποθετημένα στις γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 0,2 m.

(α) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε φορτίο.

(β) Να βρεθεί το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του τριγώνου.

Απ. (α) 2,34 N στο A, 1,96 N στα B και C,  
(β)  $6,74 \times 10^5$  N/C.

**1.7** Να βρεθεί μια γεωμετρική διάταξη ενός πρωτονίου και δύο ηλεκτρονίων τέτοια, ώστε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι μηδέν. Πόσες τέτοιες διατάξεις υπάρχουν με τα τρία σωματίδια στην ίδια ευθεία;



**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.3**

**1.8** Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια ανά ιόν για ένα μονοδιάστατο ιοντικό κρύσταλλο απείρου μήκους, μία σειρά δηλαδή από ισαπέχοντα φορτία με τιμή  $e$  και με εναλλασσόμενο πρόσημο. [Υπόδειξη: Μπορεί να είναι χρήσιμη η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά του  $\ln(1+x)$ .]

**1.9** Σφαιρικός όγκος ακτίνας  $a$  γεμίζεται με φορτίο που έχει ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας  $\rho$ . Θέλουμε να ξέρουμε τη δυναμική ενέργεια  $U$  αυτής της σφαίρας φορτίου, το έργο δηλαδή που καταναλώθηκε για τη συγκέντρωσή της. Υπολογίστε το χιτίζοντας τη σφαίρα στρώμα-στρώμα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το πεδίο έξω από τη σφαιρική κατανομή θα ήταν το ίδιο αν όλο το φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο. Να εκφράσετε το αποτέλεσμα συναρτήσει του ολικού φορτίου  $Q$  της σφαίρας.

$$\text{Απ. } U = (3/5)(Q^2/4\pi\epsilon_0 a).$$

**1.10** Στις αρχές του 20ού αιώνα η άποψη ότι η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου θα μπορούσε να έχει καθαρά ηλεκτρική προέλευση ήταν πολύ ελκυστική, ειδικότερα όταν η ισοδυναμία ενέργειας και μάζας αποκαλύφθηκε με την ειδική σχετικότητα. Φανταστείτε το ηλεκτρόνιο ως μπάλα φορτίου, με σταθερή πυκνότητα όγκου μέχρι κάποια μέγιστη ακτίνα  $r_0$ . Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1.9, εξισώστε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος με το  $mc^2$  και δείτε τι θα βρείτε για την  $r_0$ . Ένα μειονέκτημα του μοντέλου είναι μάλλον προφανές: Δεν υπάρχει τίποτα που να κρατάει τα φορτία στη θέση τους!

**1.11** Φορτίο  $1 \mu\text{C}$  βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Φορτίο  $-2 \mu\text{C}$  βρίσκεται στο  $x = 1 \text{ m}$  πάνω στον άξονα  $x$ .

(α) Να βρεθεί ένα σημείο στον άξονα  $x$  όπου το φορτίο να είναι μηδέν.

(β) Εντοπίστε, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, ένα σημείο στον άξονα  $y$  όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο προς τον άξονα  $x$ . [Ένα κομπιουτεράκι θα βοηθούσε για το (β).]

**1.12** Άλλο ένα πρόβλημα για το κομπιουτεράκι σας: Δύο θετικά ιόντα και ένα αρνητικό ιόν είναι στερεωμένα στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου. Σε ποιο σημείο μπορεί να τοποθετηθεί ένα τέταρτο ιόν, έτσι ώστε η δύναμη που ασκείται σε αυτό να είναι μηδέν; Υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια σημεία;

**1.13** Η διέλευση ενός νέφους καταιγίδας (μελανοσωρείτη) προκάλεσε την αύξηση της κατακόρυφης έντασης του ατμοσφαιρικού ηλεκτρικού πεδίου, μετρούμενου στο έδαφος, κατά  $3000 \text{ V/m}$ .

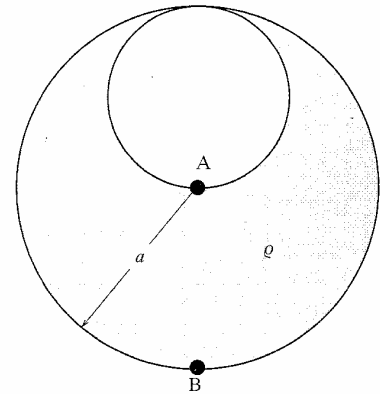
(α) Πόσο φορτίο περιέχει το σύννεφο ανά  $\text{m}^2$  οριζόντιας επιφάνειας;

(β) Υποθέστε ότι υπήρχε αρκετό νερό στο σύννεφο, με τη μορφή σταγονιδίων διαμέτρου  $1 \text{ mm}$ , ώστε το ύψος της βροχόπτωσης να φτάσει τα  $0,25 \text{ cm}$  και ότι αυτά τα σταγονίδια έφεραν το σύνολο του φορτίου. Πόση θα ήταν η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια μιας από τις σταγόνες;

**1.14** Φορτίο  $Q$  κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας  $b$ , ο οποίος είναι τοποθετημένος στο επίπεδο  $xy$  με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων. Εντοπίστε το σημείο στον άξονα  $z$  όπου το πεδίο είναι μέγιστο.

**1.15** Θεωρήστε σφαιρική κατανομή φορτίου, η οποία έχει σταθερή πυκνότητα  $\rho$  από τη θέση  $r = 0$  ως την  $r = a$  και είναι μηδέν πέρα από αυτήν τη θέση. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο για όλες τις τιμές του  $r$ , τόσο για τις μικρότερες όσο και για τις μεγαλύτερες του  $a$ . Υπάρχει μια ασυνεχής μεταβολή του πεδίου καθώς περνάμε από την επιφάνεια της κατανομής φορτίου στο  $r = a$ ; Υπάρχει ασυνεχής μεταβολή στο  $r = 0$ ;

**1.16** Η σφαίρα ακτίνας  $a$  περιέχει θετικό φορτίο με ομοιόμορφη πυκνότητα  $\rho$ . Μια μικρότερη σφαίρα ακτίνας  $a/2$  αποσπάται, όπως φαίνεται στο σχήμα, και η θέση από την οποία αποσπάστηκε παραμένει κενή. Ποια είναι η κατεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο A; Στο B;



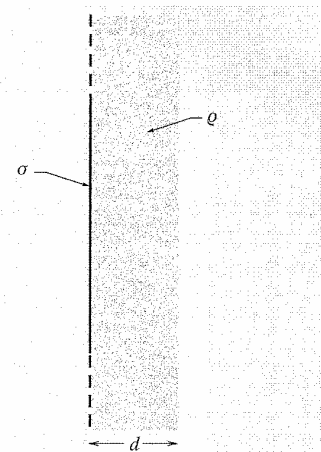
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.16

**1.17** (α) Σημειακό φορτίο  $q$  είναι τοποθετημένο στο κέντρο κύβου πλευράς μήκους  $d$ . Ποια είναι η τιμή του  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  που λαμβάνεται σε μία έδρα του κύβου;

(β) Το φορτίο  $q$  μεταφέρεται σε μια γωνία του κύβου. Ποια είναι τώρα η τιμή της ροής του  $\mathbf{E}$  μέσα από καθεμιά από τις έδρες του κύβου;

**1.18** Η απόσταση μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων φύλλων απείρων διαστάσεων, με επιφανειακά φορτία πυκνότητας  $\sigma = 6 \mu\text{C}/\text{m}^2$  και  $\sigma = -4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ , αντιστοίχως, είναι 2 cm. Να διερευνηθεί το πεδίο στο χώρο ανάμεσα στα δύο φύλλα. Υποθέστε τώρα ότι τα δύο επίπεδα, αντί να είναι παράλληλα, τέμνονται σε ορθή γωνία. Να δείχθει ποια είναι η μορφή του πεδίου σε καθεμιά από τις τέσσερις περιοχές στις οποίες διαιρείται ο χώρος.

**1.19** Στην επιφάνεια ενός επίπεδου φύλλου απείρων διαστάσεων υπάρχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma$ . Δίπλα σε αυτό βρίσκεται ένα στρώμα φορτίου απείρων διαστάσεων, πάχους  $d$  και ομοιόμορφης χωρικής πυκνότητας φορτίου  $\rho$ . Όλα τα φορτία είναι σταθεροποιημένα. Να βρεθεί το πεδίο  $\mathbf{E}$  παντού.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.19

**1.20** Θεωρήστε μια κατανομή φορτίου με τη μορφή ενός κυκλικού κυλίνδρου, όπως είναι λ.χ. ένας μακρύς φορτισμένος σωλήνας. Αποδείξτε ότι το πεδίο στο εσωτερικό του σωλήνα είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι το πεδίο στο εξωτερικό του σωλήνα είναι το ίδιο ωσάν ολόκληρο το φορτίο να ήταν συγκεντρωμένο στον άξονα. Αληθεύει κάποια από τις δύο πιο πάνω προτάσεις για σωλήνα τετραγωνικής διατομής, στον οποίο το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο;

**1.21** Το ουδέτερο άτομο του υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση συμπεριφέρεται από κάποια άποψη σαν μια ηλεκτρική κατανομή φορτίου, η οποία αποτελείται από ένα σημειακό φορτίο, μέ-

τρον  $e$ , περιβαλλόμενο από αρνητικό φορτίο, η πυκνότητα του οποίου δίνεται από τη σχέση  $-\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$ . Η παράμετρος  $a_0$  είναι η ακτίνα Bohr,  $0,53 \times 10^{-10}$  m, και το  $C$  είναι μια σταθερά που έχει την τιμή που απαιτείται, ώστε το ολικό αρνητικό φορτίο να ισούται ακριβώς με  $e$ . Πόσο είναι το καθαρό ηλεκτρικό φορτίο στο εσωτερικό μιας σφαίρας με ακτίνα  $a_0$ ; Ποια είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την απόσταση από τον πυρήνα;

**1.22** Θεωρήστε τρία επίπεδα φορτισμένα φύλλα, A, B, και C. Τα φύλλα είναι παράλληλα μεταξύ τους, με το B κάτω από το A και το C κάτω από το B. Σε κάθε φύλλο υπάρχει επιφανειακό φορτίο με ομοιόμορφη πυκνότητα:  $-4 \mu\text{C}/\text{cm}^2$  στο φύλλο A,  $7 \mu\text{C}/\text{cm}^2$  στο B, και  $-3 \mu\text{C}/\text{cm}^2$  στο C. (Η πυκνότητα που δίνεται περιλαμβάνει το φορτίο και στις δύο πλευρές του φύλλου.) Πόσο είναι το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης σε κάθε φύλλο; Ελέγξτε για να δείτε αν η ολική δύναμη στα τρία φύλλα είναι μηδέν.

Απ.  $16/2\epsilon_0$  στο A,  $7/2\epsilon_0$  στο B,  $9/2\epsilon_0$  στο C.

**1.23** Σφαίρα ακτίνας  $R$  φέρει φορτίο  $Q$  ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνειά της. Πόση είναι η ακτίνα της σφαίρας που περιέχει το 90% της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτροστατικό πεδίο αυτής της κατανομής φορτίου;

Απ. Ακτίνα:  $10R$ .

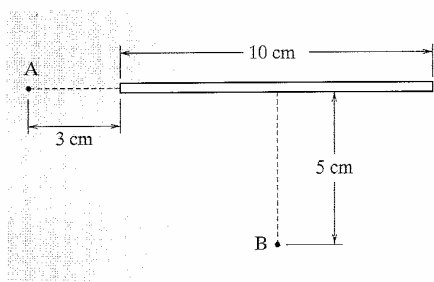
**1.24** Λεπτή ράβδος μήκους 0,1 m φέρει ολικό φορτίο  $8 \mu\text{C}$  ομοιόμορφα κατανομημένο κατά μήκος του. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε καθένα από τα δύο σημεία A και B, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**1.25** Στην Εξ. 27 το  $r$  εκφράζεται σε m, το  $\lambda$  σε C/m, και το  $E$  σε N/C. Θεωρήστε μια γραμμή μεταφοράς υψηλής τάσης συνεχούς ρεύματος, η οποία αποτελείται από δύο παράλληλους αγωγούς που απέχουν απόσταση 3 m. Οι γραμμές είναι φορτισμένες με αντίθετο φορτίο. Εάν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσον μεταξύ των δύο συρμάτων είναι  $15.000 \text{ N/C}$ , πόση περίσσεια φορτίου υπάρχει σε μήκος 1 km του θετικού αγωγού;

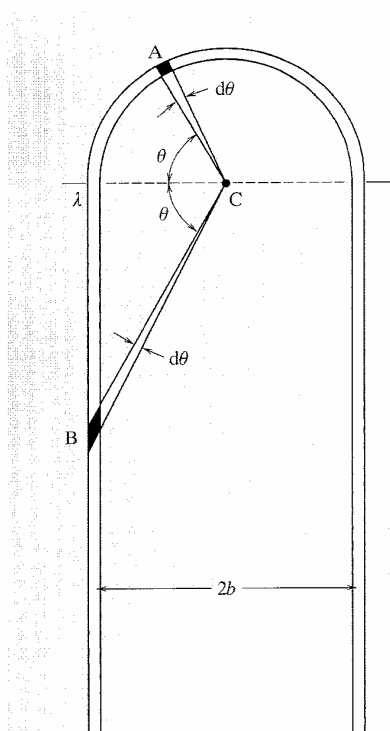
Απ.  $6,26 \times 10^{-4} \text{ C}$ .

**1.26** Δύο μακριές, λεπτές παράλληλες βέργες, που απέχουν απόσταση  $2b$ , ενώνονται με ημικυκλικό κομμάτι ακτίνας  $b$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε ολόκληρο το μήκος του νήματος εναποτίθεται φορτίο ομοιόμορφης γραμμικής πυκνότητας. Δείξτε ότι το πεδίο  $E$  μηδενίζεται στο σημείο C. Κάντε το αυτό συγκρίνοντας τη συνεισφορά του στοιχείου στο A με τη συνεισφορά του στοιχείου στο B, το οποίο ορίζεται από τις ίδιες τιμές των  $\theta$  και  $d\theta$  όπως και το A.

**1.27** Μια σκακιέρα, πολύ μεγάλων διαστάσεων, πλευράς  $s$ , φέρει φορτίο  $e$  στο κέντρο κάθε λευκού τετραγώνου και φορτίο  $-e$  στο κέντρο κάθε μαύρου τετραγώνου. Ενδιαφερόμαστε για το έργο  $W$  που απαιτείται για τη μεταφορά ενός φορτίου από τη θέση του πάνω στη σκακιέρα σε άπειρη απόσταση από αυτήν, κατά μήκος ενός δρόμου κάθετου στη σκακιέρα. Δεδομένου ότι το  $W$  είναι πεπερα-



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.24



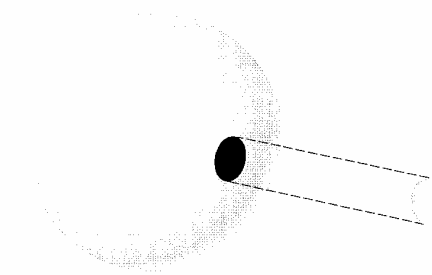
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.26

σμένο (πράγμα εύλογο αλλά όχι ευκολοαπόδεικτο), νομίζετε ότι το έργο είναι θετικό ή αρνητικό; Για να υπολογίσετε μια προσεγγιστική τιμή του  $W$ , θεωρήστε την περίπτωση της απομάκρυνσης του φορτίου από το κεντρικό τετράγωνο μιας σκακιέρας  $7 \times 7$ . (Μόνο 9 διαφορετικοί όροι υπεισέρχονται σε αυτό το άθροισμα.) Ή γράψτε ένα πρόγραμμα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή και υπολογίστε το έργο της απομάκρυνσης του κεντρικού φορτίου από μια πολύ μεγαλύτερη διάταξη, λ.χ. μια σκακιέρα  $101 \times 101$ . Η σύγκριση του αποτελέσματος της σκακιέρας  $101 \times 101$  με αυτό μιας  $99 \times 99$  και μιας  $103 \times 103$ , θα σας δώσει μια ιδέα του ρυθμού σύγκλισης προς την τιμή της άπειρης διάταξης.

**1.28** Τρία πρωτόνια και τρία ηλεκτρόνια πρόκειται να τοποθετηθούν στις κορυφές ενός κανονικού οκταέδρου πλευράς  $a$ . Θέλουμε να βρούμε την ενέργεια του συστήματος, δηλαδή το έργο που απαιτείται για τη συναρμολόγηση του συστήματος, αρχίζοντας με τα σωματίδια πολύ μακριά τόσο μεταξύ τους όσο και από το οκτάεδρο. Υπάρχουν δύο ουσιαστικά διαφορετικές διατάξεις. Πόση είναι η ενέργεια της καθεμιάς;

$$\text{Απ. } -3,879e^2/4\pi\epsilon_0 a, \quad -2,121e^2/4\pi\epsilon_0 a.$$

**1.29** Στο σχήμα φαίνεται ένα σφαιρικό κέλυφος φορτίου, ακτίνας  $a$  και επιφανειακής πυκνότητας  $\sigma$ , από το οποίο έχει αφαιρεθεί ένα μικρό κυλινδρικό κομμάτι ακτίνας  $b \ll a$ . Ποια είναι η κατεύθυνση και το μέτρο του πεδίου στο κέντρο του ανοίγματος; Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρείτε την απάντηση. Μπορείτε να ολοκληρώσετε σε ολόκληρο το υπόλοιπο φορτίο αθροίζοντας έτσι τις συνεισφορές όλων των στοιχείων του πεδίου στο εν λόγω σημείο. Ή, επικαλούμενοι την αρχή της επαλληλίας, μπορείτε να θεωρήσετε το αποτέλεσμα που θα έχει η επανατοποθέτηση του αφαιρεθέντος κομματιού που είναι στην πράξη ένας μικρός δίσκος. Σημειώστε τη σχέση αυτού του αποτελέσματος με όσα είπαμε όταν υπολογίσαμε τη δύναμη που ασκείται σε επιφανειακό φορτίο — ίσως αυτός να είναι ένας τρίτος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσατε να φτάσετε στο ίδιο αποτέλεσμα.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.29

**1.30** Ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη με ακτίνες  $a$  και  $b$ , με  $b > a$ , φέρουν φορτία  $Q$  και  $-Q$  αντιστοίχως, ομοιόμορφα κατανεμημένα σε κάθε κέλυφος. Να υπολογιστεί η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του συστήματος.

**1.31** Όπως και στο φορτισμένο ελαστικό μπαλόνι που περιγράφηκε στη σελίδα 31, σε κάθε σημείο μιας φορτισμένης σαπουνόφουσας ασκείται μια προς τα έξω ηλεκτρική δύναμη. Εάν το ολικό φορτίο σε μια φούσκα ακτίνας  $R$  είναι  $Q$ , πόσο είναι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που τείνει να απομακρύνει τα δύο ημισφαίρια της φούσκας; (Εάν το πηλίκο αυτής της δύναμης με το  $2\pi R$  είναι μεγαλύτερο από την επιφανειακή τάση της σαπουνόφουσας, θα περιμέναμε να δούμε ενδιαφέροντα φαινόμενα!)

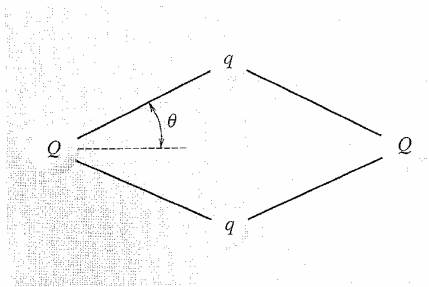
$$\text{Απ.: } Q^2/32\pi\epsilon_0 R^2.$$



**1.32** Υποθέστε ότι τρία θετικά φορτισμένα σωματίδια είναι περιορισμένα να κινούνται σε μια σταθερή κυκλική τροχιά. Εάν όλα τα φορτία ήταν τα ίδια, η κατάσταση ισορροπίας θα ήταν προφανώς μια συμμετρική διάταξη με τα φορτία να ισαπέχουν κατά τόξα  $120^\circ$  γύρω από τον κύκλο. Υποθέστε τώρα ότι δύο από τα φορτία είναι ίσα και ότι η κατάσταση ισορροπίας είναι τέτοια ώστε αυτά τα δύο φορτία να απέχουν κατά  $90^\circ$  αντί για  $120^\circ$ . Ποιο είναι το σχετικό μέτρο του τρίτου φορτίου;

Απ. 3,154.

**1.33** Θεωρήστε σφαίρα ακτίνας  $a$  γεμάτη με αρνητικό φορτίο σταθερής πυκνότητας, όπου το ολικό φορτίο είναι ισοδύναμο με το φορτίο δύο ηλεκτρονίων. Βυθίστε σε αυτό το ζελέ αρνητικού φορτίου δύο πρωτόνια και υποθέστε ότι, παρά την παρουσία τους, η κατανομή του αρνητικού φορτίου παραμένει η ίδια. Πού πρέπει να βρίσκονται τα πρωτόνια, ώστε η δύναμη σε καθένα από αυτά να είναι μηδέν; (Αυτή είναι μια εκπληκτικά ρεαλιστική καρικατούρα ενός μορίου υδρογόνου. Τα μάγια που εμποδίζουν το νέφος των ηλεκτρονίων στο μόριο να συντριβεί πάνω στο πρωτόνιο εξηγούνται με την κβαντική μηχανική!)



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.34

**1.34** Τέσσερα θετικά φορτισμένα σώματα, δύο με φορτίο  $Q$  και δύο με φορτίο  $q$ , συνδέονται με τέσσερα μη ελαστικά νήματα ίσου μήκους. Όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, τα φορτία παίρνουν τη διάταξη ισορροπίας που φαίνεται στο σχήμα. Δείξτε ότι  $\tan^3 \theta = q^2/Q^2$ . Τούτο μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Μπορείτε να δείξετε ότι αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει, αν η συνολική δύναμη σε κάθε σώμα, δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα της τάσης του νήματος και της ηλεκτρικής άπωσης, είναι μηδέν. Ή μπορείτε να γράψετε την έκφραση της ενέργειας  $U$  του συστήματος (όπως στην Εξ. 7 αλλά για τέσσερα φορτία αντί για τρία) και να την ελαχιστοποιήσετε.

**1.35** Θεωρήστε το ηλεκτρικό πεδίο δύο πρωτονίων που βρίσκονται σε απόσταση  $b$ . Σύμφωνα με την Εξ. 1.38 (την οποία γράψαμε αλλά δεν αποδείξαμε) η δυναμική ενέργεια του συστήματος πρέπει να δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \, dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_1^2 \, dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_2^2 \, dv + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \, dv \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{E}_1$  είναι το πεδίο του ενός σωματιδίου όταν είναι μόνο του και  $\mathbf{E}_2$  το πεδίο του άλλου. Το πρώτο από τα τρία ολοκλήρωματα θα μπορούσε να ονομαστεί «ηλεκτρική ιδιοενέργεια» του ενός πρωτονίου· μια εγγενής ιδιότητα του σωματιδίου που εξαρτάται από το μέγεθος και τη δομή του πρωτονίου. Την είχαμε παραβλέψει όταν υπολογίζαμε τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων, βασίζόμενοι στην υπόθεση ότι παραμένει σταθερή, και το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο ολοκλήρωμα. Στο τρίτο ολοκλήρωμα περιλαμβάνεται η απόσταση ανάμεσα στα φορτία. Το τρίτο ολοκλήρωμα δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί, εάν χρησιμοποιηθούν σφαιρικές πολι-

κές συντεταγμένες με το ένα από τα πρωτόνια στην αρχή και το άλλο πάνω στον πολικό άξονα και υπολογιστεί πρώτα το ολοκλήρωμα ως προς  $r$ . Έτσι με απευθείας ολοκλήρωση μπορεί ναδειχθεί ότι το τρίτο ολοκλήρωμα έχει την τιμή  $e^2/4\pi\epsilon_0 b$ , που ήδη γνωρίζουμε ότι είναι το έργο που απαιτείται για να πλησιάσουν τα δύο πρωτόνια από άπειρη απόσταση σε θέσεις που απέχουν απόσταση  $b$ . Έτσι θα έχετε αποδείξει την ορθότητα της Εξ. 38 γι' αυτή την περίπτωση και, επικαλούμενοι την επαλληλία, μπορείτε τότε να δείξετε ότι η Εξ. 38 πρέπει να δίνει την απαιτούμενη ενέργεια για τη συναρμολόγηση οποιουδήποτε συστήματος φορτίων.