5. Στερεό σώμα

Βιβλιογραφία

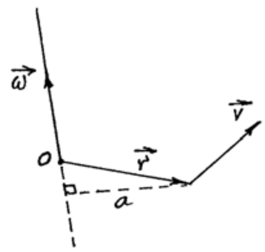
C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 8.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 9.

5.1 Γωνιακή ταχύτητα

Αν ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, το διάνυσμα της *γωνιακής του ταχύτητας* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ορίζεται έτσι ώστε ένα σημείο το οποίο έχει διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}$ ως προς ένα σημείο πάνω στον άξονα περιστροφής, να έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση:

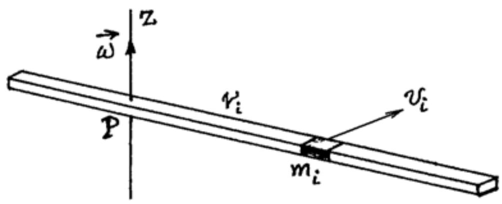
$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} \,. \tag{5.1}$$



Το μέτρο της ταχύτητας είναι ίσο με $\upsilon = \omega a$, όπου a είναι η απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής.

5.2 Η ροπή αδράνειας

Έστω μια πολύ λεπτή ράβδος μήκους *l* και μάζας *M*, η οποία περιστρέφεται με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από σταθερό άξονα Pz, που θεωρούμε ότι είναι κάθετος στη ράβδο στο σημείο P. Ένα στοιχείο μάζας της ράβδου, ίσο με m_i, που απέχει απόσταση r_i από τον άξονα περιστροφής, έχει ταχύτητα $\upsilon_i = \omega r_i$, και επομένως και κινητική ενέργεια



$$K_i = \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \,. \tag{5.2}$$

Η κινητική ενέργεια ολόκληρης της ράβδου βρίσκεται αθροίζοντας για όλες τις στοιχειώδεις μάζες από τις οποίες αυτή αποτελείται, και είναι

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2 \right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad \text{όπου} \quad I_z \equiv \sum_i m_i r_i^2 \,. \tag{5.3}$$

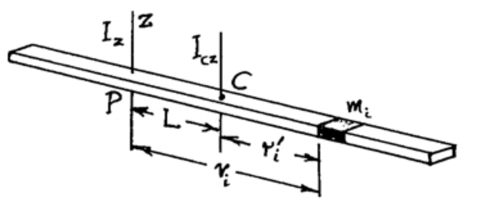
Η ποσότητα I_z ονομάζεται *ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονα* Pz. Είναι ένα σταθερό μέγεθος που εξαρτάται από τη γεωμετρική κατανομή της μάζας της ράβδου γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Στο όριο $m_i \to dm$, το άθροισμα στην Εξ. (5.3) μετατρέπεται στο ολοκλήρωμα $I_z = \int_{\text{σώμα}} r^2 dm$. Οι ροπές αδράνειας πολλών στερεών σωμάτων ως προς κάποιους χαρακτηριστικούς άξονες υπολογίζονται εύκολα με τη σχέση αυτή.

Πίνακας ροπών αδράνειας

Ομογενές σώμα μάζας M	**Άξονας**	**Ροπή αδράνειας**
Ράβδος μήκους L	Κάθετος στη ράβδο, στο κέντρο της	$\frac{1}{12}ML^2$
	Κάθετος στη ράβδο, στο ένα της άκρο	$\frac{1}{3}ML^2$
Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R	Κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου, στο κέντρο του	MR^2
	Μια διάμετρος του δακτυλίου	$\frac{1}{2}MR^2$
Κυκλικός δίσκος ακτίνας R	Κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, στο κέντρο του	$\frac{1}{2}MR^2$
	Μια διάμετρος του δίσκου	$\frac{1}{4}MR^2$
Συμπαγής σφαίρα ακτίνας R	Μια διάμετρος της σφαίρας	$\frac{2}{5}MR^2$
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R	Ο άξονας του κυλίνδρου	$\frac{1}{2}MR^2$
Λεπτότοιχος σωλήνας ακτίνας R	Ο άξονας του σωλήνα	MR^2

5.2.1 Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων



Για τη ράβδο και τον άξονα που εξετάζουμε, αν ο άξονας περιστροφής απέχει απόσταση L από το κέντρο μάζας C της ράβδου, θα έχουμε: $r_i = L + r'_i$, με το r'_i (θετικό ή αρνητικό) να δίνει τη θέση του στοιχείου μάζας m_i ως προς το κέντρο μάζας. Έτσι,

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (L^2 + 2Lr'_i + r'^2_i) = ML^2 + 2L\sum_i m_i r'_i + \sum_i m_i r'^2_i \qquad \text{όπου} \quad M = \sum_i m_i$$

είναι η ολική μάζα της ράβδου. Επίσης, από τον ορισμό του κέντρου μάζας είναι $\sum_i m_i r'_i = 0$, ενώ το μέγεθος $\sum_i m_i r'^2_i \equiv I_{cz}$ είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου για άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της ράβδου, C, και είναι παράλληλος προς τον άξονα Pz. Το αποτέλεσμα

$$I_z = I_{cz} + ML^2 \tag{5.4}$$

ισχύει γενικά για κάθε σώμα και άξονα, και είναι γνωστό ως *θεώρημα των παράλληλων αξόνων* ή *θεώρημα του Στάινερ* (Steiner).

5.2.2 Το θεώρημα των κάθετων αξόνων

Το θεώρημα αυτό ισχύει μόνο για λεπτές επίπεδες πλάκες. Η μαθηματική του μορφή είναι:

$$I_z = I_x + I_y \ . \tag{5.5}$$

Με λόγια: *Η ροπή αδράνειας λεπτής επίπεδης πλάκας ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν, είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς δύο οποιουσδήποτε κάθετους μεταξύ τους άξονες που βρίσκονται στο επίπεδο της πλάκας και τέμνουν τον κάθετο άξονα.*

5.3 Θεωρήματα για την κινητική ενέργεια και τη στροφορμή περιστρεφόμενου στερεού

Η κινητική ενέργεια στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω δίνεται από

$$K = \tfrac{1}{2} I_z \omega^2 \tag{5.6}$$

όπου I_z είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής, z.

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος των παράλληλων αξόνων, βρίσκουμε:

$$K = \tfrac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \tfrac{1}{2} M V^2 \tag{5.7}$$

ή ότι: *η κινητική ενέργεια ενός περιστρεφόμενου σώματος, είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας που οφείλεται στην περιστροφή του σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του,* $\tfrac{1}{2} I_{cz} \omega^2$, *και της κινητικής ενέργειας μιας σημειακής μάζας ίσης με την ολική μάζα M του σώματος, η οποία κινείται με την ταχύτητα V του κέντρου μάζας του,* $\tfrac{1}{2} M V^2$.

Το αντίστοιχο θεώρημα για τη στροφορμή του σώματος είναι:

$$\vec{\mathbf{L}} = I_{cz} \omega \,\hat{\mathbf{z}} + M\, \vec{\mathbf{r}}_c \times \vec{\mathbf{V}}\,. \tag{5.8}$$

ή ότι: *η στροφορμή ενός σώματος ως προς οποιοδήποτε σημείο, είναι ίση με το άθροισμα της στροφορμής του ως προς το κέντρο μάζας του,* $I_{cz}\omega\hat{\mathbf{z}}$, *και της στροφορμής μιας σημειακής μάζας ίσης με την ολική μάζα M του σώματος, η οποία βρίσκεται στο κέντρο μάζας του σώματος και κινείται με την ταχύτητα* $\vec{\mathbf{V}}$ *του κέντρου μάζας του,* $M\,\vec{\mathbf{r}}_c \times \vec{\mathbf{V}}$.

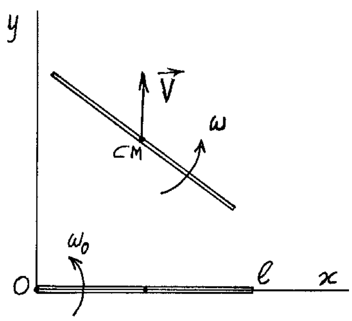
5.4 Περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα

Στις περιπτώσεις αυτές, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ανάμεσα στη στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής και τη ροπή των δυνάμεων ως προς τον ίδιο άξονα. Για τον άξονα a:

$$K_a = \tfrac{1}{2} I_a \omega^2 \qquad L_a = I_a \omega \qquad I_a \frac{d\omega}{dt} = N_a\,. \tag{5.9}$$

Παράδειγμα 1

Μια ομοιογενής ράβδος μάζας M και μήκους ℓ, περιστρέφεται πάνω στο λείο και οριζόντιο επίπεδο (x, y) γύρω από τον άξονα z, ο οποίος περνά από το άκρο Ο της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι ω_0. Σε κάποια στιγμή, όταν η ράβδος συμπίπτει με τον άξονα των x, ο άξονας περιστροφής «εξαφανίζεται» και η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί στο επίπεδο (x, y), χωρίς να υφίσταται εξωτερικές δυνάμεις.



Μετά από αυτό το συμβάν, να βρεθούν:

(α) Η ταχύτητα $\vec{\mathbf{V}}_{CM}$ του κέντρου μάζας της ράβδου.

(β) Η γωνιακή ταχύτητα ω της περιστροφής της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της.

(γ) Η ενέργεια E_0 της ράβδου πριν εξαφανιστεί ο άξονας περιστροφής z, και η ενέργειά της, E, μετά. Διατηρείται η ενέργεια;

(α) Τη στιγμή της απελευθέρωσης της ράβδου, το κέντρο μάζας της (C.M.) έχει ταχύτητα

$$\vec{\mathbf{V}}_0 = \tfrac{1}{2} \ell \omega_0 \hat{\mathbf{y}}\,.$$

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις πάνω στη ράβδο, αυτή θα παραμείνει η ταχύτητα του C.M.

$$\vec{\mathbf{V}}_{CM} = \vec{\mathbf{V}}_0 = \tfrac{1}{2}\ell\omega_0\hat{\mathbf{y}}\,.$$

(β) Η στροφορμή της ράβδου ως προς το O είναι αρχικά

$$\vec{\mathbf{L}}_O = I_O\vec{\boldsymbol{\omega}}_0 = I_O\omega_0\hat{\mathbf{z}} \qquad \vec{\mathbf{L}}_O = \tfrac{1}{3}M\ell^2\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}\,,$$

και επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές στη ράβδο, αυτή θα παραμείνει σταθερή.
Όμως,

$$\vec{\mathbf{L}}_O = \vec{\mathbf{L}}_C + M\,\vec{\mathbf{R}}_{CM}\times\vec{\mathbf{V}}_{CM}\,.$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν την εξίσωση

$$\vec{\mathbf{L}}_O = \tfrac{1}{3}M\ell^2\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}\,,\qquad \vec{\mathbf{L}}_C = I_C\omega\,\hat{\mathbf{z}}\,,\qquad \vec{\mathbf{R}}_{CM} = \tfrac{1}{2}\ell\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\ell\omega_0 t\hat{\mathbf{y}} \qquad \text{και} \qquad \vec{\mathbf{V}}_{CM} = \tfrac{1}{2}\ell\omega_0\hat{\mathbf{y}}\,,$$

έχουμε

$$\tfrac{1}{3}M\ell^2\omega_0\hat{\mathbf{z}} = I_C\omega\,\hat{\mathbf{z}} + M\,(\tfrac{1}{2}\ell\,\hat{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\ell\omega_0 t\hat{\mathbf{y}})\times(\tfrac{1}{2}\ell\omega_0\hat{\mathbf{y}})$$

ή

$$\tfrac{1}{3}M\ell^2\omega_0\hat{\mathbf{z}} = I_C\omega\,\hat{\mathbf{z}} + \tfrac{1}{4}M\ell^2\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}\,.$$

Επομένως, $\omega = \dfrac{\frac{1}{12}M\ell^2}{I_C}\omega_0\,,$ και $\omega = \omega_0$.

(γ) Αρχική ενέργεια: $E_0 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \tfrac{1}{6}M\ell^2\omega_0^2$.

Τελική ενέργεια: $E = \tfrac{1}{2}MV_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 = \tfrac{1}{2}M(\tfrac{1}{2}\ell\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12}M\ell^2)\omega_0^2$

$$E = (\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24})M\ell^2\omega_0^2\,, \qquad E = \tfrac{1}{6}M\ell^2\omega_0^2 = E_0$$

και επομένως η ενέργεια διατηρείται.

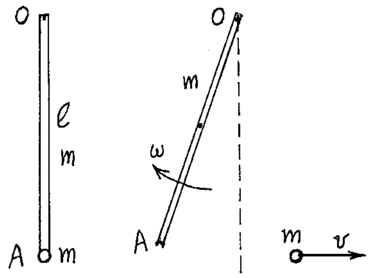
Παράδειγμα 2

Λεπτή ομοιογενής ράβδος έχει μήκος ℓ και μάζα m. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο. Ο άξονας είναι κάθετος στη ράβδο, και περνά από το ένα της άκρο Ο. Μια σημειακή μάζα m είναι στερεωμένη στο ελεύθερο άκρο της ράβδου.

Σε κάποια στιγμή, η σημειακή μάζα εκτοξεύεται, με τη βοήθεια εσωτερικών δυνάμεων, και κινείται με ταχύτητα υ σε κατεύθυνση κάθετη στην αρχική κατεύθυνση της ράβδου.

(α) Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την εκτόξευση;

(β) Πόση ενέργεια απαιτείται για τη διαδικασία;



(α) Εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται μόνο από τον άξονα Ο. Επομένως, η ροπή τους ως προς τον άξονα αυτό είναι ίση με μηδέν, και η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα Ο διατηρείται.

Επειδή αρχικά είναι $\vec{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$, θα εξακολουθήσει να είναι $\vec{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0}$.

Μετά την εκτόξευση,

Στροφορμή της μάζας m ως προς το Ο: $L_m = \ell m\upsilon$ (την οποία θεωρούμε θετική).

Στροφορμή της ράβδου ως προς το Ο: $L_\rho = -I_O\omega$ (για ω όπως στο σχήμα).

Επομένως, $I_O\omega = \ell m\upsilon$ και $\omega = \dfrac{\ell m\upsilon}{I_O} = \dfrac{\ell m\upsilon}{\frac{1}{3}m\ell^2}$ ή $\omega = 3\dfrac{\upsilon}{\ell}$.

(β) Ενέργεια της μάζας m: $E_m = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Ενέργεια της ράβδου: $E_\rho = \frac{1}{2}I_O\omega^2$ ή $E_\rho = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}m\ell^2\right)\left(3\dfrac{\upsilon}{\ell}\right)^2 = \dfrac{3}{2}m\upsilon^2$.

Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι επομένως ίση με:

$$E = E_m + E_\rho = 2m\upsilon^2.$$

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. Μηχανική: Κεφ. 8, Ασκ. 1, 7, 9.

5.1 Μια λεπτή πλάκα έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, με πλευρές ίσες με 2α. Η επιφανειακή πυκνότητα του υλικού της πλάκας είναι ίση με $\sigma = \kappa x$, όπου κ είναι μια σταθερά και x η απόσταση από τη βάση του τριγώνου, ΒΓ. Δείξτε ότι:

(α) Η μάζα του τριγώνου είναι $M = \kappa\alpha^3$.

(β) Η ροπή αδράνειας του τριγώνου ως προς άξονα την πλευρά ΒΓ είναι ίση με $I = \frac{9}{10}M\alpha^2$.

(γ) Η ροπή αδράνειας του τριγώνου ως προς άξονα την πλευρά ΑΒ είναι ίση με $I = \frac{3}{10}M\alpha^2$.

5.2 Η μάζα ενός γαλαξία μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κατανεμημένη σε ένα επίπεδο, με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφανειακή πυκνότητα μάζας να είναι $\sigma = \kappa \mathrm{e}^{-r^2/\alpha^2}$, όπου κ και α είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση από το κέντρο του γαλαξία. Δείξτε ότι:

(α) Η μάζα του γαλαξία είναι $M = \pi\kappa\alpha^2$.

(β) Η ροπή αδράνειας του γαλαξία ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του είναι ίση με $I_z = M\alpha^2$. (Δίνεται: $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$. Αντικαταστήστε $x = r^2/\alpha^2$).

5.3 Λεπτή πλάκα βρίσκεται στο επίπεδο xy και έχει ελλειπτικό σχήμα, με όρια που δίνονται από την εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές. Η επιφανειακή πυκνότητα μάζας της πλάκας είναι σταθερή και ίση με σ. Βρείτε τις ροπές αδράνειας της πλάκας ως προς τους άξονες x, y και z.

(Δίνονται: Εμβαδόν έλλειψης $S = \pi\alpha b$. $\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{16}$, και $\int_0^1 (1-u^2)^{3/2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{3\pi}{16}$).

Απ.: $I_x = \frac{1}{4}Mb^2$, $I_y = \frac{1}{4}M\alpha^2$, $I_z = \frac{1}{4}M\left(\alpha^2 + b^2\right)$.

5.4 Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ κρατείται αρχικά κατακόρυφη πάνω σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο δάπεδο και κατόπιν αφήνεται να περιστραφεί γύρω από το άκρο της που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο.

(α) Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ολίσθηση, βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση α και τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συναρτήσεις της γωνίας θ που αυτή σχηματίζει με την κατακόρυφο. Υπενθυμίζεται ότι $\alpha = \ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$.

(β) Εξετάζοντας την κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου, βρείτε τις συνιστώσες (οριζόντια και κατακόρυφη) της δύναμης που ασκείται από το δάπεδο πάνω στη ράβδο και έτσι και την κάθετη αντίδραση N του δαπέδου πάνω στη ράβδο ως συνάρτηση της θ.

Υπόδειξη: Η κεντρομόλος επιτάχυνση του κέντρου μάζας προς το σημείο επαφής ράβδου και δαπέδου είναι $l\omega^2$, και η εγκάρσια συνιστώσα $l\alpha$.

Απ.: (α) $\alpha = \dfrac{3g}{4l}\sin\theta, \quad \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}(1-\cos\theta)}$, (β) $N = \dfrac{mg}{4}(1-3\cos\theta)^2$,

5.5 Δύο κυκλικοί δίσκοι με μάζες M_1 και M_2 και ακτίνα R, περιστρέφονται γύρω από κοινό άξονα κάθετο στο επίπεδο των δίσκων και που περνά από τα κέντρα τους. Οι γωνιακές ταχύτητες των δίσκων είναι ω_1 και ω_2, και οι στροφορμές τους L_1 και L_2, αντίστοιχα. Οι δίσκοι έρχονται και παραμένουν σε επαφή. Τι θα συμβεί ως προς την κίνησή τους; Ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων και ποια η τελική απώλεια ενέργειας ΔE;

Απ.: $\omega = \dfrac{\omega_1 M_1 + \omega_2 M_2}{M_1 + M_2}, \quad \Delta E = \dfrac{1}{4}\dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} R^2 (\omega_2 - \omega_1)^2$.

5.6 Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα ΑΒ που συμπίπτει με μια από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^0 με τον τοίχο. Μία σφαίρα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της πόρτας. Η σφαίρα σφηνώνεται στην πόρτα σε απόσταση a από τον άξονα.

(α) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα ΑΒ. Η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της είναι $I_0 = \frac{1}{6}Ma^2$.

(β) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από τη στιγμή που θα χτυπηθεί από τη σφαίρα;

(γ) Ποιο κλάσμα της ενέργειας της σφαίρας χάνεται όταν αυτή σφηνωθεί στην πόρτα;

Απ.: (α) $I = \left(\dfrac{M}{3} + m\right)\alpha^2$, (β) $t = \dfrac{\pi\alpha}{2\upsilon}\left(1 + \dfrac{M}{3m}\right)$, (γ) $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{M}{M+3m}$.

5.7 Δίνεται κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M, ομοιόμορφα κατανεμημένης. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα του δίσκου αρχίζει να αυξάνει γραμμικά με το χρόνο με ρυθμό $a = dM/dt$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει ομοιόμορφα και κάθετα στο επίπεδο του δίσκου με αμελητέα ταχύτητα. Η αύξηση της μάζας κατανέμεται ομοιόμορφα σε κάθε σημείο του δίσκου. Να διατυπωθεί και να λυθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου και να βρεθεί έτσι η γωνιακή του ταχύτητα $\omega(t)$.

Απ.: $(M_0 + at)\dfrac{d\omega}{dt} + a\omega = 0, \quad \omega(t) = \dfrac{\omega_0 M_0}{M_0 + at}$.

5.8 Δύο μάζες, m_1 και m_2 $(m_2 > m_1)$, είναι δεμένες αντίστοιχα στα δύο άκρα ενός μη εκτατού νήματος αμελητέας μάζας, το οποίο είναι περασμένο πάνω από μια τροχαλία. Η τροχαλία είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M , που μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στις επίπεδες επιφάνειές του. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας γύρω από τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι μάζες αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν. Καθώς η τροχαλία περιστρέφεται, το νήμα που εφάπτεται της τροχαλίας δεν γλιστρά ως προς αυτήν, τα δε ελεύθερα τμήματά του είναι κατακόρυφα. Μελετήστε την κίνηση του συστήματος: υποθέτοντας τάσεις T_1 και T_2 στα δύο τμήματα του νήματος, στα οποία είναι συνδεδεμένες οι μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, και εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις δύο μάζες και τις ροπές που ασκούνται πάνω στην τροχαλία, διατυπώστε τις εξισώσεις κίνησης των τριών αυτών σωμάτων. Λύστε τις εξισώσεις αυτές για να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω της τροχαλίας, τη γωνία $\theta(t)$ κατά την οποία έχει περιστραφεί σε χρόνο t , καθώς επίσης και την ταχύτητα της μάζας m_1 και τη μετατόπισή της από την αρχική της θέση $y(t)$. Βρείτε επίσης τη δύναμη T_1 που ασκεί το νήμα πάνω στη μάζα m_1.

Απ.: Αν $\lambda \equiv \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}$, τότε είναι: $\omega = \lambda \dfrac{g}{R} t$, $\theta = \dfrac{\lambda g}{2R} t^2$,

$\upsilon_1 = \lambda g t$, $y_1 = \dfrac{\lambda}{2} g t^2$, $T_1 = (1 + \lambda) m_1 g$.

5.9 Ένας ομογενής κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας m, μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς του και είναι κάθετος στις επίπεδες επιφάνειές του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου γύρω από τον άξονα αυτόν είναι $I = \frac{3}{2} m R^2$. Μια σημειακή μάζα m είναι προσκολλημένη σε ένα σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου, διαμετρικά αντίθετο του σημείου Ο. Αρχικά η σημειακή μάζα βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το σημείο Ο και το σύστημα είναι ακίνητο, όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

(α) Δείξετε ότι, όταν ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, η γωνιακή του ταχύτητα $\dot{\theta}$ ικανοποιεί τη σχέση: $11 R \dot{\theta}^2 = 12 g (1 - \cos\theta)$.

(β) Βρείτε την ακτινική συνιστώσα της δύναμης που ασκείται πάνω στη σημειακή μάζα, $m 2 R \dot{\theta}^2$ (προς το σημείο Ο), και την εγκάρσιά της συνιστώσα $m 2 R \ddot{\theta}$ (κάθετη στην ευθεία ΟΑ) όταν η γωνία περιστροφής είναι $\theta = \pi$. Λαμβάνοντας υπόψη το βάρος της σημειακής μάζας δείξετε ότι η δύναμη που ασκείται πάνω στη σημειακή μάζα από το δίσκο όταν $\theta = \pi$, είναι ίση με $\dfrac{59}{11} mg$ (προς τα πάνω).

5.10 Σπουδαστής μάζας M στέκεται στο κέντρο ενός περιστρεφόμενου σκαμνιού, με τεντωμένους οριζόντια τους βραχίονές του, κρατώντας σε κάθε χέρι μια μικρή σφαίρα μάζας m. Η απόσταση κάθε σφαίρας από τον άξονα περιστροφής είναι r_1 ενώ η ροπή αδράνειας του σπουδαστή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι MR^2. Η συχνότητα περιστροφής του σπουδαστή είναι ν στροφές/μονάδα χρόνου. Κάποια στιγμή, ο σπουδαστής συμπτύσσει τα χέρια του, οπότε η κάθε σφαίρα απέχει απόσταση r_2 από τον άξονα περιστροφής. Βρείτε:

(α) Τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο σπουδαστής μετά τη σύμπτυξη των χεριών του.

(β) Το έργο που παράγει ο σπουδαστής κατά τη σύμπτυξη αυτή (όλες οι τριβές θεωρούνται αμελητέες).

(γ) Εφαρμογή: Υπολογίστε τα μεγέθη των ερωτημάτων (α) και (β), αν M = 70 kg, m = 4 kg, r_1 = 0,75 m, R = 0,15 m και ν = 0,5 στροφή/s.