3. Διατήρηση της ενέργειας

Βιβλιογραφία

C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz και B. J. Moyer, *Μηχανική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998. Κεφ. 5.

M. R. Spiegel, *Θεωρητική Μηχανική*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1985. Κεφ. 2.

{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M5 Το αόριστο ολοκλήρωμα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M7 Λύση απλών διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων κίνησης*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M8 Η μερική παράγωγος*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M9 Βαθμίδα, Απόκλιση, Στροβιλισμός*}
{Μαθηματικό Συμπλήρωμα *M10 Ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων*}

3.1 Νόμοι διατήρησης στο φυσικό κόσμο

Οι *νόμοι διατήρησης* εκφράζουν το ότι κάποια φυσικά μεγέθη, όταν ισχύουν ορισμένες προϋποθέσεις, διατηρούνται και εκφράζουν συνήθως κάποια βαθύτερη συμμετρία στη φύση. Παραδείγματα : διατήρηση της ορμής , της ενέργειας, του φορτίου, και άλλων μεγεθών (βλ. C. Kittel κ.ά. *Μηχανική*, Κεφ. 5).

3.2 Ορισμοί εννοιών

Ο *νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας* αναφέρεται στις έννοιες της *κινητικής ενέργειας*, της *δυναμικής ενέργειας* και του *έργου*. Οι έννοιες αυτές προκύπτουν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Θα αναπτυχθούν αρχικά σε προβλήματα που αφορούν δυνάμεις και κινήσεις σε μία διάσταση και στη συνέχεια θα διατυπωθούν για τις τρεις διαστάσεις.

Έστω ένα σωματίδιο μάζας *M*, αρχικά ελεύθερο, στο οποίο τη στιγμή $t=0$ ασκείται μια δύναμη *F* σταθερή κατά μέτρο και με κατεύθυνση η οποία συμπίπτει με τον άξονα *y*. Για την κίνησή του για $t>0$ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$F = M\frac{d^2y}{dt^2} = M\,\ddot{y}\,. \tag{3.1}$$

Άρα για την ταχύτητα έχουμε:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t \frac{d\upsilon}{dt}dt = \int_0^t \ddot{y}\,dt = \int_0^t \frac{F}{M}dt \tag{3.2}$$

ή

$$\upsilon - \upsilon_0 = \frac{F}{M}t \tag{3.3}$$

όπου υ_0 είναι η αρχική ταχύτητα, που υποθέσαμε ότι έχει την κατεύθυνση του άξονα y.

3.2.1 Ώθηση και Ορμή

Η Εξ. (3.3) μπορεί να γραφτεί και ως

$$Ft = M\upsilon(t) - M\upsilon_0 \tag{3.4}$$

Η ποσότητα $M\upsilon$ ορίζεται ως *ορμή* του σωματιδίου και η ποσότητα Ft ως *ώθηση* της δύναμης στο χρονικό διάστημα t. Γενικά, όταν η δύναμη μεταβάλλεται με τον χρόνο:

$$\text{Ώθηση} = \int_0^t F dt = \Delta(M\upsilon)\,. \tag{3.5}$$

Δηλαδή, η ώθηση της δύναμης για το χρονικό διάστημα t ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο ίδιο χρονικό διάστημα.

3.2.2 Κινητική ενέργεια και Έργο

Αν η αρχική θέση είναι y_0, ολοκληρώνοντας την Εξ. (3.3) ως προς το χρόνο, έχουμε:

$$y(t) - y_0 = \int_0^t \upsilon(t)dt = \int_0^t \left(\upsilon_0 + \frac{F}{M}t\right)dt = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2 . \qquad (3.6)$$

Αν σε αυτή την εξίσωση αντικατασταθεί ο χρόνος t όπως προκύπτει από την Εξ. (3.3), έχουμε:

$$y - y_0 = \frac{M}{F}\left(\upsilon\upsilon_0 - \upsilon_0^2\right) + \frac{1}{2}\frac{M}{F}\left(\upsilon^2 - 2\upsilon\upsilon_0 + \upsilon_0^2\right) = \frac{1}{2}\frac{M}{F}\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right) \qquad (3.7)$$

ή

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 = F\left(y - y_0\right). \qquad (3.8)$$

Η ποσότητα $K = \frac{1}{2}M\upsilon^2$ ορίζεται ως η *κινητική ενέργεια* του σωματιδίου και η ποσότητα $W = F(y - y_0)$ ως το *έργο που παράγεται πάνω στο σωματίδιο από την ασκούμενη δύναμη.* Οπότε, σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, το έργο που παράγει η ασκούμενη δύναμη ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου. Πρόκειται για ορισμούς που είναι χρήσιμοι και πηγάζουν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
Όταν αναφέρεται έργο πρέπει πάντα να καθορίζεται ο φορέας που το παράγει.

3.2.3 Δυναμική ενέργεια

Αν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που το αφήνουμε από ένα ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης $(y_0 = h, \upsilon_0 = 0)$, η δύναμη της βαρύτητας $F_B = -Mg$ έλκει το σωματίδιο προς τα κάτω. Καθώς το σωματίδιο κινείται προς την επιφάνεια της Γης, το έργο που παράγεται από τη δύναμη της βαρύτητας ισούται με την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου:

$$W \text{ (από τη βαρύτητα)} = F_B\left(y - y_0\right) \qquad (3.9)$$

ή, στην επιφάνεια της Γης $(y = 0)$:

$$W \text{ (από τη βαρύτητα)} = \left(-Mg\right)\left(0 - h\right) = Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}M\upsilon^2 \qquad (3.10)$$

όπου υ η ταχύτητα του σωματιδίου όταν φτάνει στην επιφάνεια της Γης.

Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, μπορούμε να πούμε ότι το σωματίδιο σε ύψος h έχει *δυναμική ενέργεια* (ικανότητα να παράγει έργο ή να αυξήσει την κινητική του ενέργεια) ίση με Mgh ως προς την επιφάνεια της Γης, δηλ.

$$U(h) = Mgh . \qquad (3.11)$$

Αν ένα σωματίδιο, που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία στην επιφάνεια της Γης, υψώνεται σε ύψος h, για τη δυναμική του ενέργεια ισχύουν τα εξής: Για να υψώσουμε το σωματίδιο πρέπει να ασκήσουμε σε αυτό μια δύναμη $F_{εμεις}(= -F_B)$, δηλ. με φορά προς τα πάνω. Οπότε με $y_0 = 0$ και $y = h$ το έργο που παράγεται *από εμάς* είναι:

$$W \text{ (από εμάς)} = F_{εμείς}\left(y - y_0\right) = \left(Mg\right)\left(h\right) = Mgh \qquad (3.12)$$

Εδώ πρέπει να διευκρινισθεί ότι χρησιμοποιώντας το “τέχνασμα” δύναμη $F_{εμεις}(= -F_B)$, ως εξωτερικό φορέα δύναμης, εξασφαλίζεται η κίνηση του σωματιδίου χωρίς επιτάχυνση δηλαδή χωρίς μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, και κατά συνέπεια μεταβιβάζουμε στο σωματίδιο έργο Mgh ίσο με τη δυναμική ενέργειά του στο ύψος h.

Αγνοώντας τις δυνάμεις τριβής, ένας κατ' αρχήν ορισμός της δυναμικής ενέργειας είναι ο εξής:

Δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου, σε ένα σημείο είναι το έργο που καταβάλλουμε για να κινήσουμε το σωματίδιο, χωρίς επιτάχυνση, από μια αρχική θέση στην οποία αποδίδουμε αυθαίρετα στο σωματίδιο μηδενική δυναμική ενέργεια, μέχρι το σημείο που μας ενδιαφέρει.

Στο παράδειγμα η *εξωτερική δύναμη* εξουδετερώνει τη *δύναμη του πεδίου*. Γι' αυτό μπορούμε να ορίσουμε τη δυναμική ενέργεια σαν το έργο που παράγουν οι δυνάμεις του πεδίου, κινώντας το σωματίδιο προς την αντίθετη κατεύθυνση από το σημείο που θεωρούμε ως τη θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Η θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι αυθαίρετη, φυσική σημασία έχουν μόνον οι διαφορές δυναμικής ενέργειας.

3.2.4 Ενέργεια, διατήρηση της ενέργειας

Αν κατά την ελεύθερη πτώση ενός σωματιδίου από ύψος h, υ είναι η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε ύψος y, μετά από πτώση κατά $(h-y)$, τότε θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}M\upsilon^2 = Mg(h-y) \qquad \text{ή} \qquad \frac{1}{2}M\upsilon^2 + Mgy = Mgh = E \tag{3.13}$$

όπου η ποσότητα E είναι μια σταθερά της κίνησης . Ορίζοντας την E ως την *ολική ενέργεια,* η προηγούμενη σχέση εκφράζει το *νόμο διατήρησης της ενέργειας:*

$$E = K + U = (\text{Κινητική ενέργεια}) + (\text{Δυναμική ενέργεια}) = (\text{Ολική ενέργεια}) = \text{σταθερή} \tag{3.14}$$

Γενικεύοντας, για ένα σύστημα σωματιδίων τα οποία αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που δεν εξαρτώνται από το χρόνο, ο νόμος διατήρησης της ενέργειας μας λέει ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση των θέσεων και των ταχυτήτων των σωματιδίων του συστήματος, που είναι αναλλοίωτη ως προς το χρόνο.

Αν επιλέξουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στη στάθμη $y=-H$, τότε:

$$E' = K + U = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + Mg(y+H) = Mg(h+H) \tag{3.15}$$

δηλαδή, έχει προστεθεί σε κάθε μέλος η σταθερή ποσότητα MgH .

Για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης ενέργειας βλ. '*Μηχανική'*, Κεφ. 5.

3.3 Διατύπωση για τις τρεις διαστάσεις

Θα προχωρήσουμε γενικεύοντας τον ορισμό των ενεργειακών μεγεθών διατυπώνοντάς τα σε τρεις διαστάσεις.

3.3.1 Έργο

Το έργο W που παράγεται από μια σταθερή ασκούμενη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ για μια μετατόπιση $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ είναι

$$W = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} = F\,\Delta r\cos\left(\vec{\mathbf{F}},\Delta\vec{\mathbf{r}}\right) \tag{3.16}$$

Αν η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ δεν είναι σταθερή, αλλά συνάρτηση της θέσης $\vec{\mathbf{r}}$, τότε, για τον υπολογισμό του έργου κατά μήκος μιας διαδρομής, αναλύουμε τη διαδρομή σε N ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε για καθένα από αυτά η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ να είναι πρακτικά σταθερή, οπότε το έργο θα είναι :

$$W = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_1)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_2)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_N)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_N = \sum_{j=1}^{N}\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_j)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_j \tag{3.17}$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το σύμβολο της άθροισης.

Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνον κατά προσέγγιση, αυστηρά ισχύει μόνο για απειροστές μεταβολές $d\vec{\mathbf{r}}$. Το όριο

$$\lim_{\Delta\vec{\mathbf{r}}_j\to 0}\sum_{j=1}^{N}\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_j)\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}_j = \int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}_B}\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad (3.18)$$

είναι το ολοκλήρωμα, ως προς τη μετατόπιση, της προβολής της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ κατά μήκος του διανύσματος της μετατόπισης $d\vec{\mathbf{r}}$. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται *γραμμικό ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ κατά μήκος μιας δεδομένης διαδρομής από το A ως το B. Τελικά το έργο που παράγεται από τη δύναμη κατά τη μετατόπιση AB ορίζεται από τη σχέση:

$$W(A\to B)\equiv\int_A^B\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} \qquad (3.19)$$

όπου τα όρια A και B αντιστοιχούν στις θέσεις $\vec{\mathbf{r}}_A$ και $\vec{\mathbf{r}}_B$. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θα είναι $d\vec{\mathbf{r}} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$ οπότε:

$$\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \left|\vec{\mathbf{F}}\right|\left|d\vec{\mathbf{r}}\right|\cos\theta \qquad (3.20)$$

με θ η γωνία μεταξύ $\vec{\mathbf{F}}$ και $d\vec{\mathbf{r}}$. (Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και παραδείγματα βλ. το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ10*).

3.3.2 Κινητική Ενέργεια

Για ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας M στο οποίο ασκείται δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα είναι:

$$\vec{\mathbf{F}} = M\, d\vec{\mathbf{v}}/dt \qquad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας τη δύναμη στο ολοκλήρωμα της προηγούμενης παραγράφου που δίνει το έργο της δύναμης θα έχουμε

$$W(A\to B) = M\int_A^B\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\cdot d\vec{\mathbf{r}}\,. \qquad (3.22)$$

Αλλά

$$d\vec{\mathbf{r}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}dt = \vec{\mathbf{v}}\,dt \qquad (3.23)$$

άρα

$$W(A\to B) = M\int_A^B\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt \qquad (3.24)$$

όπου τα όρια A και B θα είναι τώρα οι αντίστοιχοι χρόνοι t_A και t_B. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να γραφεί διαφορετικά, αφού:

$$\frac{d}{dt}\upsilon^2 = \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right) = 2\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\cdot\vec{\mathbf{v}} \qquad (3.25)$$

$$2\int_A^B\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt = \int_A^B\left(\frac{d}{dt}\upsilon^2\right)dt = \int_A^B d(\upsilon^2) = \upsilon_B^2 - \upsilon_A^2\,. \qquad (3.26)$$

Μετά την αντικατάσταση προκύπτει:

$$W(A\to B) = \int_A^B\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = \tfrac{1}{2}M\upsilon_B^2 - \tfrac{1}{2}M\upsilon_A^2 \qquad (3.27)$$

Επειδή έχουμε ήδη ορίσει την ποσότητα

$$K\equiv\tfrac{1}{2}M\upsilon^2 \qquad (3.28)$$

ως την κινητική ενέργεια του σωματιδίου, καταλήγουμε στο ότι:

το έργο που παράγεται από μια δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα ελεύθερο σωματίδιο, είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου:

$$W(A \to B) = K_B - K_A \,. \tag{3.29}$$

3.3.3 Δυναμική ενέργεια

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, μόνο οι *διαφορές* δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία. Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε ήδη, σε ένα χώρο που επικρατεί μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$, όπου $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ είναι *η δύναμη του πεδίου ή η δύναμη του συστήματος*:

Η διαφορά δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μεταξύ δύο σημείων A και B είναι το έργο που εμείς παράγουμε για να κινήσουμε το σώμα χωρίς επιτάχυνση από το A στο B:

$$U(\vec{\mathbf{r}}_B) - U(\vec{\mathbf{r}}_A) = W_{\text{εμείς}}(A \to B) = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{\text{εμείς}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \tag{3.30}$$

με $\vec{\mathbf{F}}_{εμείς} = -\vec{\mathbf{F}}$.

Αν η διαφορά είναι θετική, τότε παράγουμε έργο υπερνικώντας τις δυνάμεις του πεδίου, η δυναμική ενέργεια αυξάνεται, ενώ αν αντιθέτως η διαφορά είναι αρνητική, το έργο παράγεται από τις δυνάμεις του πεδίου, η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. Αν δεχτούμε ότι $U(\vec{\mathbf{r}}_A) = 0$, τότε η τιμή $U(\vec{\mathbf{r}}_B) = U(B)$ της δυναμικής ενέργειας στο σημείο *B* μπορεί να είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν η δύναμη του πεδίου είναι διατηρητική (όπως θα δούμε στη συνέχεια).

3.4 Διατηρητικές δυνάμεις

Μια δύναμη είναι *διατηρητική*, αν το έργο $W(A \to B)$ που παράγεται από τη δύναμη η οποία, ασκούμενη σε ένα σωματίδιο, μετακινεί το σωματίδιο από ένα σημείο *A* σε ένα σημείο *B*, είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή του σωματιδίου μεταξύ των σημείων *A* και *B* και εξαρτάται μόνον από τα σημεία *A* και *B*.

Υποθέτοντας ότι το ολοκλήρωμα $\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, έχουμε:

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = -\int_B^A \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \tag{3.31}$$

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} + \int_B^A \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.32}$$

$$\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.33}$$

Το σύμβολο $\oint$ σημαίνει το *επικαμπύλιο* ολοκλήρωμα κατά μήκος ενός κλειστού δρόμου. Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, το έργο μιας διατηρητικής δύναμης κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι ίσο με μηδέν.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι *κάθε κεντρική δύναμη* [δηλαδή της μορφής $\vec{\mathbf{F}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$] *είναι διατηρητική* (βλ. *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ10*).

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις και οι δυνάμεις βαρύτητας καθώς και όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις είναι διατηρητικές. Οι δυνάμεις τριβής, δεν είναι θεμελιώδεις δυνάμεις και δεν είναι διατηρητικές. Για το θέμα των διατηρητικών και μη δυνάμεων βλ. *Μηχανική* Κεφ. 5.

Για τις διατηρητικές δυνάμεις μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα η δυναμική ενέργεια σε ένα σημείο, σε σχέση πάντοτε με ένα σημείο που επιλέγεται ως σημείο μηδενικής ενέργειας. Σύμφωνα με τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας, η δυναμική ενέργεια $U(\vec{\mathbf{r}})$ σε ένα σημείο του χώρου στον οποίο επικρατεί η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ είναι:

$$\int_{A}^{r} \vec{\mathbf{F}}_{\text{εμείς}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{r}^{A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U(\vec{\mathbf{r}}) - U(\mathrm{A}) = U(\vec{\mathbf{r}}) \tag{3.34}$$

όπου δεχτήκαμε ότι $U(\mathrm{A}) = 0$. Έτσι, για τις διατηρητικές δυνάμεις, ορίζεται μονοσήμαντα μια βαθμωτή συνάρτηση θέσης, *η δυναμική ενέργεια*, η οποία περιγράφει, επαρκώς όπως θα δούμε στη συνέχεια, το διανυσματικό πεδίο της δύναμης.

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, ο μονοσήμαντος και άρα ωφέλιμος ορισμός της δυναμικής ενέργειας προϋποθέτει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης, το έργο της, κατά μήκος μιας διαδρομής δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αλλά από την αρχή και το τέλος της. Διαφορετικά, όπως συμβαίνει με τις δυνάμεις τριβής, το έργο εξαρτάται από την εκάστοτε διαδρομή και συνεπώς η δυναμική ενέργεια, όπως ορίστηκε, δεν θα είναι μια μονοσήμαντη συνάρτηση για κάθε σημείο.

3.4.1 Διατηρητικές δυνάμεις και διατήρηση της ενέργειας

Για ένα σωματίδιο το οποίο βρίσκεται σε χώρο που επικρατεί δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$, είδαμε ότι, λόγω της δράσης της δύναμης αυτής, η διαφορά της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου μεταξύ δύο σημείων *A* και *B*, $K_A - K_B$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$K_B - K_A = \int_{A}^{B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \,. \tag{3.35}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας που προηγήθηκε, *αν η δύναμη* $\vec{\mathbf{F}}$ *είναι διατηρητική*, θα ισχύει για οποιαδήποτε διαδρομή από το *A* στο *B*:

$$U_B - U_A = -\int_{A}^{B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \,. \tag{3.36}$$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο εξισώσεις παίρνουμε:

$$(K_B + U_B) - (K_A + U_A) = 0 \qquad \text{ή} \qquad K_B + U_B = K_A + U_A \,. \tag{3.37}$$

Δηλαδή, *το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το χρόνο*. Στη σχέση αυτή τα όρια *A* και *B* αντιστοιχούν στους χρόνους t_A και t_B κατά τους οποίους το σωματίδιο βρίσκεται στις αντίστοιχες θέσεις *A* και *B*.

Την προηγούμενη σχέση μπορούμε να εκφράσουμε με τον ακόλουθο τρόπο:

$$E = \tfrac{1}{2} M\upsilon^2(\mathrm{A}) + U(\mathrm{A}) = \tfrac{1}{2} M\upsilon^2(\mathrm{B}) + U(\mathrm{B}) \tag{3.38}$$

όπου *E* μια σταθερά που την ονομάζουμε *ενέργεια ή ολική ενέργεια ή μηχανική ενέργεια* του συστήματος. Η σχέση αυτή εκφράζει ή ορίζει τη *συνάρτηση ενέργειας* για ένα σύστημα με ένα σωματίδιο. Για διατηρητικές δυνάμεις, όπως είδαμε, μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, και κατά συνέπεια, αν οριστεί μια συνάρτηση ολικής ενέργειας ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, αυτή η συνάρτηση θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη και όπως προκύπτει θα διατηρείται σταθερή. Η *αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορεί να θεωρηθεί και ως μια πειραματική αρχή.*

3.4.2 Παραγωγή της δύναμης από τη δυναμική ενέργεια. Η βαθμίδα

Η γνώση της δυναμικής ενέργειας μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη δύναμη του προβλήματος. Για το πρόβλημα σε μια διάσταση, σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε:

$$U(x) - U(\mathrm{A}) = -\int_{\mathrm{A}}^{x} F\, dx \tag{3.39}$$

από όπου, παραγωγίζοντας, προκύπτει:

$$\frac{dU}{dx} = -F \,. \tag{3.40}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ελεγχθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$-\int_{\mathrm{A}}^{x} F\,dx = \int_{\mathrm{A}}^{x} \frac{dU}{dx}dx = \int_{A}^{x} dU = U(x) - U(\mathrm{A})\,. \tag{3.41}$$

Σύμφωνα με αυτή τη σχέση η δύναμη του προβλήματος (του πεδίου) είναι ίση με το αντίθετο του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται στο χώρο η δυναμική ενέργεια. Για τις τρεις διαστάσεις ισχύει γενικότερα:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.42}$$

Και η πλήρης έκφραση για τη διανυσματική συνάρτηση της δύναμης είναι

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \equiv -\mathbf{grad}\,U \tag{3.43}$$

όπου με grad συμβολίζεται ο τελεστής της *βαθμίδας ή κλίσης* (gradient) της συνάρτησης $U(x,y,z)$ και ορίζεται:

σε καρτεσιανές συντεταγμένες:
$$\mathbf{grad} \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.44}$$

σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες:
$$\mathbf{grad} \equiv \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.45}$$

Η βαθμίδα ή κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης U γράφεται $\mathbf{grad}U$ ή και ∇U . Ο τελεστής ∇ διαβάζεται “ανάδελτα” και το διάνυσμα ∇U διαβάζεται “ανάδελτα του U ”.

Αποδεικνύεται ότι η σύνθετη αυτή παραγώγιση που εκφράζει ο τελεστής grad μιας βαθμωτής συνάρτησης, δίνει ένα διάνυσμα με κατεύθυνση εκείνη που αντιστοιχεί στο μέγιστο ρυθμό αύξησης της βαθμωτής συνάρτησης στο χώρο, και με μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης ως προς τη μετατόπιση (βλ. *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ9*).

3.4.3 Πότε μια δύναμη είναι διατηρητική; Ο στροβιλισμός ενός διανύσματος

Αξιοποιώντας τον τελεστή του ανάδελτα μπορούμε να ελέγξουμε με μονοσήμαντο τρόπο αν μια διανυσματική συνάρτηση θέσης $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ που εκφράζει τη δύναμη του προβλήματος είναι μια διατηρητική δύναμη.

Αν $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$, *τότε η δύναμη είναι διατηρητική, και αντιστρόφως.*

Το μέγεθος αυτό ονομάζεται *στροβιλισμός* ($\mathbf{curl}\,\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}}$) της διανυσματικής συνάρτησης. (Για την πράξη αυτή συμβουλευτείτε το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ9*).

3.4.4 Διατήρηση της ενέργειας και ενεργειακά διαγράμματα

Αν σε ένα πρόβλημα είναι γνωστή η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, τότε κατασκευάζοντας τη γραφική παράστασή της έχουμε το *ενεργειακό διάγραμμα* του προβλήματος από το οποίο μπορούμε να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες. Όπως θα φανεί στα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, τα ακρότατα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας αντιστοιχούν σε θέσεις μηδενισμού της δύναμης και συνεπώς σε *θέσεις ισορροπίας*. Τα σημεία όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη είναι *σημεία ευσταθούς ισορροπίας* ενώ τα σημεία μέγιστης τιμής της δυναμικής ενέργειας είναι σημεία *ασταθούς ισορροπίας*. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε ένα ενεργειακό διάγραμμα μπορούμε να έχουμε εποπτεία για τα όρια μέσα στα οποία θα κινηθεί ένα σωματίδιο με τη συγκεκριμένη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (βλ. το Παράδειγμα που ακολουθεί).

Παράδειγμα 1

Ενεργειακά διαγράμματα. Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω στον άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση

$$U(x) = Ax^2 e^{-x/a} \qquad (-\infty < x < \infty), \qquad \text{όπου } A \text{ και } a \text{ θετικές σταθερές.}$$

(α) Να σχεδιαστεί πρόχειρα η καμπύλη $U(x)$, αφού βρεθούν τα χαρακτηριστικά της σημεία.

(β) Να βρεθεί η δύναμη $F_x(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

(γ) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος.

(δ) Να αποδειχθεί ότι οι θέσεις ελαχίστου της $U(x)$ είναι θέσεις ευσταθούς ισορροπίας και οι θέσεις μεγίστου της $U(x)$ είναι θέσεις ασταθούς ισορροπίας.

(ε) Να αποδειχθεί ότι, για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, και να βρεθεί η γωνιακή της συχνότητα.

(στ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να αφεθεί το σώμα από το σημείο $x = 0$ ώστε να διαφύγει στο άπειρο.

(α) Εύρεση των χαρακτηριστικών σημείων και σχεδίαση της $U(x)$.

Σημεία μηδενισμού της $U(x)$: Είναι $U(0) = 0$ για $x = 0$ και για $x = \infty$.

Συμπεριφορά στα $x = \pm\infty$: $U(-\infty) = \infty, \quad U(\infty) = 0$.

Μέγιστα και ελάχιστα:

Επειδή $$\frac{dU}{dx} = A\left(2xe^{-x/a} - \frac{x^2}{a}e^{-x/a}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{dU}{dx} = 2Ax\left(1 - \frac{x}{2a}\right)e^{-x/a}$$

είναι $$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{για} \quad x = 0 \quad \text{και} \quad x = 2a.$$

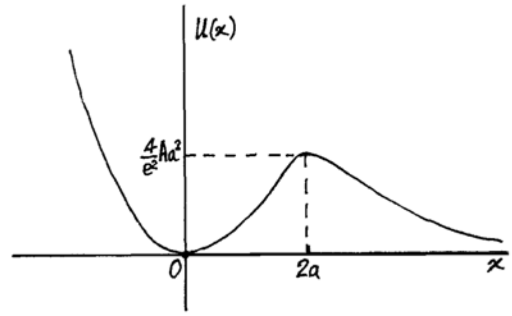
Η τιμές της $U(x)$ στα σημεία αυτά είναι:

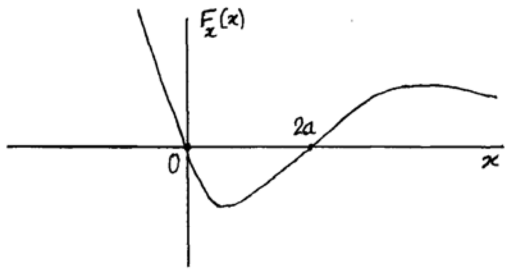
$$U(0) = 0 \qquad \text{και} \qquad U(2a) = \frac{4}{e^2}Aa^2 .$$

Επίσης, $$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{A}{a^2}\left(x^2 - 4ax + 2a^2\right)e^{-x/a}$$

και $$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} > 0 \quad \Rightarrow \quad U = \text{ελάχιστο}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=2a} < 0 \quad \Rightarrow \quad U = \text{μέγιστο}$$





(β) Δύναμη $F_x(x)$. $$F_x(x) = -\frac{dU}{dx}, \quad F_x(x) = \frac{A}{a}x(x - 2a)e^{-x/a}$$

(γ) Σημεία ισορροπίας.

$$F_x(x) = 0 \quad \text{για} \quad x = 0 \quad \text{και} \quad x = 2a .$$

Αυτά είναι και τα σημεία ισορροπίας του σώματος. Επίσης είναι

$$\frac{dF_x}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2} = 0 \quad \text{για} \quad x = (2 - \sqrt{2})a \quad \text{και} \quad x = (2 + \sqrt{2})a .$$

(δ) Είδη ισορροπίας.

Για το ελάχιστο της $U(x)$ στο σημείο $x=0$, η δύναμη $F_x(x)=\frac{A}{a}x(x-2a)e^{-x/a}$ μπορεί να εκφραστεί, για μικρές τιμές της μετατόπισης x, ως

$$F_x(x)\approx \frac{A}{a}x(x-2a)\left(1-\frac{x}{a}\right)\approx -2Ax \qquad (\text{για } |x|<<a).$$

Δηλαδή υπάρχει μία *επαναφέρουσα* (προς το σημείο $x=0$) δύναμη, ανάλογη της μετατόπισης x. Το σημείο *ελάχιστης δυναμικής ενέργειας* είναι επομένως σημείο *ευσταθούς ισορροπίας*.

Για το μέγιστο της $U(x)$ στο σημείο $x=2a$, η δύναμη $F_x(x)=\frac{A}{a}x(x-2a)e^{-x/a}$ μπορεί να εκφραστεί, για μικρές τιμές της μετατόπισης $\chi\equiv x-2a$ από το σημείο $x=2a$, ως

$$F_x(\chi)=\frac{A}{a}(\chi+2a)\,\chi\, e^{-(\chi+2a)/a}\approx \frac{A}{a}e^{-2}\chi(2a+\chi)\left(1-\frac{\chi}{a}\right)\approx \frac{2A}{e^2}\chi \qquad (\text{για } |\chi|<<a).$$

Δηλαδή υπάρχει μία *απομακρύνουσα* (από το σημείο $x=2a$) δύναμη, ανάλογη της μετατόπισης χ. Το σημείο *μέγιστης δυναμικής ενέργειας* είναι επομένως σημείο *ασταθούς ισορροπίας*.

(ε) Ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Για μικρές τιμές της μετατόπισης x από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας $x=0$, η δύναμη είναι:

$$F_x(x)=\frac{A}{a}x(x-2a)e^{-x/a}\approx \frac{A}{a}x(x-2a)\left(1-\frac{x}{a}\right)\approx -2Ax.$$

Η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι επομένως:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2Ax, \qquad \ddot{x}+\frac{2A}{m}x=0, \qquad \ddot{x}+\omega_0^2x=0 \quad \text{όπου} \quad \omega_0\equiv\sqrt{\frac{2A}{m}}$$

η οποία είναι η εξίσωση για *απλή αρμονική ταλάντωση* γύρω από το σημείο $x=0$.

(στ) Ταχύτητα διαφυγής από το σημείο $x=0$.

Για να διαφύγει το σώμα στο $x=\infty$ από το σημείο $x=0$, θα πρέπει να υπερβεί το φράγμα δυναμικού στο μέγιστο της $U(x)$ που υπάρχει στο σημείο $x=2a$. Η τιμή της δυναμικής ενέργειας εκεί είναι $U(2a)=\frac{4}{e^2}Aa^2$.

Αν στο σημείο $x=2a$ η ταχύτητα του σώματος είναι σχεδόν ίση με μηδέν, θα πρέπει η ολική ενέργεια του σώματος να είναι τουλάχιστον ίση με $U(2a)$. Άρα,

$$E_{ολ}=U(x)+K(x)>U(2a)$$

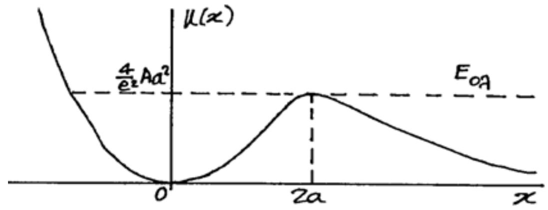
ή

$$E_{ολ}>\frac{4}{e^2}Aa^2 .$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα, για να διαφύγει το σώμα στο άπειρο από σημεία όπου είναι $x<2a$, θα πρέπει να έχει

$$E_{ολ}=U(x)+K(x)>\frac{4}{e^2}Aa^2 .$$

Επειδή για $x=0$ είναι $U(0)=0$, η συνθήκη για διαφυγή στο άπειρο είναι:



$$K(0)=\tfrac{1}{2}m\upsilon_0^2>\frac{4}{e^2}Aa^2 \qquad \text{η} \qquad |\upsilon_0|>\frac{\quad}{e}\sqrt{\frac{\quad}{m}}\;.$$

Στην περίπτωση αυτή, να σημειωθεί ότι, σε μεγάλες αποστάσεις από το σημείο $x=0$, επειδή η δυναμική ενέργεια του σώματος μηδενίζεται, η κινητική του ενέργεια θα είναι ίση με την ολική του ενέργεια και η ταχύτητά του θα τείνει προς την τιμή $|\upsilon_0|$.

3.4.5 *Ισχύς*

Η *ισχύς P* είναι ο χρονικός ρυθμός με τον οποίο μεταβιβάζεται η ενέργεια. Το έργο που παράγει μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται σε ένα σωματίδιο μετακινώντας το κατά $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ έχει ήδη οριστεί ως:

$$\Delta W=\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} \tag{3.46}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη δύναμη είναι:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t}=\vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \tag{3.47}$$

στο όριο $\Delta t\to 0$, παίρνουμε την ισχύ:

$$P=\frac{dW}{dt}=\vec{\mathbf{F}}\cdot\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}=\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}} \tag{3.48}$$

Αν γνωρίζουμε την ισχύ ως συνάρτηση του χρόνου, $P(t)$, μπορούμε να εκφράσουμε το έργο για το χρονικό διάστημα t_1 ως t_2, με το εξής τρόπο:

$$W(t_1\to t_2)=\int_{t_1}^{t_2}P(t)\,dt \tag{3.49}$$

Μονάδα ενέργειας στο S.I. είναι το joule (J) και ισχύος το watt (1 W = 1 J/s).

3.4.6 *Δυναμική ενέργεια και διατήρηση της ενέργειας στο πεδίο βαρύτητας*

Θα εξετάσουμε, ως παράδειγμα, τη δυναμική ενέργεια, τη συνάρτηση ενέργειας και τη διατήρηση της ολικής ενέργειας στην περίπτωση της δύναμης της παγκόσμιας έλξης, νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα. Θεωρούμε δύο σημειακές μάζες M_1 και M_2 εκ των οποίων η πρώτη ακίνητη στην αρχή των αξόνων.
Η δύναμη που η μάζα M_1 ασκεί στη M_2 θα είναι:

$$\vec{\mathbf{F}}=-G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{3.50}$$

με $\vec{\mathbf{r}}=r\,\hat{\mathbf{r}}$ η απόσταση της μάζας M_2 από τη M_1.

Σύμφωνα με τον ορισμό, η διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων *A* και *P* είναι:

$$U(\mathrm{P})-U(\mathrm{A})=\int_A^P\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\mu\varepsilon\iota\varsigma}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=\int_A^P G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} \tag{3.51}$$

όπου

$$\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\mu\varepsilon\iota\varsigma}=-\vec{\mathbf{F}}=G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{3.52}$$

δηλαδή είναι το έργο που πρέπει να παραγάγουμε για να μετακινήσουμε, υπερνικώντας τη δύναμη του πεδίου, τη μάζα M_2 από το σημείο *A* στο σημείο *P*.

Αλλά για το στοιχειώδες έργο $dW_{\varepsilon\mu\varepsilon\iota\varsigma}$ ισχύει:

$$dW_{\varepsilon\mu\varepsilon\iota\varsigma}=G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=G\frac{M_1M_2}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}=G\frac{M_1M_2}{r^2}dr \tag{3.53}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ότι:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \tfrac{1}{2} d(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \tfrac{1}{2} d(r^2) = r\, dr \,. \tag{3.54}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να έχουμε αν εκφράσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες το εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = r\,\hat{\mathbf{r}} \cdot (dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}) = r\, dr \,, \tag{3.55}$$

αφού $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$ και $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$, επειδή $\hat{\mathbf{r}} \perp \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

Τελικά,

$$U(P) - U(A) = \int_{r_A}^{r} G\frac{M_1 M_2}{r^2} dr = -\, G\frac{M_1 M_2}{r}\bigg|_{r_A}^{r} = -G\frac{M_1 M_2}{r} + G\frac{M_1 M_2}{r_A} \tag{3.56}$$

όπου r και r_A είναι τα μέτρα των διανυσματικών αποστάσεων των σημείων P και A αντίστοιχα. Αν επιλέξουμε $U = 0$ στο σημείο A, τότε:

$$U(r) = -G\frac{M_1 M_2}{r} + G\frac{M_1 M_2}{r_A} \;. \tag{3.57}$$

Αν $r_A = \infty$, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται, οπότε:

$$U(r) = -G\frac{M_1 M_2}{r} . \tag{3.58}$$

Δηλαδή, η καταλληλότερη επιλογή για τη θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι: $U = 0$ για $r = \infty$.

Έτσι, η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για ένα σώμα μάζας M_2, που κινείται στο πεδίο βαρύτητας ενός σώματος μάζας M_1 (έστω, π.χ., ότι $M_1 >> M_2$, έτσι ώστε η κίνηση του σώματος M_1 να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα) θα έχει τη μορφή:

$$E = \tfrac{1}{2} M_2 \upsilon_A^2 - G\frac{M_1 M_2}{r_A} = \tfrac{1}{2} M_2 \upsilon_B^2 - G\frac{M_1 M_2}{r_B} \tag{3.59}$$

όπου υ_A και r_A είναι η ταχύτητα και η απόσταση του σώματος M_2 σε κάποια χρονική στιγμή t_A, και υ_B και r_B τα αντίστοιχα μεγέθη σε κάποια άλλη χρονική στιγμή t_B.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη του προβλήματος $\vec{\mathbf{F}}$ από τη βαθμίδα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U = -\frac{d}{dr}\left(-\,G\frac{M_1 M_2}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \;. \tag{3.60}$$

(Για τον υπολογισμό της βαθμίδας συναρτήσεων της μορφής $f(r)$, συμβουλευτείτε το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα Μ9*).

Προβλήματα

Από το βιβλίο Kittel κ.ά. Μηχανική: Κεφ. 5 , Ασκ. 6, 10.

3.1 Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος είναι $U(\vec{\mathbf{r}})$, όπως δίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

(α) $U = \alpha x y^2 z^3$ (β) $U = \alpha \dfrac{x^2 y^3}{z^5} - \alpha$ (γ) $U = \dfrac{1}{2} k r^2$ (δ) $U = -\dfrac{\kappa}{r}$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, και $\alpha,\ k$ και κ είναι θετικές σταθερές.

Σε κάθε περίπτωση βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

3.2 Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}} = (3x - 2y)\hat{\mathbf{x}} + (y + 2z)\hat{\mathbf{y}} - x^2\hat{\mathbf{z}}$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $(0,0,0)$ στο σημείο $(1,1,1)$ κατά μήκος της καμπύλης C, όταν C είναι:
(α) η καμπύλη $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, και (β) η καμπύλη $x = z^2,\ z = y^2$.
(γ) Είναι διατηρητική η δύναμη;

3.3 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z)$ (σε newton, όταν οι αποστάσεις είναι σε m) όπως δίνεται παρακάτω. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις, δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική και βρείτε τη δυναμική ενέργεια $U(x, y, z)$ του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(0,0,0) = 0$.

(α) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y^2 + 2xz)\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (2yz + x^2)\hat{\mathbf{z}}$ (Απ.: $U(x,y,z) = -(xy^2 + yz^2 + zx^2)$)

(β) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = y^2 z^3 \hat{\mathbf{x}} + 2xyz^3\hat{\mathbf{y}} + 3xy^2z^2\hat{\mathbf{z}}$ (γ) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y+z)\hat{\mathbf{x}} + (x+z)\hat{\mathbf{y}} + (x+y)\hat{\mathbf{z}}$

(δ) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (2xyz)\hat{\mathbf{x}} + (x^2 z + z + 2y)\hat{\mathbf{y}} + (y + x^2 y)\hat{\mathbf{z}}$ (ε) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = -k_x x\hat{\mathbf{x}} - k_y y\hat{\mathbf{y}} - k_z z\hat{\mathbf{z}}$

3.4 Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ όπως δίνεται παρακάτω, όπου κ και a είναι θετικές σταθερές, r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων Ο και $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το σημείο Ο προς το σημείο $\vec{\mathbf{r}}$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις, βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, $U(\vec{\mathbf{r}})$. Θεωρήστε ότι $U = 0$ όταν $r = r_A$, όπως δίνεται σε κάθε περίπτωση.

(α) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{2\kappa}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = \infty$ (Απ.: $U(\vec{\mathbf{r}}) = -\dfrac{\kappa}{r^2}$). (β) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\left(\dfrac{a}{r} - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = a$.

(γ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \kappa\left(\dfrac{r}{a} + \dfrac{a}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = a$. (δ) $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{\kappa}{a} r e^{-r^2/a^2}\hat{\mathbf{r}}$, $r_A = 0$.

3.5 Σώμα μάζας m έχει δυναμική ενέργεια $U(r) = A\left(-\dfrac{3r_0^2}{r^2} + \dfrac{2r_0^3}{r^3}\right)$, όπου A και r_0 είναι θετικές σταθερές και r η απόσταση του σώματος από ακίνητο σημείο Ο. (Σημείωση: το r είναι πάντοτε θετικό).
(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα.
(β) Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σώμα;
(γ) Αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο με αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν σε άπειρη απόσταση από το Ο, να βρεθεί η ταχύτητά του στη θέση $r = r_0$ και η απόσταση στην οποία η ταχύτητά του θα ξαναγίνει μηδενική.

3.6 Ένα σώμα με μάζα m = 0,5 kg κινείται κατά τον άξονα x. Η δυναμική του ενέργεια είναι $U(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3$, $(-\infty < x < \infty)$ σε J, όταν το x είναι σε m.
(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος.
(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε τη δύναμη $F(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα.
(γ) Το σώμα ξεκινά από τη θέση x = 2 m με αρχική ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}} = -2\hat{\mathbf{x}}$ m/s. Περιγράψτε

ποιοτικά την κίνησή του. Βρείτε την ταχύτητά του στα σημεία ισορροπίας.

3.7 Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι $\vec{\mathbf{r}}(t)=(\alpha\cos\omega t)\hat{\mathbf{x}}+(\beta\sin\omega t)\hat{\mathbf{y}}$, όπου α, β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

(α) Δείξετε ότι το σώμα κινείται σε ελλειπτική τροχιά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά της έλλειψης αυτής.

(β) Βρείτε τη δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ που ασκείται στο σώμα. Δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(γ) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(r=0)=0$.

(δ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του σώματος; Δείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερή.

(ε) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ καθώς το σώμα κινείται από τη θέση Α (α, 0), στη θέση Β (0, β).

(στ) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ και ως συνάρτηση του χρόνου. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμα (ε).

3.8 Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r)=D\left(-\dfrac{b}{r}+\dfrac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων, και D και b είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο είναι ακίνητο στη θέση $r=0$.

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$.

(β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε πού είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική.

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $r = 3b/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει.

(δ) Αν η αρχική απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι x, για ποιες τιμές του x θα διασπασθεί το μόριο;

3.9 Ένα σωματιδίο, μάζας 1 kg, κινείται σε πεδίο δύναμης, τέτοιο ώστε η δυναμική του ενέργεια να είναι $U(r)=18r^2e^{-2r}$ (σε J όταν το r δίνεται σε m).

(α) Βρείτε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας του σωματιδίου.

(β) Αν το σωματίδιο αφεθεί ελεύθερο στο σημείο $r=1/4$ m με μηδενική ταχύτητα, βρείτε την ταχύτητα με την οποία θα φθάσει στο σημείο ισορροπίας.

(γ) Βρείτε την περίοδο για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.

3.10 Θεωρήστε ότι για ένα σύστημα δύο σωματιδίων η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση $U(r)=-\dfrac{a}{r^n}+\dfrac{b}{r^2}$, όπου $a, b>0$ και r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων.

(α) Να υπολογίσετε τη δύναμη που εξασκεί το ένα σωματίδιο πάνω στο άλλο.

(β) Να βρείτε την απόσταση των δύο σωματιδίων για ισορροπία. Αποδείξετε ότι η ισορροπία είναι ευσταθής μόνο αν $n<2$.

(γ) Για $n=1$, θεωρήστε ότι η παραπάνω συνάρτηση περιγράφει ένα διατομικό μόριο. Υπολογίστε την ενέργεια που χρειάζεται για να διασπαστεί.

3.11 Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σωματιδίων δίνεται από την έκφραση $U(r)=-V_0 r\mathrm{e}^{-r/r_0}$ όπου r η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων και V_0 και r_0 είναι θετικές σταθερές. Αν το ένα σωματίδιο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$,

(α) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στο δεύτερο σωματίδιο.

(β) Να εξετάσετε αν η δύναμη αυτή είναι κεντρική, διατηρητική, ελκτική ή απωστική.

(γ) Υπάρχει τιμή του r για την οποία τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση ισορροπίας;

3.12 Σημειακή μάζα m κινείται στο επίπεδο xy. Η δυναμική της ενέργεια είναι $U(x,y)=\alpha x^2+\beta y^2$, όπου α και β είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m.

(β) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται από τα α και β για να είναι η δύναμη κεντρική;

(γ) Αν το σώμα κρατηθεί ακίνητο στη θέση $y = 0$, $x = x_0$ και αφεθεί ελεύθερο στο χρόνο $t = 0$, να βρεθεί η θέση $\vec{\mathbf{r}}(t)$ του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου, η ταχύτητά του $\vec{\mathbf{υ}}(t)$, η κινητική του ενέργεια K και η ολική του ενέργεια E.

3.13 Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά τον άξονα x, με δυναμική ενέργεια $U(x)$. Αν το σωματίδιο βρίσκεται στις θέσεις x_1 και x_2 τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα (με $x_2 > x_1$), δείξετε ότι: $t_2 - t_1 = \sqrt{\dfrac{m}{2}} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}$, όπου E είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω σχέση για σώμα (αρμονικό ταλαντωτή) που έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = \dfrac{1}{2}\kappa x^2$ και ξεκινά από ηρεμία από το σημείο $x = \alpha$, για να δείξετε ότι $x = \alpha \cos\left(\sqrt{(\kappa / m)}\,t\right)$.
