7. Ταλαντώσεις σε συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας

Συζευγμένες ταλαντώσεις

Βιβλιογραφία

F. S. Crawford Jr. 'Κυματική'.
(Σειρά Μαθημάτων Φυσικής Berkeley, Τόμος 3. Αθήνα 1979). Κεφ. 2.

H. J. Pain. 'Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων'.
(Εκδόσεις Συμμετρία, 1990). Κεφ. 3.

Κ. Χριστοδουλίδης, *Μαθηματικό Συμπλήρωμα για τα Εισαγωγικά Μαθήματα Φυσικής*. (Σημειώσεις, Ε.Μ.Π., 2003): *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*.

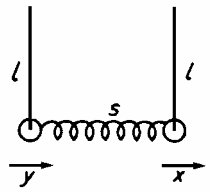
7.1 Εισαγωγή

Ταλαντωνόμενα συστήματα που γειτονεύουν μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν, μεταδίδουν ενέργεια το ένα στο άλλο και οδηγούν στην κυματική κίνηση.

Θα εξετάσουμε πρώτα ένα παράδειγμα σύζευξης μεταξύ δύο εκκρεμών μέσω ελατηρίου. Θα εισαγάγουμε στο παράδειγμα αυτό τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και θα μελετήσουμε μια γενική μέθοδο εύρεσης των συχνοτήτων τους. Τέλος, θα εξετάσουμε τη συζευγμένη κίνηση μιας εκτενούς διάταξης ταλαντωτών (χορδή με σφαιρίδια), η οποία στο όριο θα μας οδηγήσει στην κυματική κίνηση.

7.2 Ελαστικά συζευγμένος ταλαντωτής

Θα εξετάσουμε δύο πανομοιότυπα εκκρεμή με ράβδους μήκους l χωρίς βάρος, που υποβαστάζουν μάζες m, συζευγμένα με ελατήριο σταθεράς s και φυσικού μήκους ίσου με την απόσταση των μαζών σε ισορροπία. Θεωρούμε μικρές ταλαντώσεις στο επίπεδο του σχήματος. Οι μετατοπίσεις είναι x και y. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι:



$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l} - s(x-y) \tag{7.1}$$

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{l} + s(x-y) \tag{7.2}$$

Με $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, προκύπτει:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{s}{m}(x-y) \tag{7.3}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = +\frac{s}{m}(x-y) \tag{7.4}$$

Εισάγουμε τις νέες συντεταγμένες: $X=x+y$ (7.5) και $Y=x-y$ (7.6)

τις οποίες ονομάζουμε *κανονικές συντεταγμένες*.

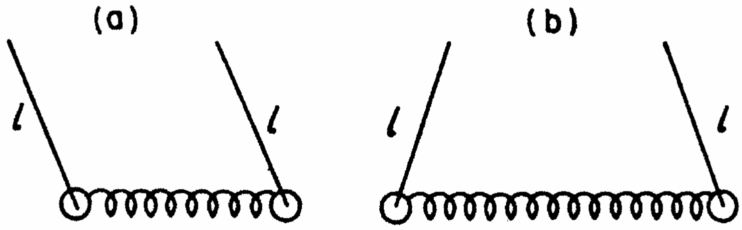
Προσθέτοντας (7.3) + (7.4): $$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{7.7}$$

Αφαιρώντας (7.3) - (7.4): $$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right)Y = 0 \tag{7.8}$$

Οι X και Y περιγράφονται από απλές αρμονικές λύσεις:

$$X = x + y = X_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7.9}$$

$$Y = x - y = Y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{s}{m}} \tag{7.10}$$



(a) Ο τρόπος ταλάντωσης «σε φάση», ο οποίος δίνεται από την $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$, όπου X είναι η κανονική συντεταγμένη $X = x + y$, και $\omega_0^2 = g/l$. (b) Ο τρόπος ταλάντωσης «εκτός φάσης» ο οποίος δίνεται από την $\ddot{Y} + (\omega_0^2 + 2s/m)Y = 0$, όπου Y είναι η κανονική συντεταγμένη, $Y = x - y$.

Αν $Y = 0$, τότε $x = y$ για κάθε t, και τα εκκρεμή κινούνται μαζί. Το ελατήριο δεν επηρεάζει την κίνηση. Γωνιακή συχνότητα ω_0, τρόπος ταλάντωσης “σε φάση”.

Αν $X = 0$, τότε $x = -y$ για κάθε t, και τα εκκρεμή έχουν διαφορά φάσης 180^o. Γωνιακή συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2s}{m}} > \omega_0$, τρόπος ταλάντωσης “εκτός φάσης”.

7.3 Κανονικές συντεταγμένες, βαθμοί ελευθερίας, κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

(α) Οι *κανονικές συντεταγμένες* ικανοποιούν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με μόνο μια εξαρτημένη μεταβλητή η κάθε μια (π.χ. X, Y).

(β) Η ταλάντωση που περιγράφεται από μια κανονική συντεταγμένη, ονομάζεται *κανονικός τρόπος ταλάντωσης* και έχει τη δική του κανονική συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται όλα τα μέρη του συστήματος.

(γ) Η ολική ενέργεια του συστήματος χωρίς απόσβεση: $E_{ολ} = aX^2 + bY^2 + c\dot{X}^2 + d\dot{Y}^2$ και γενικεύεται σε $E_{ολ} = \sum_i a_i X_i^2 + \sum_i c_i \dot{X}_i^2$ όπου a, b, c, d, a_i, c_i σταθεροί συντελεστές.

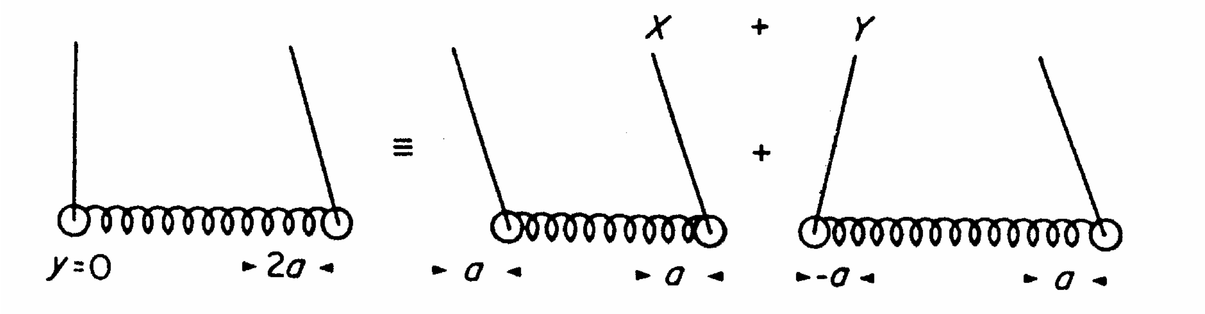
Εκφράζεται δηλαδή από άθροισμα όρων, ανεξάρτητων μεταξύ τους, στους οποίους εμφανίζονται τα τετράγωνα των κανονικών συντεταγμένων και των *κανονικών ταχυτήτων*.

(δ) Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Δεν ανταλλάσσουν ενέργεια. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα με δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, αν διεγερθεί μόνο ο ένας τρόπος ταλάντωσης (με κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών), ο δεύτερος τρόπος θα απουσιάζει, χωρίς να αποκτά ενέργεια από τον τρόπο που ταλαντώνεται.

(ε) *Βαθμός ελευθερίας* είναι κάθε ανεξάρτητος τρόπος με τον οποίο ένα σύστημα μπορεί να αποκτήσει ενέργεια. Σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί η ιδιαίτερη κανονική συντεταγμένη του. Έχει δυναμική ενέργεια aX^2 και κινητική $c\dot{X}^2$.

Επανερχόμενοι τώρα στο παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών, παρατηρούμε ότι η σημασία της επιλογής των X και Y έγκειται στο ότι αυτές οι παράμετροι δίνουν ένα πολύ απλό παράδειγμα κανονικών συντεταγμένων. Έχουμε δύο μεταβλητές (X, Y), τέσσερις βαθμούς ελευθερίας και, επομένως, τέσσερις κανονικές συντεταγμένες ($X, Y, \dot{X}, \dot{Y}$).

Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή έστω ότι $X_0 = Y_0 = 2a$ και $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Τότε



Η μετατόπιση του ενός εκκρεμούς κατά $2a$ παριστάνεται ως συνδυασμός των δύο κανονικών συντεταγμένων $X + Y$.

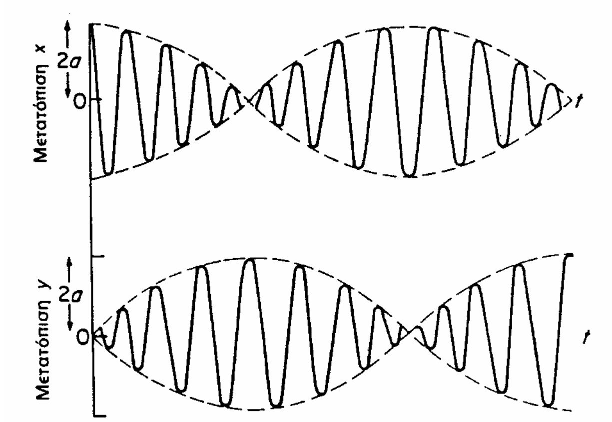
$$x = \frac{X+Y}{2} = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t \tag{7.11}$$

$$y = \frac{X-Y}{2} = a\cos\omega_1 t - a\cos\omega_2 t \tag{7.12}$$

Π.χ., οι αρχικές μετατοπίσεις (βλ. το σχήμα που ακολουθεί) είναι: $x = 2a,\ y = 0$ όταν $t = 0$ (και $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0$), μπορούν να θεωρηθούν ως ένας γραμμικός συνδυασμός του "σε φάση" τρόπου ($x = y = a$, $X_0 = x + y = 2a$) και του "εκτός φάσης" τρόπου ($x = -y = a$, $Y_0 = x - y = 2a$). Όταν αφεθούν ελεύθερες οι δύο μάζες, η κίνησή τους περιγράφεται από τις εξισώσεις,

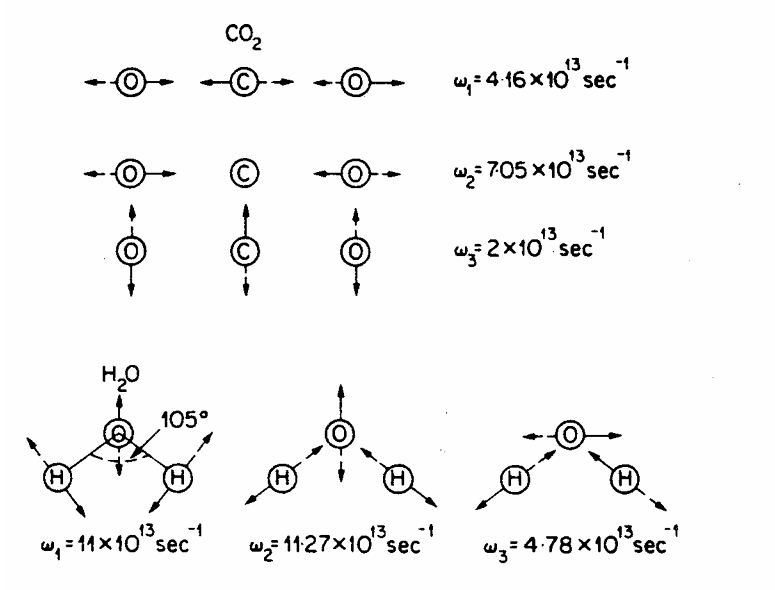
$$x = 2a\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \tag{7.13}$$

$$y = 2a\sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \tag{7.14}$$



όπου το x εκτελεί συνημιτονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται συνημιτονικά, αργά, με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, και το y εκτελεί ημιτονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται, αργά, ημιτονικά με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

Η ενέργεια ανταλλάσσεται πλήρως μεταξύ των δύο μαζών (στην περίπτωση ίσων μαζών και $\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{(\omega_2 - \omega_1)} =$ ακέραιος). Ακινητοποιείται πότε η μία και πότε η άλλη μάζα. Δεν υπάρχει όμως ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.



Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης των τριατομικών μορίων CO_2 και H_2O.

Τα άτομα σε πολυατομικά μόρια συμπεριφέρονται όπως οι μάζες στα εκκρεμή που εξετάσαμε (βλέπε σχήμα).

7.4 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας

Όταν λάβουμε υπόψη την απόσβεση, που αγνοήσαμε μέχρι τώρα, τότε βρίσκουμε ότι ο κάθε τρόπος είναι όμοιος με τον μονοδιάστατο ταλαντωτή με απόσβεση. Αν διεγείρουμε ένα τέτοιο σύστημα με εξωτερική περιοδική δύναμη μεταβλητής συχνότητας, βρίσκουμε ότι κάθε τρόπος συμπεριφέρεται σαν ένας μονοδιάστατος εξαναγκασμένος ταλαντωτής με συχνότητα συντονισμού που αντιστοιχεί στη συχνότητα του τρόπου.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται για περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας: Μεταβάλλοντας τη συχνότητα διέγερσης, έχουμε ένα συντονισμό κάθε φορά που η διεγείρουσα συχνότητα παίρνει τιμή ίση με την τιμή της συχνότητας ενός τρόπου.

7.5 Η γενική μέθοδος εύρεσης των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων

Θα εξετάσουμε, στη γενική του μορφή, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει στη μελέτη ενός συνόλου ταλαντωτών οι οποίοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, χωρίς απώλειες. Οι δυνάμεις που ασκούνται από κάθε ταλαντωτή στους γειτονικούς του θα είναι γραμμικές συναρτήσεις της απόστασής του από αυτούς.

Η μέθοδος της εύρεσης των κανονικών συχνοτήτων και των κανονικών συντεταγμένων του συστήματος θα επιδειχθεί αρχικά με ένα Παράδειγμα για ένα σύστημα δύο μαζών και μετά θα γενικευθεί σε συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.

Παράδειγμα 7.1

Έστω ότι οι μάζες είναι ίσες με m_1 και m_2, και οι θέσεις τους καθορίζονται από τις αποστάσεις τους από τα σημεία ισορροπίας τους, x_1 και x_2 αντίστοιχα. Οι μάζες συνδέονται μεταξύ τους με ελατήρια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να μελετηθεί η κίνηση των δύο μαζών.

Οι εξισώσεις κίνησης των μαζών είναι

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2$$

οι οποίες γράφονται ως

$$m_1\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

ή γενικά στη μορφή:

$$\ddot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 0$$

όπου οι c_{kl} , $(k = 1, 2, \quad l = 1, 2)$, είναι σταθεροί συντελεστές.

Θα μπορούσαμε να απαλείψουμε πρώτα τη μία και μετά την άλλη μεταβλητή από το σύστημα των δύο εξισώσεων και να βρούμε δύο εξισώσεις τετάρτης τάξης, τις οποίες να λύσουμε για τα x_1 και x_2. Είναι όμως ευκολότερο να δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $e^{\alpha t}$ για τα x_1 και x_2, και να βρούμε τις τιμές του α για τις οποίες οι συναρτήσεις $e^{\alpha t}$ είναι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων. Οδηγούμαστε έτσι στην έννοια του κανονικού τρόπου ταλάντωσης του συστήματος. Για κίνηση σε έναν *κανονικό τρόπο ταλάντωσης*, όλα τα μέρη του συστήματος κινούνται με την ίδια συχνότητα και φάση. Επειδή εδώ δεν υπάρχουν απώλειες (και όροι με $\dot{x}$), οι ρίζες α είναι καθαρά φανταστικές. Μπορούμε επομένως να δοκιμάσουμε από την αρχή ημιτονικές και συνημιτονικές μορφές λύσεων.

Υποθέτοντας ότι τα μέρη του συστήματος κινούνται σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης, τον *n*–οστό, οι μετατοπίσεις των μαζών θα δίνονται από τις σχέσεις

$$x_{1n} = A_{1n}\cos(\omega_n t + \phi_n) \qquad x_{2n} = A_{2n}\cos(\omega_n t + \phi_n)\,.$$

όπου A_{1n} και A_{2n} είναι τα πλάτη ταλάντωσης των δύο μαζών στον *n*–οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, ω_n η κανονική συχνότητα και ϕ_n η κοινή σταθερά φάσης για τον τρόπο και το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε, αφού απλοποιήσουμε τον κοινό παράγοντα $\cos(\omega_n t + \phi_n)$, τις εξισώσεις

$$(c_{11} - \omega_n^2)A_{1n} + c_{12}A_{2n} = 0 \qquad c_{21}A_{1n} + (c_{22} - \omega_n^2)A_{2n} = 0$$

από τις οποίες βρίσκουμε $$\frac{A_{2n}}{A_{1n}} = \frac{\omega_n^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{21}}{\omega_n^2 - c_{22}}\,.$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μάς δίνουν την εξίσωση για τις κανονικές συχνότητες του συστήματος

$$(\omega_n^2 - c_{11})(\omega_n^2 - c_{22}) = c_{12}\,c_{21}$$

και μια εξίσωση η οποία, για κάθε κανονική συχνότητα, δίνει τον λόγο των πλατών ταλάντωσης των μαζών. Εδώ θα βρούμε τις τιμές, $\pm\omega_1$ και $\pm\omega_2$, για τις συχνότητες. Μια αρνητική συχνότητα δεν δίνει διαφορετικό τρόπο ταλάντωσης από τη θετική. Οι λόγοι των πλατών βλέπουμε ότι δεν εξαρτώνται από τα πρόσημα των συχνοτήτων, και το άθροισμα

$$x_{1n} = A_{1n}\cos(\omega_n t + \phi_n) + A_{1n}\cos(-\omega_n t + \phi_n)$$

μπορεί να εκφραστεί ως ένας συνημιτονικός όρος που μεταβάλλεται με συχνότητα ω_n. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, επομένως, περιοριζόμαστε στις θετικές συχνότητες. Βρίσκουμε λοιπόν τις δύο κανονικές συχνότητες, ω_1 και ω_2, και τους δύο αντίστοιχους λόγους πλατών,

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\omega_1^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{21}}{\omega_1^2 - c_{22}} \qquad \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{\omega_2^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{21}}{\omega_2^2 - c_{22}}\,.$$

Επομένως, αν η γενική λύση για την μετατόπιση της μάζας m_1 είναι η

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)\ ,$$

η κίνηση της m_2 θα δίνεται από τη σχέση

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = A_{11}\left(\frac{A_{21}}{A_{11}}\right)\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\left(\frac{A_{22}}{A_{12}}\right)\cos(\omega_2 t + \phi_2) \ .$$

Αν τα $A_{11},\ \phi_1,\ A_{12},\ \phi_2$ είναι γνωστά από την κίνηση της m_1, η κίνηση της m_2 είναι απολύτως καθορισμένη.

Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση της γενικής μεθόδου λύσης του συστήματος των εξισώσεων κίνησης, και τον προσδιορισμό των κανονικών συχνοτήτων και των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ενός συστήματος με πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Απώλειες ενέργειας θεωρούνται ότι δεν υπάρχουν.

Αν το πλήθος των ταλαντωτών είναι *N*, και οι θέσεις τους καθορίζονται από τις συντεταγμένες $x_k(t), \quad (k = 1, 2, 3, ..., N)$, οι εξισώσεις κίνησής τους ανάγονται στη μορφή:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1N}x_N = 0 \\ &\ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2N}x_N = 0 \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ddot{x}_N + c_{N1}x_1 + c_{N2}x_2 + ... + c_{NN}x_N = 0 \end{aligned} \qquad (7.15)$$

όπου οι συντελεστές $c_{kl} \quad (k = 1, 2, ..., N \quad l = 1, 2, ..., N)$ είναι σταθεροί.

Για κίνηση στον *n*–οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, οι μετατοπίσεις των μαζών δίνονται από τις σχέσεις

$$x_{1n} = A_{1n}\cos(\omega_n t + \phi_n) \qquad x_{2n} = A_{2n}\cos(\omega_n t + \phi_n) \quad ... \quad x_{Nn} = A_{Nn}\cos(\omega_n t + \phi_n) \qquad (7.16)$$

όπου A_{kn} είναι το πλάτος ταλάντωσης της *k*–οστής μάζας στον *n*–οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, ω_n η κανονική συχνότητα και ϕ_n η κοινή σταθερά φάσης για τον τρόπο και το συγκεκριμένο πρόβλημα. (Ισοδύναμα, και ίσως πιο συνοπτικά, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε $x_{kn} = A_{kn}e^{i\omega_n t}$, όπου οι συντελεστές A_{kn} θα ήταν μιγαδικοί αν υπάρχουν διαφορές φάσης ανάμεσα στις κινήσεις διαφόρων μαζών).

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε, αφού απλοποιήσουμε τον κοινό παράγοντα $\cos(\omega_n t + \phi_n)$, το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} &(c_{11} - \omega_n^2)A_{1n} + c_{12}A_{2n} + ... + c_{1N}A_{Nn} = 0 \\ &c_{21}A_{1n} + (c_{22} - \omega_n^2)A_{2n} + ... + c_{2N}A_{Nn} = 0 \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_{N1}A_{1n} + c_{N2}A_{2n} + ... + (c_{NN} - \omega_n^2)A_{Nn} = 0 \end{aligned} \qquad (7.17)$$

το οποίο έχει λύσεις αν η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται,

$$\begin{vmatrix} (c_{11} - \omega_n^2) & c_{12} & ... & c_{1N} \\ c_{21} & (c_{22} - \omega_n^2) & ... & c_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{N1} & c_{N2} & ... & (c_{NN} - \omega_n^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.18)$$

Αυτή είναι μια εξίσωση $N-$οστού βαθμού στο ω_n^2 και θα μας δώσει *N* θετικές τιμές για τις κανονικές συχνότητες, $\omega_n \ (n = 1, 2, ..., N)$.

Για κάθε κανονική συχνότητα, καθορίζεται και ο λόγος των πλατών των *N* μαζών. Αν επιλέξουμε να εκφράσουμε τα πλάτη συναρτήσει του πλάτους της πρώτης μάζας, βρίσκουμε τους λόγους A_{kn}/A_{1n} .

Η γενική λύση για την κάθε μια μάζα είναι μια επαλληλία N ανεξάρτητων κινήσεων στις N κανονικές συχνότητες του συστήματος. Για παράδειγμα, αν η κίνηση της πρώτης μάζας περιγράφεται από την εξίσωση

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1N} = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) + ... + A_{1N}\cos(\omega_N t + \phi_N) \qquad (7.19)$$

με καθορισμένες τις σταθερές $A_{11},\ \phi_1,\ A_{12},\ \phi_2, ...,\ A_{1N},\ \phi_N$, η κίνηση όλων των άλλων μαζών είναι απολύτως καθορισμένη, και δίνεται από τις εξισώσεις

$$x_k = A_{11}\left(\frac{A_{k1}}{A_{11}}\right)\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\left(\frac{A_{k2}}{A_{12}}\right)\cos(\omega_2 t + \phi_2) + ... + A_{1N}\left(\frac{A_{kN}}{A_{1N}}\right)\cos(\omega_N t + \phi_N) \qquad (7.20)$$

για $(k = 1, 2, ..., N)$.

Οποιοδήποτε μέγεθος μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σε μία μόνο από τις κανονικές συχνότητες του συστήματος, ονομάζεται *κανονική συντεταγμένη*. Οι κανονικές συντεταγμένες του συστήματος δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Είναι δυνατόν όμως να υπάρξουν μόνο N ανεξάρτητες μεταξύ τους κανονικές συντεταγμένες. Μια δυνατότητα είναι οι κανονικές συντεταγμένες να οριστούν ως

$$X_1 \equiv \cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad X_2 \equiv \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad ... \quad X_N \equiv \cos(\omega_N t + \phi_N)\ . \qquad (7.21)$$

Οι σχέσεις τους με τις συντεταγμένες $x_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, ..., N)$ βρίσκονται από τις N εξισώσεις

$$x_k = A_{k1}X_1 + A_{k2}X_2 + ... + A_{kN}X_N \qquad (k = 1, 2, ..., N)\ . \qquad (7.22)$$

Οι N αυτές εξισώσεις μπορούν να λυθούν για να δώσουν τις κανονικές συντεταγμένες ως

$$X_k = B_{k1}x_1 + B_{k2}x_2 + ... + B_{kN}x_N \qquad (k = 1, 2, ..., N)\ . \qquad (7.23)$$

όπου οι συντελεστές B είναι σταθεροί.

Παράδειγμα 7.2

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών ενός συστήματος μπορούν να γραφτούν, σε κατάλληλες μονάδες, στη μορφή

$$\ddot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \qquad \ddot{x}_2 = x_1 - 3x_2\ .$$

Να βρεθούν οι κανονικές συχνότητες του συστήματος, οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των δύο μαζών, και οι κανονικές συντεταγμένες του συστήματος.

Μπορούμε, αντί των συνημιτόνων, να δοκιμάσουμε τις λύσεις $x_{1n} = A_{1n}e^{i\omega_n t}$ και $x_{2n} = A_{2n}e^{i\omega_n t}$ για τις μετατοπίσεις των δύο μαζών στον n–οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, στην κανονική συχνότητα ω_n. Τότε,

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 A_{1n} &= -2A_{1n} + A_{2n} \\ -\omega_n^2 A_{2n} &= A_{1n} - 3A_{2n} \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{aligned} (\omega_n^2 - 2)A_{1n} + A_{2n} &= 0 \\ A_{1n} + (\omega_n^2 - 3)A_{2n} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{vmatrix} \omega_n^2 - 2 & 1 \\ 1 & \omega_n^2 - 3 \end{vmatrix} = 0$$

Η εξίσωση των συχνοτήτων είναι $\quad (\omega_n^2 - 2)(\omega_n^2 - 3) - 1 = 0 \quad$ ή $\quad \omega_n^4 - 5\omega_n^2 + 5 = 0$,

και οι κανονικές συχνότητες $\quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

Οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών βρίσκονται από τη σχέση $\quad \dfrac{A_{2n}}{A_{1n}} = 2 - \omega_n^2 = \dfrac{1}{3 - \omega_n^2}$

και είναι: $\quad \dfrac{A_{21}}{A_{11}} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \dfrac{A_{22}}{A_{12}} = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Αν η μετατόπιση της πρώτης μάζας είναι $\quad x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$, η μετατόπιση της δεύτερης μάζας θα είναι

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{\sqrt{5}+1}{2} A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \ .$$

Τα A_{11}, ϕ_1, A_{12}, ϕ_2 είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Αν θεωρήσουμε τις κανονικές συντεταγμένες ως

$$X_1 = \cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad X_2 = \cos(\omega_2 t + \phi_2) \ ,$$

θα είναι $\quad x_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \quad$ και $\quad x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} A_{11}X_1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} A_{12}X_2$

και οι $\quad X_1 = \frac{1}{A_{11}}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2\right) \qquad X_2 = \frac{1}{A_{12}}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}x_2\right)$

είναι αυτές οι κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των x_1 και x_2.

Εναλλακτικά, ορίζοντας ως κανονικές συντεταγμένες τις $X_1' = \sqrt{5}A_{11}X_1 \quad X_2' = \sqrt{5}A_{12}X_2$,

θα είναι $\quad X_1' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x_1 + x_2 \qquad X_2' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_1 - x_2 \ .$

Τότε θα είναι και $\quad X_1' = \sqrt{5}A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad X_2' = \sqrt{5}A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \ .$

Το σημαντικό χαρακτηριστικό μιας κανονικής συντεταγμένης είναι ότι μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σε μία μόνο κανονική συχνότητα, η οποία της αντιστοιχεί. Ο συντελεστής δεν είναι σημαντικός, και δεν είναι καν απαραίτητο οι κανονικές συντεταγμένες να έχουν όλες τις ίδιες διαστάσεις (μονάδες).

Αποδεικνύεται ότι η ολική ενέργεια του συστήματος δίνεται συναρτήσει των κανονικών συντεταγμένων και των πρώτων παραγώγων τους ως προς τον χρόνο από μια έκφραση της μορφής

$$E_{ολ} = \left(a_1 X_1^2 + b_1 \dot{X}_1^2\right) + \left(a_2 X_2^2 + b_2 \dot{X}_2^2\right) \ ,$$

δηλαδή από όρους δεύτερου βαθμού μόνο. Η ενέργεια ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη κανονική συντεταγμένη, δηλαδή δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ διαφορικών κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Αυτές τους οι ιδιότητες κάνουν τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις κανονικές συντεταγμένες τόσο σημαντικές.